

ALGEBRA y GEOMETRIA ANALÍTICA I (1027)

TEJIENDO EL ALGEBRA LINEAL

Apunte I

Versión 2.4 – Agosto del 2015

Segundo CUATRIMESTRE del 2015

Julio Bertúa – Marcelo Denenberg

Prólogo a la versión v1.7

En el año 2012 se constituyó un equipo de investigación bajo la dirección de la Mg. Sc. Prof. María Eugenia Angel formado por un grupo de docentes de la materia Álgebra y Geometría Analítica I. El proyecto sobre el cual se trabajó durante el bienio 2012-2013 fue *"Nueva propuesta para la enseñanza del Álgebra Lineal en el contexto de las carreras de Ingeniería de la UNLAM"* - C126 – PROINCE con la intención de actualizar los contenidos, los objetivos y la metodología de enseñanza de la materia. Simultáneamente desde el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas se implementó (aún en curso) el PEICB, Proyecto Estratégico de Ingeniería para Ciencias Básicas, con finalidades concordantes.

A partir del trabajo conjunto desarrollado se llega a la confección de un nuevo diseño curricular con cambios conceptuales y metodológicos. Para probar el diseño elaborado, se tuvieron en cuenta tres etapas: previa, durante y posterior a la implementación.

En la etapa previa a la implementación,

- se elaboraron y seleccionaron las estrategias referidas al proceso de enseñanza aprendizaje,
- se confeccionó el material práctico-teórico a utilizar en el aula y
- se seleccionó y preparó a los docentes que formarían parte del proceso.

La etapa de implementación de dos cursos pilotos se llevó a cabo en el segundo cuatrimestre del 2013, uno a la mañana y otro a la noche. En la misma:

- se trabajó con el material elaborado en la modalidad de aula taller.
- se evaluó al alumno en forma permanente, antes, durante y al finalizar el proceso.
- al terminar el curso se tomó una encuesta de opinión a los alumnos que intervinieron en la experiencia.

Finalmente, en la etapa posterior, se llevó a cabo el análisis de los resultados obtenidos por los alumnos, de la encuesta de opinión y de la actividad realizada por los docentes lo que condujo a la implementación para todos los cursos de la nueva modalidad desde el primer cuatrimestre del 2014.

Los textos del presente ciclo lectivo están basados en los utilizados en los cursos pilotos pero se han modificado y adaptado de acuerdo a las experiencias recogidas.

Queremos agradecer a la directora del proyecto María Eugenia Angel, a los integrantes del Grupo de Investigación y a las docentes participantes de los cursos pilotos: Mariela Glassman, Paula Porco, Julieta Mateucci, Sandra Mendoza y Laura Avila.

Lic. Julio Bertúa & Prof. Marcelo Denenberg

Prólogo a la versión v2.0

Luego de la experiencia del primer cuatrimestre del 2014 han surgido una serie de cambios:

- a) Se ha anexo a la unidad II el tratamiento de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan con la intención de resolver sistemas de ecuaciones con mayor número de ecuaciones e incógnitas lo más temprano posible.
- b) Lo anterior facilita el abordaje de la inversa de matrices de orden 3 en adelante.
- c) Hay un texto introductorio a las simetrías axiales para ayudar al alumno en su ingreso al tema (aunque es tema abordado durante el ingreso).
- d) Se ha trasladado hacia la unidad III el “Las transformaciones lineales y la Geometría en el plano”.
- e) Además acompaña al texto otro denominado “Indicaciones Metodológicas, Cronograma y Material de apoyo para el Alumno” en donde se encontrarán explicaciones y comentarios adicionales, material de profundización y actividades que el alumno debiera realizar para complementar su aprendizaje en la clase presencial; dichas actividades las hemos denominado “Actividad de refuerzo” (AR) y están señaladas a lo largo del apunte.
- f) Se tomará un parcialito *cada dos clases* y un trabajo grupal cada otras cuatro, referido a los temas vistos en dichas clases (ver Material de Apoyo).

Lic. Julio Bertúa & Prof. Marcelo Denenberg

Prólogo a la versión v2.4

Hemos integrado al apunte las actividades de refuerzo que acompañaban al texto “Indicaciones Metodológicas, Cronograma y Material de apoyo para el Alumno”.

Para comunicarse con la *coordinación de la cátedra* pueden utilizar la siguiente dirección de mail : algebra1unlam@gmail.com.

La misma está habilitada para atender a cuestiones organizativas, administrativas y de funcionamiento pero no para consultas de tipo académicas, las que deberán ser evacuadas directamente con los docentes en los cursos a los que pertenecen los alumnos o en su defecto en los cursos de apoyo.

Lic. Julio Bertúa & Prof. Marcelo Denenberg

Indice

Unidad I: Introducción al Álgebra Lineal

I.1 La Geometría de la Imagen.

I.1.1 Proyección y Traslación.

I.1.1.a Definición: Operaciones en \mathbb{R}^2 .

I.1.1.b. Características de la Traslación.

I.1.2 Simetría Central.

I.1.2.b. Características de la Simetría.

I.1.3 Simetría Axial.

I.1.4 Rotación.

I.1.4.a. Características de la Rotación

I.1.4.b. Comentario

I.1.4.c. Rotación en un ángulo cualquiera.

I.1.5 Proyecciones Ortogonales.

I.2 Situaciones vinculadas con otras disciplinas y con la vida real.

I.2.1 Tráfico en la ciudad.

I.2.2 Circuitos Eléctricos.

I.2.3 Balance en ecuaciones químicas.

I.2.4 Tratamiento digital de Imágenes.

I.2.5 Modelo de Leontief.

I.2.6 Criptografía.

I.2.7 Movimientos poblacionales.

Unidad II: La Geometría y el Álgebra Lineal en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

II.1.1 Magnitudes escalares y vectoriales.

II.1.2 Vectores en \mathbb{R}^2 .

II.1.3 Operaciones y propiedades de los vectores en \mathbb{R}^2 .

II.1.3.1 Estructura de Espacio Vectorial.

II.1.4 Equivalencia de vectores

II.1.5 Paralelismo entre vectores

II.1.6 Longitud o norma de un vector

II.2 Recta por y fuera del origen en el plano

II.2.1 Rectas paralelas y perpendiculares

II.2.2 Producto escalar de vectores en \mathbb{R}^2

II.3 El espacio tridimensional (\mathbb{R}^3)

II.4 Rectas en el espacio

II.4.1 Rectas paralelas, secantes y albeadas.

II.5 Norma, magnitud o longitud de un vector en \mathbb{R}^3 .

II.5.1 Propiedades de la norma de un vector.

II.6 Productos entre vectores de \mathbb{R}^3 .

- II.6.1 Angulo entre vectores.
- II.6.2 Producto interior (ó escalar ó punto) en \mathbb{R}^3 .
- II.6.2.1 Propiedades del producto interior entre vectores (en \mathbb{R}^3 pero vale para \mathbb{R}^n).
- II.6.3 Proyección de un vector sobre una dirección.
- II.6.4 Desigualdad de Cauchy-Schwartz.
- II.6.5 Trabajo de una Fuerza.
- II.6.6 Descomposición de una fuerza en 2 y 3 direcciones.
- II.6.7 Producto vectorial.
- II.6.7.1 Propiedades del producto vectorial entre vectores.
- II.6.8 Producto mixto
- II.6.8.1 Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto.
- II.6.8.2 Condición de coplanaridad entre tres vectores en \mathbb{R}^3 .
- II.7 Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y su geometría.
- II.8 Matrices. Definición. Orden.
- II.8.1 Igualdad entre matrices.
- II.8.2 Operaciones entre matrices.
- II.8.3 Aplicaciones de las matrices y de sus operaciones.
- II.8.3.I Una aplicación para la vida diaria.
- II.8.3.II Las matrices en Sociología.
- II.8.3.III Cadenas de Markov.
- II.9 Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
- II.9.1 El juego de las relaciones en el Algebra Lineal
- II.10 Inversa de una matriz (primera aproximación)
- II.10.1 Propiedades de la inversa
- II.10.2 La Criptografía y la Inversa de Matrices
- II.11 Sistema de ecuaciones lineales con 3 o más incógnitas. Método de resolución de Gauss y de Gauss-Jordan.
- II.12 Rango fila de una matriz
- II.12.1. Teorema de Rouché-Fröbenius
- II.12.2. Equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales
- II.13. Sistemas con parámetros
- II.14. La inversa de una matriz (segunda aproximación)
- II.14.1. Inversa y sistemas de ecuaciones lineales
- II.15. Las “otras” miradas sobre un sistema de ecuaciones lineales
- II.16. Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos.
- II.17 Actividades de repaso y reafirmación de contenidos
- II.18 Apéndice
- II.18.1. Otras formas de explicitar una recta en el plano
- II.18.2. Desafío 1.
- II.18.3. Mapa Actividad 1 (pág.19).

Unidad I: Introducción al Álgebra Lineal

Resumen

Se presentan elementos del *Álgebra Lineal*: algunos objetos a manipular -puntos en el plano-, operaciones entre ellos -suma y producto por un escalar-, la adaptación del concepto de función -aparece la noción de *Transformación Lineal*- esencialmente ligado a las transformaciones geométricas.

Mostramos aplicaciones del A.L. a la vida diaria y a la Tecnología que serán abordadas a lo largo del curso.

El presente recorrido didáctico tiene muchos puntos de contacto con situaciones de la vida real. Comencemos con una de ellas para ir complementando nuestros conocimientos previos con los que debemos adquirir a lo largo del cuatrimestre.

Esta es una época donde lo visual tiene un papel preponderante. Seguramente el celular (sobre todo si es de última generación), la computadora o la Play IV no serían lo que son sin la “computación gráfica”. Sus principios, técnicas y algoritmos permiten la generación, manipulación y utilización de imágenes no sólo en juegos sino películas, dibujo asistido por computadora, visualización científica, entrenamiento y simulación, generación de imágenes médicas, arquitectura y arte, realidad virtual y aumentada y en nuevos espacios de la información.



Pero, ¿qué hay detrás de lo que se ve?

La intención de este material no es la de un curso de “computación gráfica”¹ sino la de exponer algunos conceptos y herramientas esenciales que le sirven de sostén.

I.1 La geometría de la imagen

I.1.1 Actividad 1: Traslación

- Grafica un sistema de coordenadas cartesianas plano (de dos dimensiones) y las unidades del eje horizontal X y vertical Y de igual magnitud.
- Marca los puntos del plano $A=(2; 0)$ y $B=(4; 0)$ y dibuja el segmento \overline{AB} que determinan.
- Indica gráfica y analíticamente, completando los espacios en blanco, cada una de las siguientes traslaciones de los A y B:

a) tres unidades hacia la derecha

$$A=(2; 0) \longrightarrow A'=(\dots ; \dots)$$

$$B=(4; 0) \longrightarrow B'=(\dots ; \dots)$$

¹ En el libro “Computer Graphics and Geometric Modeling”, de Max K. Agoston, 2005 Springer-Verlag London Ltd se puede encontrar un curso de Computación Gráfica en donde aparecen herramientas del Álgebra Lineal de suma utilidad.

b) tres lugares para arriba

$$A = (2; 0) \longrightarrow A'' = (\dots; \dots)$$

$$B = (4; 0) \longrightarrow B'' = (\dots; \dots)$$

c) dos lugares hacia la derecha y cuatro lugares para arriba

$$A = (2; 0) \longrightarrow A''' = (\dots; \dots)$$

$$B = (4; 0) \longrightarrow B''' = (\dots; \dots)$$

Si se selecciona un punto cualquiera U en el segmento \overline{AB} , el mismo podría notarse:

$$U = (x_u; 0) \text{ con } 2 \leq x_u \leq 4$$

¿Por qué habremos anotado x_u ? ¿ayuda esta notación?

