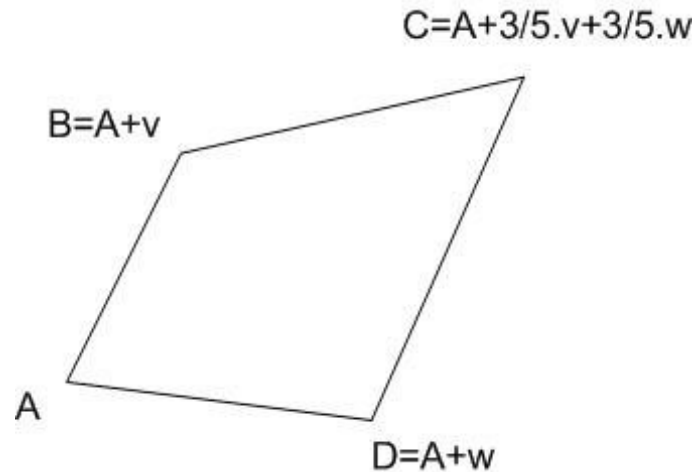


RESOLUCION PRIMER LLAMADO FINAL JULIO 2015 - 29/07/15

1) Se tiene un cuadrilátero ABCD con $B = A + \vec{v}$; $D = A + \vec{w}$; $C = A + \frac{3}{5}\vec{v} + \frac{3}{5}\vec{w}$;
con $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$

Introducimos un grafico de un cuadrilátero y analizamos las condiciones de sus lados.



Evidentemente $AB = \vec{v}$ y $AD = \vec{w}$, por lo que $\|AB\| = \|AD\|$, por lo que el cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales.

$$BC = C - B = A + \frac{3}{5}\vec{v} + \frac{3}{5}\vec{w} - (A + \vec{v}) = \frac{3}{5}\vec{w} - \frac{2}{5}\vec{v}$$

$$\|BC\|^2 =$$

$$\left(\frac{3}{5}\vec{w} - \frac{2}{5}\vec{v}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{w} - \frac{2}{5}\vec{v}\right) = \frac{9}{25}\vec{w} \cdot \vec{w} - \frac{6}{25}\vec{w} \cdot \vec{v} - \frac{6}{25}\vec{v} \cdot \vec{w} + \frac{4}{25}\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{9}{25}\|\vec{w}\|^2 - \frac{12}{25}\vec{w} \cdot \vec{v}$$

, donde hemos reemplazado el producto escalar de un vector por si mismo por su módulo elevado al cuadrado y hemos agrupado en un solo término a los dos términos intermedios porque son iguales por las propiedades de producto escalar.

También como $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ por hipótesis inicial , resulta que $\|BC\|^2 =$

$$\frac{13}{25}\|\vec{w}\|^2 - \frac{12}{25}\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Haciendo lo mismo con DC resulta que $\|DC\|^2 = \frac{13}{25}\|\vec{w}\|^2 - \frac{12}{25}\vec{w} \cdot \vec{v}$. Por lo que surge que $\|BC\|^2 = \|DC\|^2$ y consecuentemente $\|BC\| = \|DC\|$, luego los otros lados consecutivos también son iguales. Por lo tanto el cuadrilátero ABCD es un romboide.

2) Para poder calcular el punto de la recta \vec{r} que está mas cerca del punto Q , podemos hallar el plano que tiene por normal al vector director de \vec{r} y que contiene al punto Q.

Hallemos la ecuación del dicho plano $(x,y,z)(3,-1,2) = (-1,-7,6)(3,-1,2) \rightarrow 3x - y + 2z = 16$

La ecuación de la recta \vec{r} es $k(3, -1, 2) + (0, -2, 0) = (3k, -k - 2, 2k)$

Buscamos la intersección de la recta con el plano anterior

$$3(3k) - (-k - 2) + 2(2k) = 14k + 2 = 16 \rightarrow k = 1$$

Por lo que el punto de \vec{r} mas cercano a Q será el $(3, -3, 2)$

3) Buscamos un vector \vec{w} que es a la vez perpendicular a otros dos , tendremos que utilizar el producto vectorial de ambos. Después analizaremos la condición de su módulo.

$$\left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-2, -1, 2) , \text{ que es perpendicular al } (1, 4, 3) \text{ y a } (0, 2, 1)$$

(comprobar por producto escalar con ambos)

Luego el vector \vec{w} será un múltiplo del $(-2, -1, 2)$, luego

$$\vec{w} = r(-2, -1, 2) = (-2r, -r, 2r)$$

Ahora pedimos que su módulo valga 6 , o sea

$$\|\vec{w}\| = |r| \|(-2, -1, 2)\| = 6 \rightarrow 3|r| = 6 \rightarrow |r| = 2 \rightarrow r = 2 \text{ o } r = -2$$

Si queremos calcularlo por el módulo del vector resulta

$$\sqrt{(-2r)^2 + (-r)^2 + (2r)^2} = 6 \rightarrow \sqrt{9r^2} = 6 \rightarrow \sqrt{9} \cdot |r| = 6 \rightarrow r = 2 \text{ o } r = -2$$

Luego $w = (-4, -2, 4)$ o $w = (4, 2, -4)$

4) Buscamos todos los puntos P de R^3 que equidistan de dos planos π_1 y π_2

Primero veamos la posición relativa de ambos planos. Analizando sus normales $(-1, 2, 0)$ y $(0, 1, 2)$ vemos que no son paralelos , por lo tanto se intersectan teniendo una recta común.