- Aplicando los movimientos de traslación realizados en a), b) y c) completa

$$U' = (\dots; \dots) \quad U'' = (\dots; \dots) \quad U''' = (\dots; \dots) \text{ con } x_u \text{ cumpliendo } \dots\dots\dots$$

¿Qué se podría anotar para los valores de la segunda componente en cada caso?

Para pensar

- Las traslaciones del segmento \overline{AB} dan por resultado un nuevo segmento en *cada caso*.
- La longitud de cada nuevo segmento se mantiene invariante luego de una traslación.

- Repite lo realizado en la actividad para el segmento \overline{CD} con $C = (1; 3)$ y $D = (2; 5)$.

$$C = (1; 3) \longrightarrow C' = (\dots; \dots) \quad C'' = (\dots; \dots) \quad C''' = (\dots; \dots)$$

$$D = (2; 5) \longrightarrow D' = (\dots; \dots) \quad D'' = (\dots; \dots) \quad D''' = (\dots; \dots)$$

- Completa para $P = (x, y)$ con x e y cualquier número real

$$P = (x; y) \longrightarrow P''' = (\dots; \dots)$$

Puede notarse que para cada punto (y en cada caso) la traslación da por resultado un único punto, es decir que a cada punto le corresponde una única imagen al trasladarlo.

La traslación es un tipo de función

Focalicemos lo que sigue en la tercera traslación que llamaremos T''' –por traslación².

Para los puntos A, B, C, D y P aplicando la función T''' tenemos:

$$T'''(A) = T'''((2; 0)) = (4; 4) \quad T'''(B) = T'''((4; 0)) = (6; 4)$$

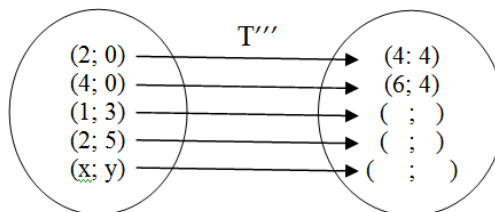
- Completa todos los espacios en blanco

$$T'''(C) = T'''((1; 3)) = (\dots; \dots) \quad T'''(D) = T'''((2; 5)) = (\dots; \dots)$$

$$T'''(P) = T'''((x; y)) = (\dots; \dots)$$

De esto último se desprende que la traslación T''' transforma al punto P en otro punto P''' de coordenadas $(\dots; \dots)$.

¡Al valor horizontal x de P se le adicionan 2 unidades y al valor vertical y se lo incrementa en 4 unidades!



² Hemos utilizado tres traslaciones: T' , T'' y T''' .

Podría pensarse que la función T''' le adiciona el punto (2; 4) a cada punto inicial obteniendo de esta forma que para el punto $P = (x; y)$ el resultado de la traslación es

$$(x; y) + (2; 4) = (x+2; y+4)$$

Si la función fuera adicionar el punto (a; b) a cada punto inicial, el resultado de la traslación de “a” unidades hacia la derecha y “b” unidades hacia arriba, sería

$$(x; y) + (a; b) = (x+a; y+b)$$

Aplicarle dos veces la traslación T''' a un punto cualquiera es lo mismo que adicionarle dos veces el punto (2; 4)

$$(x; y) + (2; 4) + (2; 4) = (x; y) + 2 \cdot (2; 4) = (x; y) + (4; 8) = (x+4; y+8)$$

Observamos que

$$(2; 4) + (2; 4) = 2 \cdot (2; 4) = (4; 8)$$

Otra función particular

Analicemos ahora otro tipo de función en el plano, aquella que a cada punto del plano lo “proyecta” en uno sobre el eje de abscisas, a saber $T''''(x; y) = (x; 0)$

Así $T''''(3; -5) = (3; 0)$, $T''''(-7; 4) = (-7; 0)$, y así sucesivamente.

¿Por qué podemos decir que es una función?

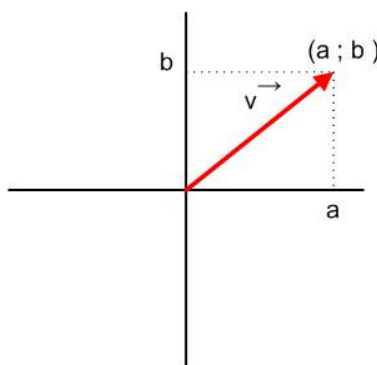
Hallar y representar en un gráfico la “proyección sobre el eje x” de los siguientes puntos del plano

$$A = (4; -3); B = (-2; 5); C = (4; 1); D = (2; 2)$$

Funciones con una particular condición

Para seguir trabajando con estas funciones (*que transforman los puntos del plano*) y analizarlas más profundamente, vamos a introducir un concepto que relaciona a los puntos del plano R^2 y a un ente matemático llamado vector (que será estudiado detalladamente en **Unidad II: La Geometría y el Álgebra Lineal en R^2 y R^3**).

A cada par ordenado (a; b) (que representa a un punto del plano R^2 con abscisa a y ordenada b) le asignamos un segmento orientado \vec{v} que tiene su origen en el punto (0; 0) y su extremo en (a; b), donde a y b son números reales.



Ahora con esta relación nos es posible definir lo siguiente:

1.1.1.a Definición

Para cualquier par de puntos del plano con componentes reales $M=(m_1; m_2)$ y $N=(n_1; n_2)$ y k un número real cualquiera se definen las **dos siguientes operaciones**³:

$$(1) M \oplus N = (m_1; m_2) \oplus (n_1; n_2) = (m_1 + n_1; m_2 + n_2) \quad (\text{suma})$$

$$(2) k \circ M = k \circ (m_1; m_2) = (k.m_1; k.m_2) \quad (\text{producto por un escalar})$$

Presentadas las dos operaciones queremos ver si se cumplen en T'''' las dos condiciones siguientes –en este momento parecen caprichosas pero tienen un papel preponderante en el Algebra Lineal–:

1.1.1.b

- a) $T''''(M+N) = T''''(M) + T''''(N)$ para cualquier par de puntos M y N
 b) $T''''(k.M) = k. T''''(M)$ para cualquier número k real y cualquier punto M

Para verificar la condición a) planteamos

$$T''''(\overline{M} + \overline{N}) = T''''((m_1; m_2) + (n_1; n_2)) = T''''(m_1 + n_1; m_2 + n_2) = (m_1 + n_1; 0)$$

$$T''''(\overline{M}) + T''''(\overline{N}) = T''''(m_1; m_2) + T''''(n_1; n_2) = (m_1; 0) + (n_1; 0) = (m_1 + n_1; 0).$$

Luego la condición se verifica.

Para la segunda planteamos:

$$T''''(k. \overline{M}) = T''''(k. (m_1; m_2)) = T''''(k.m_1; k.m_2) = (k.m_1; 0)$$

$$k. T''''(\overline{M}) = k. (T''''(m_1; m_2)) = k. (m_1; 0) = (k.m_1; 0).$$

Y la segunda condición también se cumple.

¿Pasará lo mismo para $T'''(\overline{M})$?

Para verificar si se cumple la condición a), desarrollamos los dos miembros de la igualdad

$$T'''(M+N) = T'''((m_1 + n_1; m_2 + n_2)) = (m_1 + n_1 + 2; m_2 + n_2 + 4)$$

$$\begin{aligned} T'''(M) + T'''(N) &= (m_1 + 2; m_2 + 4) + (n_1 + 2; n_2 + 4) = (m_1 + 2 + n_1 + 2; m_2 + 4 + n_2 + 4) = \\ &= (m_1 + n_1 + 4; m_2 + n_2 + 8) \end{aligned}$$

y observamos que $T'''(M+N) \neq T'''(M) + T'''(N)$ ⁴, entonces la condición a) **no** se cumple.

¿Qué ocurrirá con $T'''(k.M) = k. T'''(M)$?

$$k.M = k. (m_1; m_2) = (k.m_1; k.m_2)$$

$$T'''(k.M) = T'''((k.m_1; k.m_2)) = (k.m_1 + 2; k.m_2 + 4)$$

$$\begin{aligned} k. T'''(M) &= k. T'''((m_1; m_2)) = k. (m_1 + 2; m_2 + 4) = (k. (m_1 + 2); k. (m_2 + 4)) = \\ &= (k.m_1 + k. 2; k.m_2 + k. 4) \end{aligned}$$

³ El operador suma \oplus se aplica a dos puntos –en este caso del plano– mientras que el operador suma $+$ efectúa la suma entre dos números reales.

Análogamente el producto “ \circ ” opera entre un número real y un punto del plano mientras que “ \cdot ” sólo lo hace entre un par de números reales.

Por *abuso de notación* utilizaremos un único signo $+$ y un único “ \cdot ”

⁴ Es bastante evidente la diferencia pues la primera coordenada es en un caso $m_1 + n_1 + 2$ y en otro $m_1 + n_1 + 4$; sumar 2 unidades a un número $(m_1 + n_1)$ da distinto que sumar 4 unidades. En situaciones menos claras se debe mostrar un *contraejemplo*.

Los dos recuadros no parecen ser iguales pero que no lo parezcan no necesariamente indica que sean diferentes⁵.

Para ver que son diferentes busquemos un contraejemplo⁶.

Si $k=3$ y $M=(1, -1)$, entonces $T'''((1, -1))=(1+2, -1+4)=(3, 3)$

$$3. T'''(M) = 3. (3, 3) = \boxed{(9, 9)}$$

$$3.M = 3. (1, -1) = (3, -3)$$

$$T'''(3.M) = T'''((3, -3)) = (3+2, -3+4) = \boxed{(5, 1)}$$

Los dos recuadros son diferentes y por eso la propiedad no es válida.



Actividad de refuerzo 1

a) Definir la traslación $T_1((x, y))$ sabiendo que $T_1((-2, 5)) = (-4; 1)$. ¿Cuánto vale $T_1((5, -2))$?

¿Existe algún (x, y) tal que $T_1((x, y)) = (x, y)$?

Interprete geoméricamente.

¿Quién (a, b) si $T_1((a, b)) = (1, -1)$?

b) Defina $T_2((x, y))$ tal que si usted aplica T_1 al $(-2, 5)$ y luego T_2 al resultado vuelve a obtener el $(-2, 5)$.

¿Cuánto vale efectuar T_2 al $(-2, 5)$ y luego T_1 ?

¿Y si lo hiciéramos para un punto genérico (x, y) ?

*Comentario: Al aplicar T_1 y luego T_2 se obtiene una **transformación equivalente** denominada **composición $T_2 \circ T_1$** y se lee **T_2 compuesta con T_1** ; notar que la traslación que figura a la derecha es la que se aplica primero.*

I.1.2 Actividad 2: Simetría Central

- Para los siguientes puntos obtener los puntos simétricos respecto al origen de coordenadas O, marcarlos en un sistema de coordenadas cartesiano y completar

$$A = (2; 0) \longrightarrow A_o = (\dots; \dots)$$

$$B = (4; 0) \longrightarrow B_o = (\dots; \dots)$$

$$H = (-2; 5) \longrightarrow H_o = (\dots; \dots)$$

$$I = (-5, 3) \longrightarrow I_o = (\dots; \dots)$$

$$P = (x; y) \longrightarrow P_o = (\dots; \dots)$$

- Grafica el segmento \overline{HI} y comprueba geoméricamente que la simetría realizada lo transforma en otro segmento $\overline{H_o I_o}$.

⁵ Por ejemplo $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ para todo número real α pero a simple vista no lo parece.

⁶ Si existe un ejemplo para el cuál una propiedad no se cumple puede decirse que la propiedad no es válida y el mencionado ejemplo se denomina contraejemplo.

Puede notarse, como ocurre con la traslación, que para cada punto (y en cada caso) la simetría da por resultado un único punto, es decir que *la simetría central también es un tipo de función*.

Analizaremos si la simetría cumple con las dos condiciones presentadas en I.1.1.b.

- a) $S(M+N) = S(M) + S(N)$ para cualquier par de puntos M y N
 b) $S(k.M) = k. S(M)$ para cualquier número k real y cualquier punto M

a) Sabemos que $M+N = (m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1 + n_1 ; m_2 + n_2)$

luego $S(M+N) = S((m_1 + n_1 ; m_2 + n_2)) = (-(m_1 + n_1) ; -(m_2 + n_2)) = (-m_1 - n_1 ; -m_2 - n_2)$

$$S(M+N) = (-m_1 - n_1 ; -m_2 - n_2)$$

como $S(M) = S((m_1, m_2)) = (-m_1, -m_2)$ y $S(N) = S((n_1, n_2)) = (-n_1, -n_2)$

se obtiene $S(M) + S(N) = (-m_1, -m_2) + (-n_1, -n_2) = (-m_1 - n_1 ; -m_2 - n_2)$

$$S(M) + S(N) = (-m_1 - n_1 ; -m_2 - n_2) = S(M+N) \quad \checkmark$$

b) Conociendo $k.M = k.(m_1, m_2) = (k.m_1, k.m_2)$

$$S(k.M) = S((k.m_1, k.m_2)) = (-k.m_1, -k.m_2) = k.(-m_1, -m_2) = k.S(M) \quad \checkmark$$

Resultado importante

I.1.2.a. La simetría central S cumple con las dos condiciones. Representa un ejemplo interesante de un tipo de funciones llamadas **Transformaciones Lineales**.

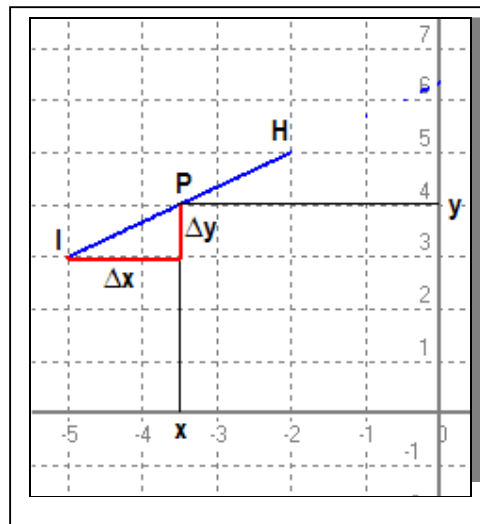
Algunas cuestiones

- Para verificar analíticamente que el transformado del segmento \overline{HI} es $\overline{H_0I_0}$ se nos presentan dos interrogantes:

- ¿Cómo se puede representar matemáticamente el segmento \overline{HI} , que ya no es horizontal como el \overline{AB} de la actividad 1?
- ¿Cómo es que efectivamente todos los puntos intermedios entre H_0 e I_0 están alineados –y forman un segmento–?

Trataremos de responder a la cuestión a)

¿Cuál es la característica esencial de una recta (o de un “trozo” de ella, como ser un segmento)?



Si nos ubicamos en un punto de ella –como ser I– y nos desplazamos hasta encontrar otro –por ejemplo P– debemos hacer un desplazamiento horizontal Δx y uno vertical Δy . Por ejemplo desde I hasta H serán: $\Delta x = 3$, $\Delta y = 2$.

- Si $\Delta x = 1$, marcar en el gráfico Δy e indicá cuál puede ser su valor aproximado.
- Si $\Delta y = 1$, marcar en el gráfico Δx e indicá cuál puede ser su valor aproximado.

Se observa que todos los triángulos obtenidos son semejantes y por lo tanto los desplazamientos *mantendrán una proporción constante*.

Así el cociente:

$$\frac{\text{Desplazamiento Vertical}}{\text{Desplazamiento Horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3} = \text{Constante}$$

Calculamos ahora Δx y Δy para los desplazamientos desde **I** hasta **P**.

$$\Delta y = y - 3; \quad \Delta x = x - (-5) = x + 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3} = \frac{y - 3}{x + 5}$$

- Despeja y de la ecuación anterior y verificá que $y = \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$ [I.1.2.1]

O sea que un punto **P** cualquiera que está en el segmento \overline{HI} , puede escribirse como

$$P = \left(x, \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}\right)$$

Esto significa que elegido x , el valor de **y** **no es** cualquiera sino que es el obtenido con la cuenta indicada.

- Escribe cuál es la restricción para x en el caso del segmento \overline{HI} . ¿Y la restricción para y ?

Para verificar lo obtenido para **P** con los puntos **I** y **H** que son los extremos del segmento.

$$\text{I: } x = -5 \rightarrow y = \frac{2}{3}(-5) + \frac{19}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{H: } x = -2 \rightarrow y = \frac{2}{3}(-2) + \frac{19}{3} = \frac{15}{3} = 5 !!$$

¿Ocurrirá que si $-5 \leq x \leq -2$, los valores de y pertenecen al intervalo $[3; 5]$?

Partimos de $-5 \leq x \leq -2$ y multiplicamos por $\frac{2}{3}$ la doble inecuación;

la desigualdad no cambia pues el factor es positivo $-5 \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}x \leq -2 \cdot \frac{2}{3}$

Sumamos $\frac{19}{3}$ a todo –no se modifica el sentido– $-\frac{10}{3} + \frac{19}{3} \leq \frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \leq -\frac{4}{3} + \frac{19}{3}$

Y obtenemos $3 = \frac{9}{3} \leq \frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \leq \frac{15}{3} = 5$

O sea $3 \leq y \leq 5$ como era esperable !!

Vamos a resolver lo propuesto en b)

Llamamos **S** a la simetría central.

$S(P) = S((x, y)) = (-x, -y)$ [esta debiera ser la expresión obtenida para **P** al comienzo de la actividad 2]

⁷ Parece traerte confusión el 5 sumando, pero tené en cuenta que x está entre -5 y -2 por lo que al sumarle 5 los desplazamientos horizontales estarán entre 0 y 3.

Sea un punto P en el segmento \overline{HI} ; $P = (x, \frac{2}{3}x + \frac{19}{3})$ con $-5 \leq x \leq -2$.

$$S((x, \frac{2}{3}x + \frac{19}{3})) = (-x, -[\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}]) = (-x, \frac{2}{3}(-x) - \frac{19}{3}) \quad [I.1.2.2]$$

Llamemos $\chi = -x$ [o sea a cada valor de x la nueva variable χ la almacena con el valor opuesto].

Como $-5 \leq x \leq -2$, multiplicando por (-1) a la doble desigualdad cambian los sentidos de las mismas,

$$-(-5) \geq -x \geq -(-2) \rightarrow 5 \geq -x \geq 2 \rightarrow 5 \geq \chi \geq 2$$

Resulta que reemplazando en [I.1.2.1] $S(P) = (\chi, \frac{2}{3}\chi - \frac{19}{3})$ con $2 \leq \chi \leq 5$.

Esta expresión es semejante a [I.1.2.1] con un signo de diferencia en $\frac{19}{3}$.



Actividad de refuerzo 2

a) Dado el triángulo ABC con $A = (1, -3)$, $B = (-2, -4)$ y $C = (-5, 4)$ efectuarle la simetría central S respecto al origen.

Graficar ambos triángulos en un mismo sistema de coordenadas.

b) El segmento \overline{AB} se transformó a través de una simetría central en $\overline{A'B'}$.

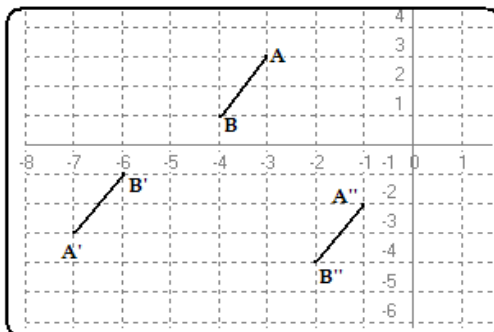
¿Cuál es el centro de simetría?

Además al \overline{AB} mediante una traslación se obtiene $\overline{A''B''}$. Definir la traslación.

c) Sea $T((x, y)) = (x+2, y-1)$.

Efectúele al triángulo ABC la transformación SoT y compruebe que el efecto es diferente al obtenido si hiciera ToS .

Ayúdese gráficamente.

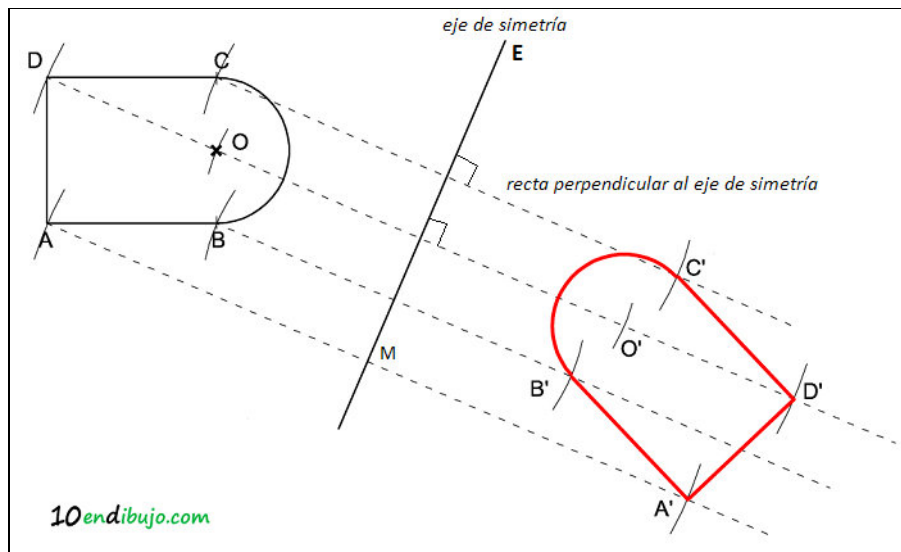


I.1.3 Actividad 3: Simetría Axial

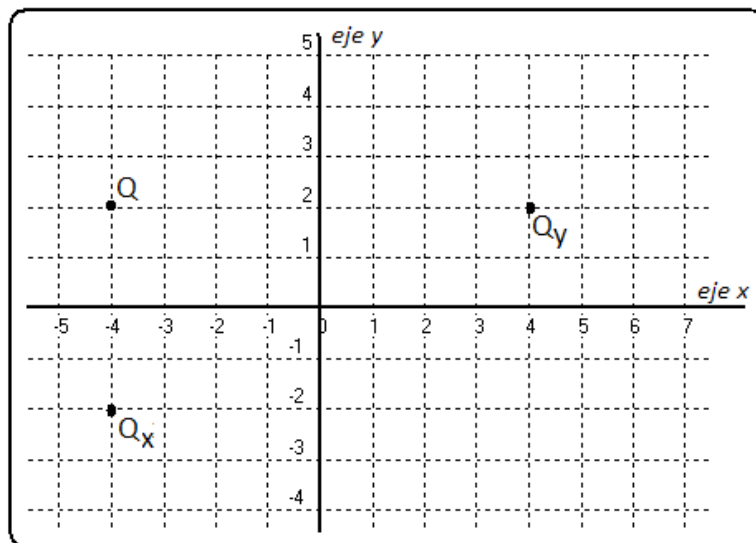
El siguiente esquema muestra la *simetría axial* de la figura⁸ ABCD respecto al eje (de simetría) E.

La imagen (o simétrico) del punto A es A' que se obtiene trazando la recta perpendicular a E que pasa por A y cuya intersección es M; A' se obtiene a una distancia idéntica a AM pero del "otro lado" del eje E (o sea en semiplanos opuestos).