Aplicando la fórmula de distancia de un punto $P = (x, y, z)$ a un plano π de ecuación $a.x + b.y + c.z = d$

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|x.a + y.b + z.c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En nuestro caso resulta

$$\text{dist}(P, \pi_1) = \frac{|x.(-1) + y.2 + z.0 - 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{|-x + 2y - 4|}{\sqrt{5}}$$

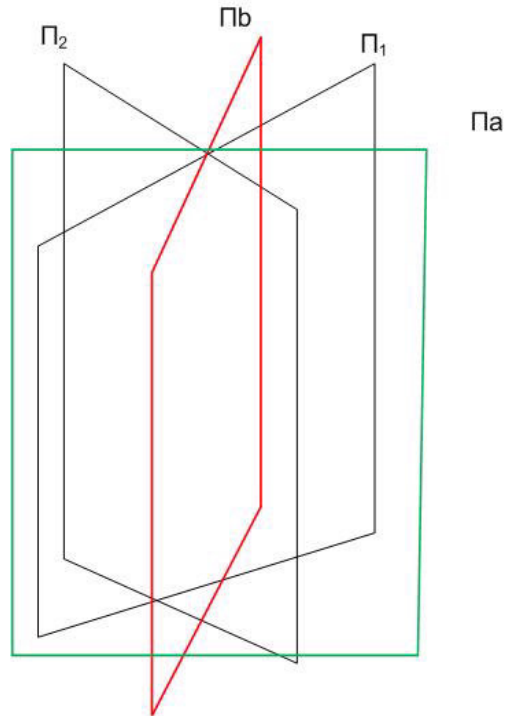
$$\text{dist}(P, \pi_2) = \frac{|x.0 + y.1 + z.2 - (-1)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|y + 2z + 1|}{\sqrt{5}}$$

Luego

$$\frac{|-x + 2y - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|y + 2z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-x + 2y - 4| = |y + 2z + 1| \rightarrow -x + 2y - 4 = y + 2z + 1 \text{ ó }$$

$$-x + 2y - 4 = -y - 2z - 1$$

De donde surge $\pi_a : -x + y - 2z = 5$ ó $\pi_b : -x + 3y + 2z = 3$. Por lo que los puntos que equidistan de ambos planos conforman otros dos planos.



5) El sistema es cuadrado (tiene dos ecuaciones con dos incógnitas). Podemos analizarlo con el determinante

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 6+2k \\ k-2 & -k \end{pmatrix} \right| = -2k^2 - 5k + 12 = 0, \text{ y las soluciones son } k = \frac{3}{2}, \text{ o } k = -4$$

(en el examen el alumno debe realizar y mostrar todas las operaciones involucradas)

Para esos dos valores de k tenemos que las filas (o columnas) dependen entre sí o alguna se anula. Para todo valor k distinto de $\frac{3}{2}$ o -4 el sistema es compatible determinado.

Si $k = \frac{3}{2}$ la matriz queda

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \text{ por eliminación de Gauss se llega a } \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}, \text{ por}$$

lo tanto el sistema es incompatible pues la última fila señala que $0.x + 0.y = \frac{11}{2}$ (imposible)

Si $k = -4$ la matriz resulta

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -6 & 4 & -12 \end{pmatrix}, \text{ por eliminación de Gauss se llega a } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ por}$$

lo que el sistema es compatible indeterminado. La última fila nos da la

información que x e y pueden tomar cualquier valor pues $0.x+0.y=0$ y la primera nos dice que $3x-2y=6$, por lo tanto $2y=3x-6$, o sea $y=\frac{3}{2}x-3$

6) Si $C=(\frac{3}{4}A.B)^{-1} \rightarrow C = \frac{4}{3}B^{-1}.A^{-1}$ (a partir de las propiedades de matriz inversa)

A^{-1} está dada en el enunciado, debemos calcular B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } C = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}$$

7) A los puntos de la recta se le aplican sucesivamente la traslación y una transformación cuyas matrices son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Luego su aplicación sucesiva}$$

$$\text{será } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿a quien se le aplica?. A la expresión genérica de los puntos de la recta, los cuales son

$$(x,y) = k(2,-1) + (-1,3) = \begin{pmatrix} 2k-1 & 3-k \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 3-k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-4 \\ 11-7k \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Luego se pide encontrar los}$$

puntos de la recta que luego de ser transformados tengan sus dos coordenadas iguales, o sea que $3k-4=11-7k$, $10k=15 \rightarrow k = \frac{3}{2}$. Tendremos por lo tanto un solo punto que cumple esa condición y es

$$\frac{3}{2}(2,-1) + (-1,3) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ y su transformado es}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

8) Sabemos porque nos lo aseguran que B y B' son bases.