⁸ http://www.10endibujos.com/wp-content/uploads/2014/05/03_simetria-axial.jpg



Nosotros abordaremos las simetrías axiales S_x y S_y según los ejes x e y respectivamente. El dibujo muestra las simetrías axiales para un punto Q . Indiqué las coordenadas del mismo y luego complete la tabla.



Punto	S_x : Simétrico eje x	S_y : Simétrico eje y
$A = (2; 0)$	$A_x = (\quad ; \quad)$	$A_y = (\quad ; \quad)$
$B = (4; 0)$		
$H = (-2; 5)$		
$I = (-5, 3)$		
$P = (x; y)$		

I.1.4 Actividad 4: Rotación

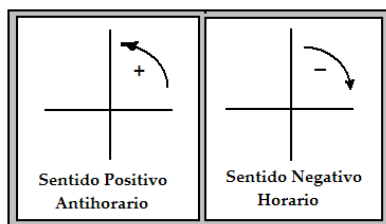
Dados los puntos $A = (2; 0)$ y $B = (4; 0)$, ¿cuáles serán los transformados de éstos al rotarlos desde el punto O –origen de coordenadas– un ángulo de 90° ?

- Dibuja en un sistema de coordenadas y completa:

$$R_{90^\circ}(A) = (.....;.....) \quad R_{90^\circ}(B) = (.....;.....)$$

Hacia dónde girar puede ser un interrogante,

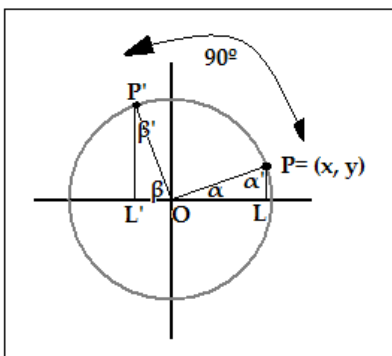
por convención se toma



y al indicar 90° se está admitiendo sentido positivo

- Obtiene, usando la misma rotación, las imágenes de los puntos $K = (x, 0)$ y $J = (0, y)$

$$R_{90^\circ}(K) = (.....;.....) \quad R_{90^\circ}(J) = (.....;.....)$$



- ¿Servirá la respuesta si x e y toman valores negativos?

Veamos qué le pasa a un punto genérico $P = (x, y)$ al aplicarle la rotación.

Usando un gráfico como ayuda, observamos que

$$\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\text{por lo tanto } \alpha + \beta = 90^\circ \quad (\text{I.1.4.1})$$

Además como el triángulo $P'OL'$ es rectángulo en L' resulta que

$$\beta' + \beta = 90^\circ \quad (\text{I.1.4.2})$$

De las ecuaciones (I.1.4.1) y (I.1.4.2) sale que $\alpha = \beta'$

En el triángulo POL vale de modo similar que

$$\alpha + \alpha' = 90^\circ \quad (\text{I.1.4.3}).$$

Y de (I.1.4.1) y (I.1.4.3) obtenemos que $\alpha' = \beta$

Comparando entonces los triángulos POL y $P'OL'$

$$\overline{OP} = \overline{OP'}; \alpha = \beta'; \alpha' = \beta.$$

Por el criterio de congruencia ALA (ángulo-lado-ángulo) se tiene que ambos triángulos son *congruentes*.

De lo anterior resulta que: $\overline{OL} = \overline{P'L'}$; $\overline{PL} = \overline{L'O}$.

Como vale que $\overline{OL} = x$, $\overline{PL} = y$; teniendo en cuenta el signo de las coordenadas de P' resulta que $P' = (-y, x)$.

$$\text{Resumiendo } \boxed{R_{90^\circ}(P) = R_{90^\circ}((x, y)) = (-y, x)} \quad (\text{I.1.4.4})$$

- ¿Servirá la fórmula para puntos de los cuatro cuadrantes y de los cuatro semiejes?
Toma un surtido de puntos y corrobora los resultados.

Recuperamos lo visto en I.1.1.b. adaptándolo a la rotación.

Comprueba que R_{90° satisface ambas propiedades.

O sea [1.1.4.a]:

- a) $R_{90^\circ}(M+N) = R_{90^\circ}(M) + R_{90^\circ}(N)$ para cualquier par de puntos M y N
 b) $R_{90^\circ}(k.M) = k. R_{90^\circ}(M)$ para cualquier número k real y cualquier punto M

1.1.4.b Comentario

Es interesante obtener la expresión conseguida en (I.1.4.4) si supiésemos que R_{90° cumple con [1.1.4.a].

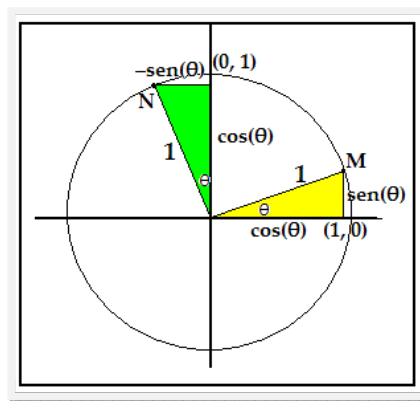
Si fuera el caso tendríamos:

$$\begin{aligned} R_{90^\circ}((x, y)) &= R_{90^\circ}((x, 0) + (0, y)) = && \text{[hemos disociado la suma de puntos en el plano]} \\ &= R_{90^\circ}((x, 0)) + R_{90^\circ}((0, y)) = && \text{[por la propiedad a) en (I.1.4.a)]} \\ &= R_{90^\circ}(x. (1, 0)) + R_{90^\circ}(y. (0, 1)) = && \text{[propiedad b) en I.1.1.a]} \\ &= x.R_{90^\circ}((1, 0)) + y.R_{90^\circ}((0, 1)) = && \text{[propiedad b) en (I.1.4.a)]} \\ &= x.(0, 1) + y.(-1, 0) = && \text{[transformados del (1, 0) y (0, 1)]} \\ &= (0, x) + (-y, 0) = (-y, x) && \text{[propiedad b) en I.1.1.a]} \end{aligned}$$

Observar que **conociendo únicamente** los datos de las rotaciones en dos puntos y que se cumple con [1.1.4.a] fue posible obtener el transformado de la rotación en **cualquier otro punto** del plano.

O sea si quisiéramos saber la rotación del punto (4; -5) lo podemos obtener a partir de lo que le ocurrió al (1; 0) y al (0; 1).

Este hecho *no es casual* y lo retomaremos a lo largo del curso.



Actividad de refuerzo 3

- a) En forma análoga a lo efectuado en el comentario 1.1.3.b obtenga $R_{-90^\circ}((x, y))$.
 b) Qué se obtiene al realizar: (i) R_{90° o R_{90° (ii) R_{-90° o R_{-90°

1.1.4.c Rotación en un ángulo cualquiera

Obtengamos la rotación de un ángulo θ cualquiera, usando el supuesto que R_θ cumple con 1.1.4.a.

El punto (1, 0) se traslada al punto M. Por trigonometría la componente horizontal es el $\cos\theta$ y la vertical $\sin\theta$.

El (0, 1) se desplaza hasta el punto N. Se prueba de manera similar a lo hecho para obtener (I.1.4.4) que los dos triángulos son congruentes y de allí resulta la componente horizontal $(-\sin\theta)$ que apunta hacia los x negativos y la componente vertical $(\cos\theta)$.

Resumiendo

$$R_\theta((1, 0)) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad R_\theta((0, 1)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Obtendremos la rotación de un ángulo θ del punto (x, y) a través de [1.1.4.a].

$$\begin{aligned} R_\theta((x, y)) &= R_\theta((x, 0) + (0, y)) = R_\theta((x, 0)) + R_\theta((0, y)) = R_\theta(x. (1, 0)) + R_\theta(y. (0, 1)) \\ &= x.R_\theta((1, 0)) + y.R_\theta((0, 1)) = x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

$$= (x.\cos\theta, x.\sen\theta) + (-y.\sen\theta, y.\cos\theta) = (x.\cos\theta - y.\sen\theta, x.\sen\theta + y.\cos\theta)$$

$$\mathbf{R}_\theta((x, y)) = (x.\cos\theta - y.\sen\theta, x.\sen\theta + y.\cos\theta)$$

[1.1.4.5]

Cuestiones para analizar

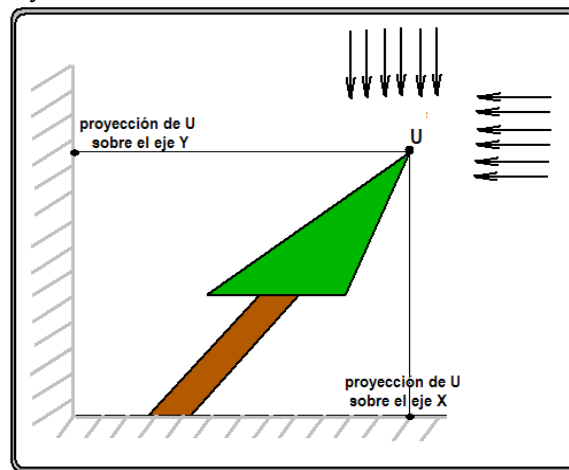
Realizando los gráficos correspondientes, comprueba la fórmula [1.1.4.5]

- para los puntos (0,1), (1,0), (-1,0) y (0, -1) con $\theta_1 = 90^\circ$
- para los puntos $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ con $\theta_2 = 45^\circ$ y $\theta_3 = 225^\circ$.
- para los puntos anteriores con $\theta_4 = -135^\circ$. Comenta qué ocurre que te llame la atención.

I.1.5. Actividad 5: Proyecciones ortogonales

Sean P_x y P_y las proyecciones sobre los ejes x e y de un punto en el plano.

El siguiente esquema te ayudará a refrescar conocimientos:



Teniendo en cuenta lo trabajado en las actividades anteriores, resolver lo siguiente:

Dados los puntos A, B, H, I y Z, márcalos en un gráfico cartesiano, obtené las proyecciones sobre los ejes y completá:

$A = (2; 0)$	\longrightarrow	$P_x(A) = (\dots; \dots)$	$P_y(A) = (\dots; \dots)$
$B = (4; 0)$	\longrightarrow	$P_x(B) = (\dots; \dots)$	$P_y(B) = (\dots; \dots)$
$H = (-2; 5)$	\longrightarrow	$P_x(H) = (\dots; \dots)$	$P_y(H) = (\dots; \dots)$
$I = (-5; 3)$	\longrightarrow	$P_x(I) = (\dots; \dots)$	$P_y(I) = (\dots; \dots)$
$Z = (x; y)$	\longrightarrow	$P_x(Z) = (\dots; \dots)$	$P_y(Z) = (\dots; \dots)$

- Comprueba que tanto P_x como P_y cumple con I.1.1.b.
- Si $Z = (x_z, y_z)$, encuentra la expresión general de $P_x(Z)$ y $P_y(Z)$ de forma análoga a lo realizado en [1.1.4.5].
- Graficar en un sistema de referencia cada proyección.



Actividad de refuerzo 4

Hallar el efecto de realizar al cuadrado ABCD con $A = (-2, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 3)$ y $D = (-1, 4)$ las siguientes transformaciones. Efectuar los gráficos correspondientes.

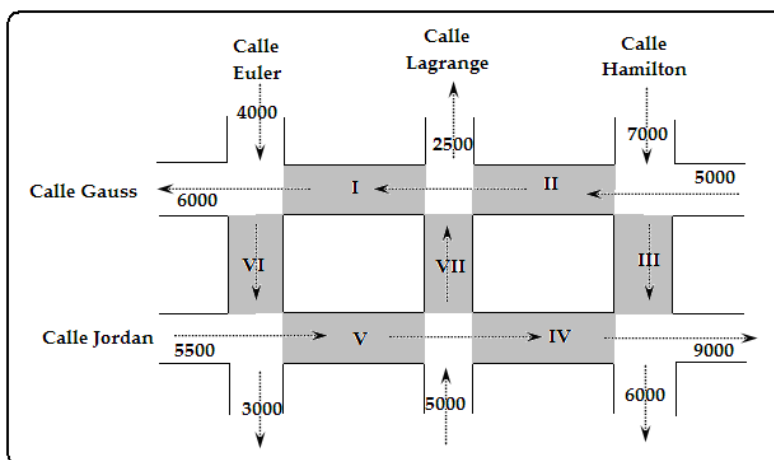
- a) P_x b) P_y c) $P_x \circ P_y$ d) $ToR_{270^\circ} \circ P_y$

I.2. Situaciones vinculadas con otras disciplinas y con la vida real

Te presentamos las siguientes situaciones que se abordarán durante el curso y que te darán un panorama de las potencialidades que del mismo podrás obtener.

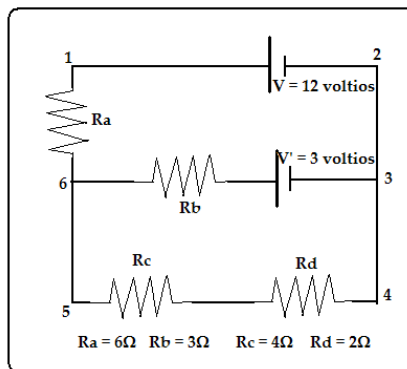
(I.2.1) Tráfico en la ciudad

El esquema muestra el microcentro de la ciudad **Algeln** y se señalan el número de rodados que entraron y salieron de allí en una hora. La intención es encontrar los flujos vehiculares en las cuadras marcadas en gris y numeradas de I a VII.



(I.2.2) Circuitos Eléctricos

En el esquema se muestra un circuito eléctrico con 2 baterías y 4 resistencias. Se busca encontrar las corrientes que circulan entre los puntos 1 y 2, 3 y 6, 5 y 4 y las caídas de tensión que ocurre en cada una de las resistencias.



(I.2.3) Balance en ecuaciones químicas

La formación del hidróxido de aluminio está dada por la ecuación química:

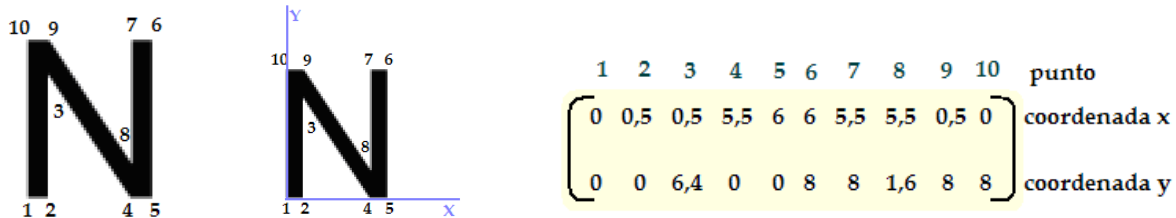


En los casilleros blancos van números naturales que hacen cierta a la ecuación.
¿Cómo hallarlos?

(I.2.4) Tratamiento digital de Imágenes

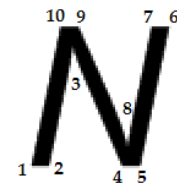
Ya se ha trabajado con cuestiones de traslaciones, simetrías, rotaciones y proyecciones que son útiles en el tratamiento de imágenes. Para un abordaje más profundo se utilizará el concepto de matriz.

Un ejemplo introductorio es el siguiente. Una letra N puede “señalizarse” del siguiente modo (a continuación se ha marcado un sistema de coordenadas):



El corchete con los valores distribuidos allí forman *una matriz de datos* (de 2 filas y 10 columnas, en este caso).

Se verá en su momento que otra matriz como $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de 2 filas y 2 columnas o de 2x2) al multiplicarla modifica a la letra N así:



(I.2.5) Modelo de Leontief

“El Modelo Input-Output es un modelo económico desarrollado por Wassily Leontief (1905-1999) por el que obtuvo un Premio Nobel en el año 1973. A menudo es denominado como modelo de Leontief.

El propósito fundamental del modelo IO es analizar la interdependencia de industrias en una economía. El modelo viene a mostrar como las salidas de una industria (outputs) son las entradas de otra (inputs), mostrando una interrelación entre ellas. En la actualidad es uno de los modelos económicos más empleados en economía.”⁹

“El modelo desarrollado por Wassily Leontief, es una aplicación interesante de las *matrices*, que fue útil para pronosticar los efectos en los cambios de precios o las variaciones de las erogaciones gubernamentales sobre la economía.”¹⁰



(I.2.6) Criptografía

Compartimos el siguiente texto desde Wikipedia¹¹:

“**Criptografía** (del griego κρύπτω *krypto*, «oculto», y γράφω *graphos*, «escribir», literalmente «escritura oculta») tradicionalmente se ha definido como la parte de la criptología que se ocupa de

⁹ http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Input-Output

¹⁰ josebarrotroncoso.weebly.com/uploads/6/.../aplicacin_de_las_matrices.pdf; Aplicación de las Matrices Modelos de Entrada-Salida de... por José F. Barros Troncoso.

En el siguiente video hay un ejemplo que utiliza elementos de nuestra materia (y de Álgebra y Geometría II) <http://video.dainutekstai.lt/w.php?a=Ktl7o0EwNDw>.

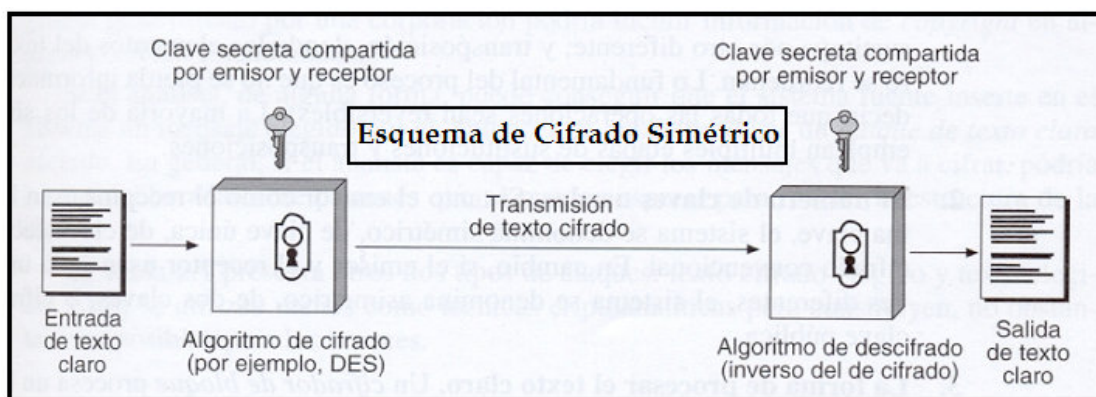
¹¹ <http://es.wikipedia.org/wiki/Criptografía>

las técnicas, bien sea aplicadas al arte o la ciencia, que alteran las representaciones lingüísticas de mensajes, mediante técnicas de cifrado o codificado, para hacerlos ininteligibles a intrusos (lectores no autorizados) que intercepten esos mensajes. Por tanto el único objetivo de la criptografía era conseguir la **confidencialidad** de los mensajes. Para ello se diseñaban sistemas de cifrado y códigos. En esos tiempos la única criptografía que había era la llamada **criptografía clásica**.

La aparición de la Informática y el uso masivo de las comunicaciones digitales han producido un número creciente de problemas de seguridad. Las transacciones que se realizan a través de la red pueden ser interceptadas. La seguridad de esta información debe garantizarse. Este desafío ha generalizado los objetivos de la criptografía para ser la parte de la criptología que se encarga del estudio de los algoritmos, protocolos (se les llama protocolos criptográficos) y sistemas que se utilizan para proteger la información y dotar de seguridad a las comunicaciones y a las entidades que se comunican.

Para ello los criptógrafos investigan, desarrollan y aprovechan técnicas matemáticas que les sirven como herramientas para conseguir sus objetivos. Los grandes avances que se han producido en el mundo de la criptografía han sido posibles gracias a los grandes avances que se han producido en el campo de las matemáticas y la informática.”

Un esquema básico es el siguiente¹²:



Con el uso de *matrices* y sus operaciones presentaremos un esquema sencillo de cómo encriptar información.

(I.2.7) Movimientos poblacionales

En la ciudad Algeln la población era en 2010 de 20 mil habitantes y en los alrededores de 5 mil. Durante ese año resultó que la probabilidad que una persona se quedara en la ciudad fue de 0,92 (y por lo tanto de 0,08 de que emigrara a las afueras), mientras que el 98% de las personas de los alrededores optaron por permanecer allí.

Encontrar las poblaciones luego de uno, diez y veinte años.

¿Existe una situación de equilibrio?

¹² www.matem.unam.mx/~rajsbaum/cursos/.../presentacion_seguridad_1.pdf; Criptografía- Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Actividades para resolver

1) Se tiene el rectángulo ABCD con $A = (3; 2)$, $B = (-3; 2)$, $C = (-3; -4)$ y $D = (3; -4)$.

a) Al rectángulo aplique cada una de las siguientes transformaciones. Dibuje en cada caso el original y su transformado. Explique con *sus palabras* qué ocurre con la figura original.

$$T_1((x, y)) = (3x, y) \quad T_2((x, y)) = (\frac{1}{3}x, y) \quad T_3((x, y)) = (x, 2y) \quad T_4((x, y)) = (x, \frac{1}{2}y)$$

$$T_5((x, y)) = (-x, y) \quad T_6((x, y)) = (x, -y) \quad T_7((x, y)) = (4x, \frac{3}{2}y) \quad T_8((x, y)) = (-4x, \frac{3}{2}y)$$

$$T_9((x, y)) = (y, x)$$

2) Si T es una transformación del plano en sí mismo que cumple con $T(A+B) = T(A) + T(B)$ y $T(k.A) = k.T(A)$ para todo punto A, B del plano y $k \in \mathbb{R}$, obtener $T((x, y))$ si $T((1; 0)) = (1; 1)$ y $T((0; 1)) = (1; -1)$.

Obtenga la imagen por T del triángulo de vértices $(1; 5)$, $(1; 9)$ y $(5; 7)$.

3) Sea $T((x; y))$ una traslación de la cual sabemos que $T((1; -4)) = (-1; 1)$.

Determine $T((2; -2))$ y el punto A que cumpla con $T(A) = (-4; 1)$.

4) Encuentre los transformados de $M = (1; 0)$ y $N = (0; 1)$ – M' y N' respectivamente– por una rotación de 270° .

Usando M, N, M' y N' establezca la expresión de $R((x; y))$.

Demuestre que R cumple con $R(U+V) = R(U) + R(V)$ y $R(c.U) = c.R(U)$ siendo $U = (u_x; u_y)$, $V = (v_x; v_y) \wedge c \in \mathbb{R}$.

4) ¿Qué obtiene al proyectar sobre el *eje x* al triángulo de vértices $J = (-3; -2)$, $K = (1; 4)$ y $L = (5; -1)$?

Justifique; grafique JKL y su transformado.

Nota: en el apéndice (II.18.2) se encuentra la actividad **Desafío 1**.

Unidad II: La Geometría y el Álgebra Lineal en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

En esta segunda unidad se trabajará sobre puntos en el plano y el espacio, los sistemas de ecuaciones lineales con dos y más incógnitas; vectores, combinación lineal, matrices y transformación lineal.