El vector \vec{v} expresado en la base B es de la forma

$$2(1, 2, 0) + (-3)(-1, 0, 1) + a(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 5 & a+4 & a-3 \end{pmatrix}$$

El vector \vec{v} expresado en la base B' es de la forma

$$1(b, 1, -1) + (-1)(2, c, -1) + 0(0, 3, -3) = \begin{pmatrix} b-2 & 1-c & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $5=b-2$; $a+4=1-c$; $a-3=0$.

De la última igualdad resulta que $a=3$ que aplicada a la segunda resulta que $c=-6$ y de la primera resulta que $b=7$.

Luego la base B' = {(7, 1, -1); (2, -6, -1); (0, 3, -3)}

9) Por los vectores que generan a S resulta obvio que tiene dimension 2 (uno no es múltiplo del otro).

Planteamos las ecuaciones para averiguar las ecuaciones y dimensión de T.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ por eliminación de Gauss se llega a } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

luego la dimensión de T es 2 y su base está conformada por los vectores de las dos primeras filas.

Entonces para todo vector $\vec{v} = (x, y, z, w) \in T$;

$$\vec{v} = a(-1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 0, 2) = \begin{pmatrix} -a & b & a & 2b \end{pmatrix}, \text{ de donde sale que } z=-x \text{ y } w=2y ; \text{ por lo tanto las ecuaciones son } x+z=0 \text{ y } 2y-w=0$$

Otra forma de lograrlo es armar la siguiente matriz y reducirla (donde observamos que la componente x resulta de la combinación de -1 y 0 que son las primeras componentes de los vectores y así sucesivamente)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 2 & w \end{pmatrix}, f_3+f_1 \rightarrow f_3; f_4-2f_2 \rightarrow f_4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x+z \\ 0 & 0 & w-2y \end{pmatrix} \text{ y para que el}$$

sistema se compatible , se cumplen las dos condiciones que hallamos antes.

Para hallar la intersección debemos primero hallar la forma de los vectores de S

Si $v \in S$ entonces $\vec{v} \in S$, entonces $\vec{v} = a(1, 1, 0, 1) + b(0, 1, 2, 0) =$

$$\begin{pmatrix} a & a+b & 2b & a \end{pmatrix}$$

Los vectores que pertenecen a la intersección (o sea a S y T simultáneamente) cumplen las condiciones:

$$x+z=0 \rightarrow a+2b=0$$

$$2y-w=0 \rightarrow 2(a+b)-a=0 ; a+2b=0 \text{ (única condición)} \rightarrow a=-2b$$

Entonces los vectores de la intersección son de la forma

$$\begin{pmatrix} -2b & -b & 2b & -2b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La dimensión de $S \cap T$ es 1, el vector hallado en el párrafo anterior es su base y por lo tanto

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2+2-1=3$$

Si queremos hallar una base de $S+T$ ponemos a los vectores que generan a S y a T en una matriz y reducimos (sabiendo que van a ser linealmente dependientes)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ por eliminación de Gauss resulta } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

por lo que podemos eliminar al último vector y una base de $S + T$ resulta ser: $\{(-1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 2), (1, 1, 0, 1)\}$

10) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene como matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; entonces podemos

hallar su forma explícita

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ y - 3x - 5z \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -3x + y - 5z)$$

Demostraremos que es transformación lineal

Sean dos vectores de \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) y (a, b, c) . La suma de ambos es $(x+a, y+b, z+c)$

Si al vector suma le aplicamos la transformación nos da como resultado

$$f(x+a, y+b, z+c) = (2(x+a)-(y+b)+2(z+c), -3(x+a)+(y+b)-5(z+c)) = \\ (2x+2a-y-b+2z+2c, -3x-3a+y+b-5z-5c) = (2x-y+2z, -3x+y-5z) + (2a-b+2c, -3a+b-5c) = f(x,y,z) + f(a,b,c)$$

$$\text{Si hacemos } f[k(x,y,z)] = f(kx,ky,kz) = (2kx-ky+2kz, -3kx+ky-5kz) = k(2x-y+2z, -3x+y-5z) = k.f(x,y,z)$$

Luego es transformación lineal

Observando la matriz vemos que el máximo rango que puede tener es dos y como una fila no es múltiplo de la otra, exactamente el rango es 2. Luego la dimensión de la $\text{Im}(f)$ es 2 y cualquier base de \mathbb{R}^2 sirve como base de la imagen.

Resulta entonces que la $\dim \text{Nu}(f)$ es 1 pues $\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Im}(f) = \text{dimensión del espacio vectorial de partida que es } \mathbb{R}^3$.

El núcleo lo podemos hallar estableciendo las condiciones

$$2x-y+2z=0$$

$$-3x+y-5z=0$$

De la primera surge que $y=2x+2z$. Aplicándolo a la segunda se logra $-3x+2x+2z-5z=0$, por lo que $-x-3z=0 \rightarrow x=-3z \rightarrow y = -6z+2z=-4z$

Todos los vectores del $\text{Nu}(f)$ van a ser de la forma $(-3z, -4z, z) = z(-3, -4, 1)$. Y este vector es base del $\text{Nu}(f)$

Si queremos corroborarlo podemos hacer

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$