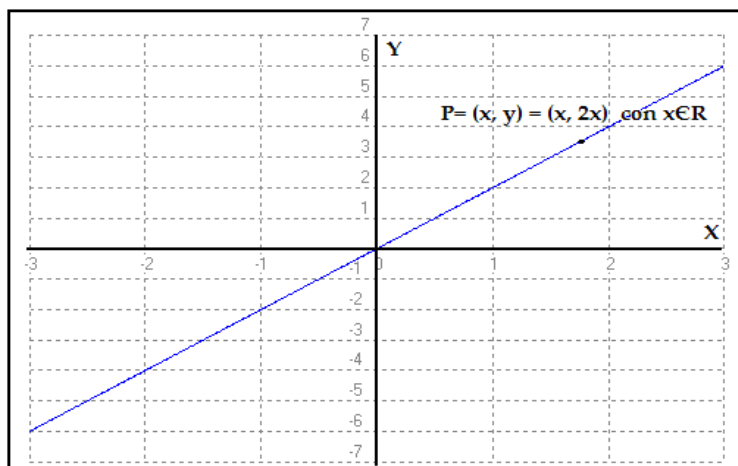
En lo posible, se intentará arribar a los nuevos conceptos de una forma simple y clara pero sin menoscabar su rigurosidad.

II.1. Los puntos y vectores en el plano (\mathbb{R}^2)

Introducción

Como hemos visto en la unidad anterior, el análisis de una figura geométrica se ve facilitado por la introducción de un sistema de coordenadas, lo que produce la aparición de fórmulas que no son **solamente** propias de esa figura sino que dependen del sistema de referencia elegido.

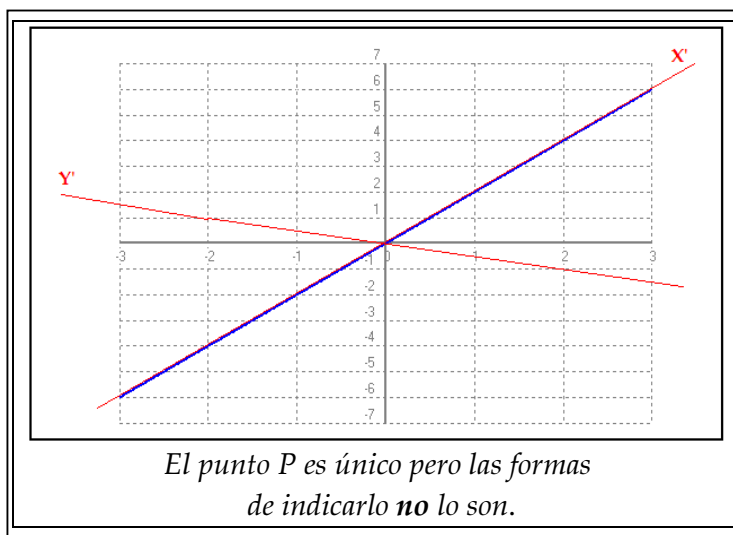
Por ejemplo la ecuación de la recta $y = 2x$ en el sistema (X, Y) toma la siguiente forma¹³ y un punto P cualquiera que pertenece a la recta toma la forma $(x, 2x)$.



Si el sistema de referencia fuera el X' e Y' –con X' coincidente con la recta graficada en el esquema precedente–,

¿cómo serían las coordenadas (x', y') de cualquier punto que pertenezca a la recta?

Aparece la necesidad de distinguir en cada situación cuáles son las propiedades inherentes a la figura de estudio



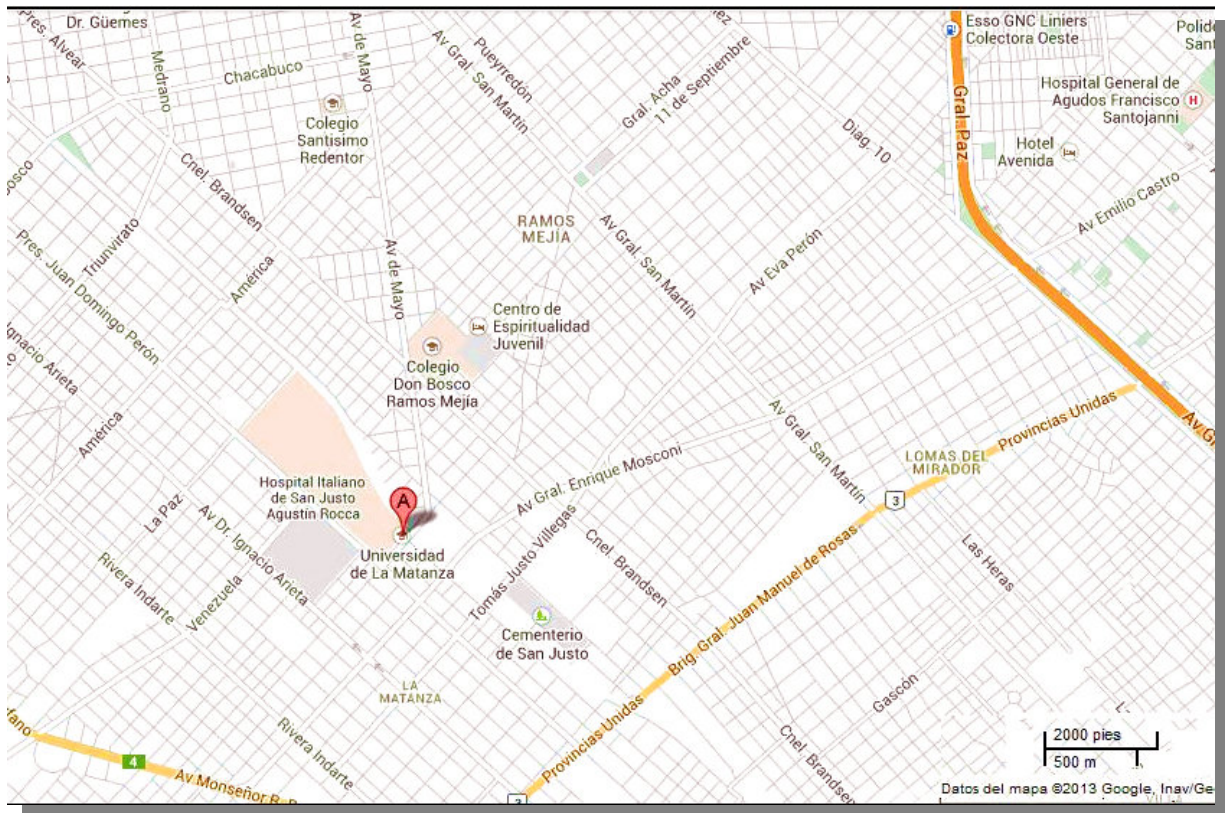
¹³ Ya sea por una tabla o utilizando la pendiente y ordenada al origen de la recta.

y cuáles las accesorias –producto del método analítico utilizado–.

El cálculo vectorial y el tensorial responden a esa necesidad y aunque en ellos se utilizan diferentes sistemas de coordenadas, las reglas operatorias son tales que independizan sus propiedades del sistema utilizado; es decir sus operaciones y resultados son invariables ante el cambio de coordenadas.

Actividad 1

En el siguiente mapa se muestra la Universidad Nacional de La Matanza y sus alrededores



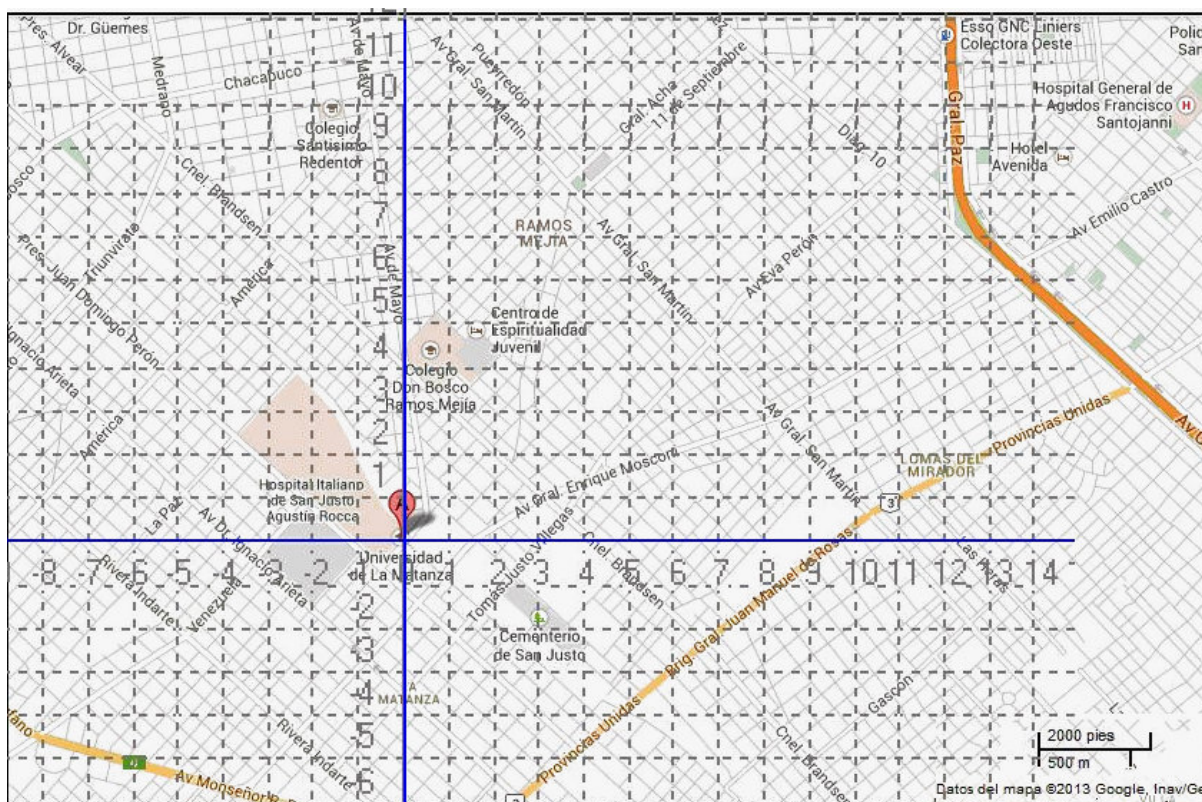
I) Supongamos que la persona A se encuentre en la entrada de la Universidad (U) y quiere dirigirse a la ESSO GNC Liniers – Colectora Oeste (E).

- ¿Cuál es la distancia estimada que los separa?
- ¿Cómo debiera ser la indicación para ir en Globo Aerostático desde U a E?

II.1.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Seguramente la parte b) de la actividad ha precisado de la introducción de un sistema de coordenadas y de la necesidad de indicar allí cuál es la posición del punto final E o la de introducir un *vector posición* que indique en qué sentido y dirección debiera moverse el globo para llegar a destino.

Podemos proceder del siguiente modo “cuadriculando el mapa”:



- ¿Cuál es la posición E?
- Dibuja el **vector** que va desde U a E.

Este ejemplo muestra la necesidad de introducir cantidades (que se denominan *magnitudes*) que tuvieron características esencialmente diferentes. En la actividad 1.I-a se tiene una *magnitud escalar*. La respuesta está completamente caracterizada a través de un número real (la intensidad de lo medido) y la unidad de medida (en este caso el metro¹⁴). Ejemplos de este tipo de magnitud son la longitud, densidad, temperatura, energía, presión, trabajo mecánico.

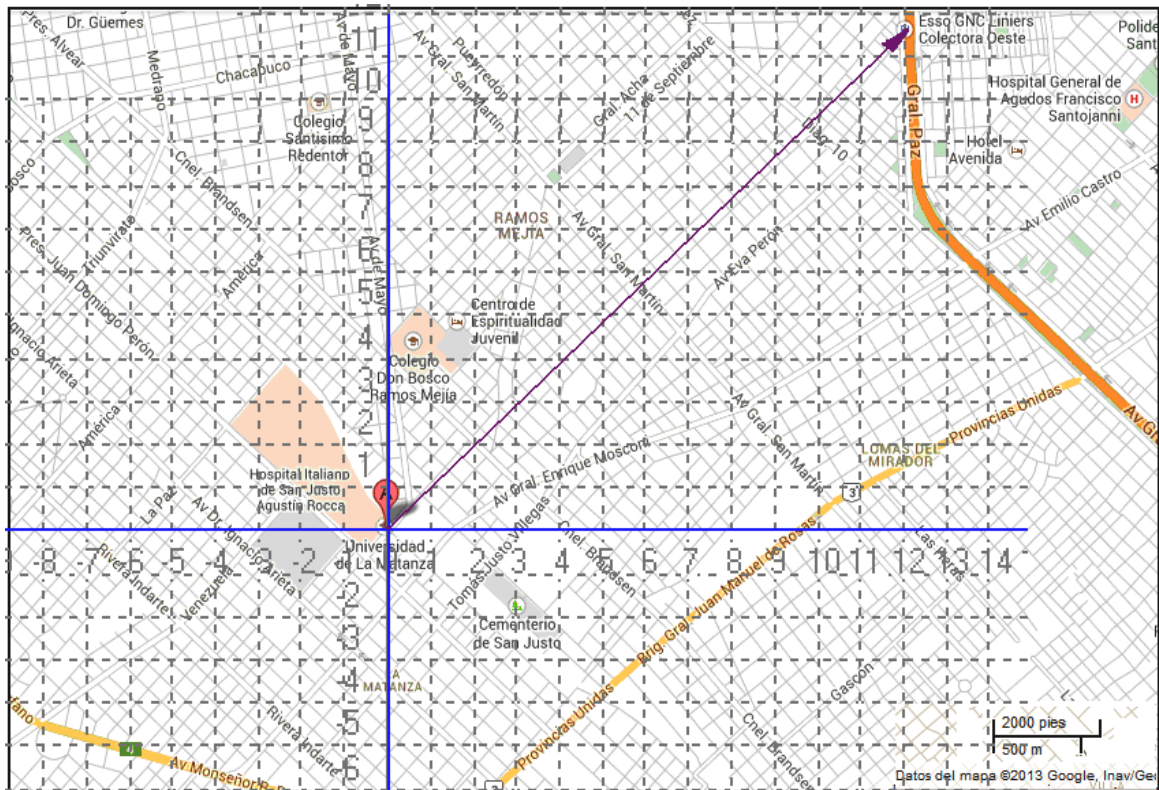
En la situación 1.I-b fueron necesarios tres elementos adicionales. Aparte de la unidad e intensidad se debe dar la recta de acción donde se encuentra la *magnitud vectorial*, el sentido sobre dicha recta y el punto de aplicación dónde se haya aplicado. Esta magnitud recibe el nombre de **vector**.

En Física abundan los ejemplos de magnitudes vectoriales¹⁵: la posición, velocidad, aceleración, cantidad de movimiento, fuerza e intensidad del campo eléctrico, entre otros. Cada magnitud vectorial tiene una representación analítica que en ciertas situaciones tiene correlato geométrico (sólo en una, dos o tres dimensiones) y allí se lo puede representar.

¹⁴ En nuestro caso se trató de una medición indirecta. A partir de cm de nuestro *plano* hicimos la equivalencia a metros. Notar que parece que no hicimos ninguna suposición física en dicha conversión pero sí. ¿Podría indicar cual es?

¹⁵ Existe un tercer tipo de magnitud: la tensorial cuyo representante es el **tensor**. Las mismas van más allá de nuestro curso. Ejemplos de ella son las tensiones internas en cada punto de un cuerpo rígido según la dirección en que se efectúe la fuerza tensionante, la densidad de corriente y el campo electromagnético.

En nuestra actividad 1 tendríamos



El **vector posición** dibujado es la representación geométrica mientras su representación en el sistema de coordenadas dibujado es (12; 11,6). El punto E en el plano está pensado como un vector que comienza en el (0; 0) –origen de coordenadas O- y termina en E.

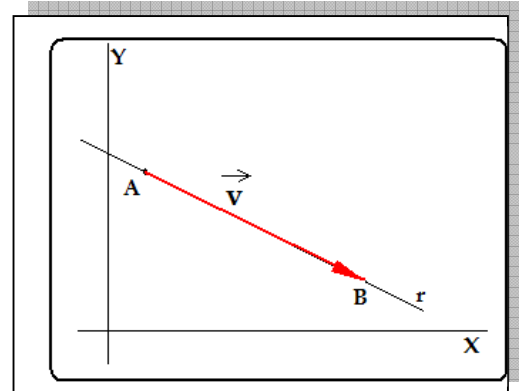
II.1.2 Vectores en R^2

Trabajando en la recta, el plano o el espacio podemos tener una representación geométrica del vector.

El vector \vec{v} está sobre la recta r , su punto de aplicación – origen- es A y su sentido es uno de los dos posibles desde A (en este caso hacia abajo). El tamaño de la representación tendrá correlación con la intensidad –o módulo- del vector.

El vector \vec{v} también puede denominarse como \overrightarrow{AB} .

El orden es fundamental en la escritura: de izquierda a derecha, del origen a su punto final.

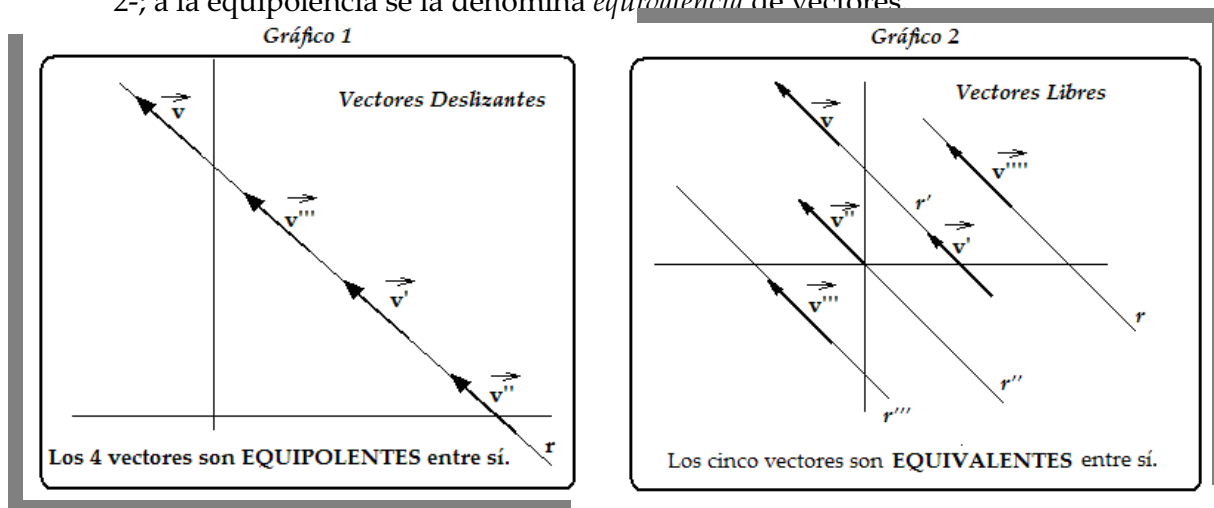


En Física aparecen diferentes tipos de vectores:

- los vectores *fijos* que son los ya tratados;
- los vectores *deslizantes* donde no es necesario precisar el punto de aplicación sobre la recta r ; llamaremos *equipolentes* a todos los vectores con igual tamaño, sobre la misma recta r y con igual sentido¹⁶ -observar el gráfico 1-

¹⁶ A los fines de nuestros cálculos –operaciones- la equipolencia implica la igualdad de efectos –resultados-.

- los vectores *libres* que son los que permiten la equipolencia con aquellos otros que tienen rectas de apoyo paralelas, tienen igual intensidad e igual sentido –ver gráfico 2-; a la equipolencia se la denomina *equivalencia* de vectores



A partir de ahora nuestro estudio se enfocará sobre los **vectores libres**.

La *definición geométrica* de estos vectores es la del conjunto de todos los segmentos orientados de recta equivalentes a un segmento de recta de ese conjunto, llamado *representación* del vector.

En particular elegiremos como representante al vector equivalente con origen en el punto $O = (0; 0)$ del sistema de referencia. En el gráfico 2 el representante es \vec{v}' .

A continuación se hará la presentación de la *definición algebraica* y de las *propiedades* de los vectores en el plano (\mathbb{R}^2) y en más adelante se generalizará lo aprendido.

En \mathbb{R}^2 un vector es un par ordenado de números reales que representa al extremo del vector respecto a un sistema de referencia (O, X, Y); el vector será $\vec{v} = (v_x; v_y)$ donde v_x es la componente sobre la dirección X y v_y es la componente sobre la dirección Y . Si los ejes X e Y son perpendiculares las componentes son las *proyecciones ortogonales*.

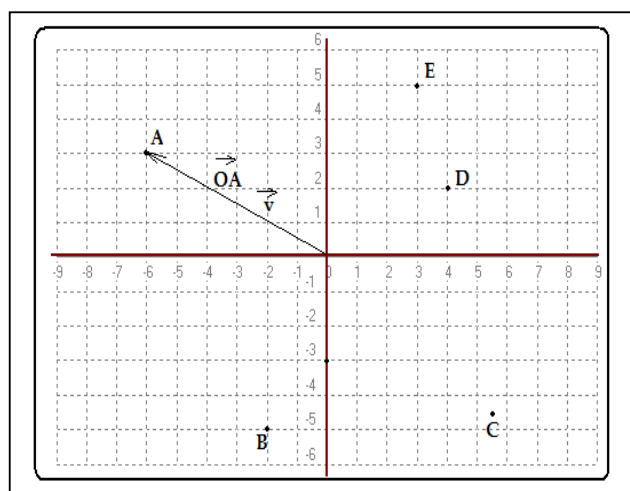
El punto $O = (0; 0)$ representa al origen de coordenadas pero al mismo tiempo al *vector nulo*.

Actividad 2

El vector \vec{OA} representado es el $(-6; 3)$.

Se pide:

- Dar las coordenadas de los demás vectores con origen en O y extremo final en el punto marcado.
- Obtener los simétricos de a) según el origen, el eje X y eje Y respectivamente (S_o, S_x, S_y).
- Dibujar el vector \vec{HG} con $G = (-2; -1)$ y $H = (4; -3)$.



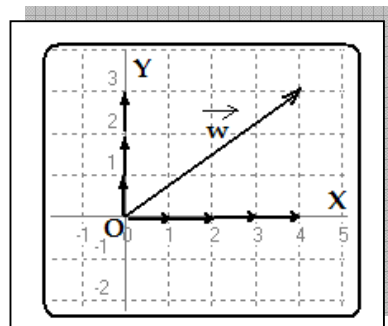
d) Dibujar e indicar a qué vector \vec{w} con origen en O, es equivalente el vector \overrightarrow{HG}

Comentario

Tomemos un vector como el (4; 3)

A partir de lo trabajado en la unidad 1, el mismo puede pensarse como 4. (1; 0) + 3. (0; 1)

A los vectores *unitarios* –de tamaño 1- que están en la dirección de los ejes X e Y se los llama *versores* \hat{i} y \hat{j} .

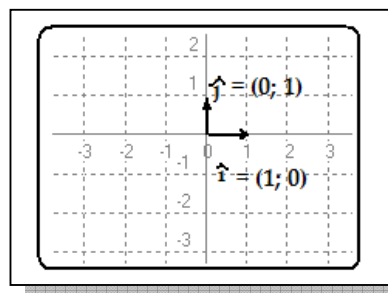


II.1.3 Operaciones y propiedades de los vectores

Igualdad entre vectores

Dos vectores \vec{v} , \vec{w} son iguales si sus respectivas componentes lo son.

O sea si $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y $\vec{w} = (w_x; w_y)$ y además $\vec{v} = \vec{w}$ debe ocurrir que $v_x = w_x$ y $v_y = w_y$.



- Hallar k real para que suceda que $\vec{v} = \vec{w}$ si $\vec{v} = (k^2; 2k + 3)$ y $\vec{w} = (4; 1 + k)$.

Suma de vectores

Definimos la suma + entre vectores de R^2 del siguiente modo:

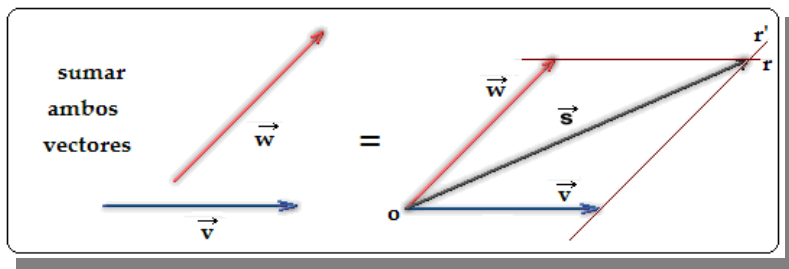
$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = (v_x; v_y) + (w_x; w_y) = (v_x + w_x; v_y + w_y) \text{ con } v_x, v_y, w_x \text{ y } w_y \text{ números reales.}$$

Notar que la suma da un nuevo vector pues al sumar v_x con w_x y v_y con w_y obtenemos nuevamente números reales.

Se dice que + es una ley de *composición interna* en R^2 o que la suma entre vectores es *cerrada*.

Geométricamente la suma se obtiene a través del *método del paralelogramo*:

Se traslada a un origen común ambos vectores y luego se traza por los extremos de cada vector una recta paralela al otro formándose un paralelogramo. La diagonal principal forma el vector suma resultante.



Dados los vectores \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{TS} con $M=(0; 2)$, $N=(-2; -1)$; $S=(4; -1)$ y $T=(2; 1)$ obtener analítica y gráficamente el vector $\vec{r} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{TS}$

Revisamos a continuación algunas **propiedades**:

1) ¿Es la suma de vectores **asociativa**?

Debe valer que para cualquier terna de vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} resulte que

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= [(u_x; u_y) + (v_x; v_y)] + (w_x; w_y) =_1 (u_x + v_x; u_y + v_y) + (w_x; w_y) \\ &= ((u_x + v_x) + w_x; (u_y + v_y) + w_y) =_2 (u_x + v_x + w_x; u_y + v_y + w_y) \quad [3] \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de suma de vectores (1) y suma de números reales (2)

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (u_x; u_y) + [(v_x; v_y) + (w_x; w_y)] =_1 (u_x; u_y) + (v_x + w_x; v_y + w_y) \\ &= (u_x + (v_x + w_x); u_y + (v_y + w_y)) =_2 (u_x + v_x + w_x; u_y + v_y + w_y) \quad [4] \end{aligned}$$

Como en [3] y [4] coinciden las expresiones se cumple con $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

▪ Probar que valen las siguientes propiedades: **conmutatividad**, la **existencia del elemento neutro** – vector nulo- y la existencia del **elemento opuesto**.

2) Para todo \vec{v} y \vec{w} resulta que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$. [conmutatividad]

3) Existe un elemento $\vec{O} = (0;0)$ tal que para todo vector \vec{v} resulte que $\vec{O} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{O} = \vec{v}$.
[elemento neutro]

4) Cada vector \vec{v} tiene un vector –inverso aditivo u opuesto- denotado $-\vec{v}$ tal que
 $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{O}$ [elemento inverso respecto a la suma]

Nota: El vector nulo es un vector de características particulares: su intensidad (módulo) es cero pero carece de dirección (recta donde se encuentra –tiene infinitas opciones-) y de sentido.

Producto de un vector por un escalar

Dado $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el producto de α por \vec{v} como un nuevo vector $\overrightarrow{\alpha \cdot v}$ donde

$$\overrightarrow{\alpha \cdot v} = \alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (v_x; v_y) = (\alpha \cdot v_x; \alpha \cdot v_y)$$

como tanto v_x , v_y y $\alpha \in \mathbb{R}$, resulta que las componentes $\alpha \cdot v_x$ y $\alpha \cdot v_y$ son también números reales y tenemos por resultado un vector de \mathbb{R}^2 .

Al relacionar dos conjuntos (\mathbb{R} y \mathbb{R}^2) se trata de una ley de composición externa de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

▪ Sea $A = (2; 4)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

a) Graficar \vec{v} .

b) Obtener analíticamente $\vec{w} = 2 \cdot \vec{v}$ y $\vec{u} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ y graficarlos.

c) ¿Qué ocurre con el sentido de \vec{v} si se lo multiplica por un número positivo?
¿Y por uno negativo?

d) ¿Qué sucede con el tamaño si se lo multiplica por un número de valor absoluto mayor que uno? ¿Y entre 0 y 1?

• La operación producto por un escalar tiene las siguientes propiedades que **deben probarse**:

1) $\forall \alpha, \beta \in R \wedge \forall \vec{v} \in R^2$ resulta que $\alpha.(\beta. \vec{v}) = (\alpha. \beta). \vec{v}$ [asociativa mixta]

2) $\forall \alpha, \beta \in R \wedge \forall \vec{v} \in R^2 \Rightarrow (\alpha + \beta). \vec{v} = \alpha. \vec{v} + \beta. \vec{v}$ [producto distributivo respecto a la suma]

II.1.3.1 Comentario

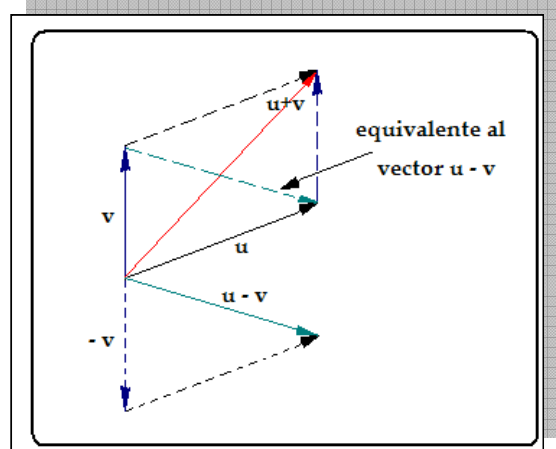
Si se tiene un conjunto **A** con la estructura de cuerpo¹⁷ (como los reales) y otro **V** (por ejemplo R^2) y definimos las operaciones $+$ y \cdot como lo hicimos recién; si además ambas operaciones son cerradas y cumplen las ocho propiedades se dice que **V** es un *espacio vectorial sobre A*. En nuestro ejemplo es R^2 un espacio vectorial sobre R (también se lo llama espacio vectorial real).

Nota

La resta de vectores puede considerarse una combinación de las dos operaciones indicadas:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(\overrightarrow{-v} \right).$$

En el esquema se observan los vectores *suma* y *resta*. Dados **u** y **v**, la diagonal principal del paralelogramo que forman da el vector suma; la otra diagonal da el vector resta siendo la orientación desde el *sustraendo* al *minuendo*.



Actividad de refuerzo 5

Un atleta recorre el circuito ABCDEF. Si parte de $A=(1; 3)$ y luego se desplaza según los vectores $\vec{v}_1 = (-1; -2)$, $\vec{v}_2 = (-3; 3)$, $\vec{v}_3 = (-1; -6)$; $\vec{v}_4 = (6; 2)$ y $\vec{v}_5 = (-1; 3)$.

Halle la coordenadas de las postas B, C, D, E y F. Grafique.

¿Qué vector representa un desplazamiento directo de A a F?

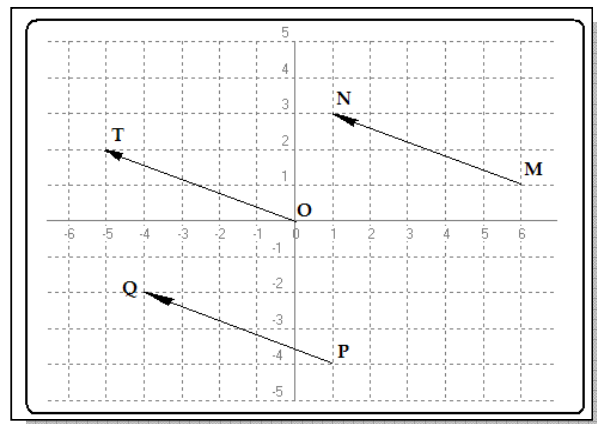
II.1.4 Equivalencia de vectores

Por lo anterior podemos definir que dos vectores son *equivalentes* si trasladados al origen son iguales.

O sea \overrightarrow{MN} es equivalente a \overrightarrow{PQ}

si $N-M = Q-P$.

La resta nos lleva a un punto del plano **T** tal que \overrightarrow{OT} sea equivalente a \overrightarrow{MN} .



¹⁷ Queda como tarea la investigación de este concepto.

▪ Para el esquema:

- Indicar las coordenadas de M, N, P, Q y T.
- Comprobar que se cumple la equivalencia.
- Si $E = (-1; -1)$, obtener F tal que \overrightarrow{EF} sea equivalente a \overrightarrow{PM} . Graficar ambos vectores.
- Dados los vectores \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{TS} con $M = (0; 2)$, $N = (-2; -1)$, $S = (4; -1)$ y $T = (2; 1)$ hallar analítica y gráficamente el vector $\vec{s} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{TS}$

Actividad 3

Dados los puntos $S = (1; 2)$, $T = (-5; 1)$, $U = (-3; -3)$.

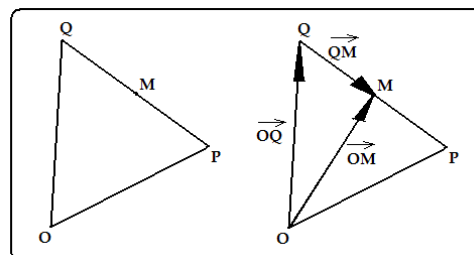
- Obtener analítica y gráficamente L tal que:

$$\overrightarrow{OL} = 2 \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OU}$$

- Conseguir tres puntos N, N' y N'' tal que cada uno de ellos con S, T y U formen un paralelogramo (recuerde la propiedad de la suma).

- Si $P = (p_x, p_y)$ y $Q = (q_x, q_y)$ demuestre que el punto medio M del segmento PQ se obtiene efectuando $M = \frac{1}{2} \cdot (P + Q)$.

Ayuda: trabajar con el gráfico anexo al comienzo de la actividad.



II.1.5 Paralelismo entre vectores

- Elegir un vector $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y considerar los diferentes vectores \vec{w} que se obtienen haciendo $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}$

Tomando -por ejemplo- $\alpha = 2$, $\alpha = -3$, $\alpha = \frac{1}{3}$ dar los tres vectores \vec{w} ($\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$) colineales con \vec{v} y que tendrán igual o diferente sentido según sea el signo de α .

Si se piensa un poco la situación nos da la idea de cómo ver si los vectores \overrightarrow{MN} y \overrightarrow{PQ} son paralelos.

Para empezar es razonable que los cuatro puntos estén dispersos en el plano y una manera de compararlos es conseguir vectores equivalentes a ambos pero que tengan un origen en común.

- ¿Cuál punto parece el más adecuado?
- ¿Cómo conseguir vectores equivalentes pero con punto de inicio en dicho punto?
- Estando allí, ¿qué característica debieran tener los vectores para que resulten paralelos?

Actividad 4

- Si $M = (5; -2)$, $N = (3; 1)$, $P = (4; 0)$ y $Q = (-2; 9)$ compruebe que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{PQ}$.
- Obtenga T tal que $\overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{TN}$ y tengan sentidos contrarios.
- Dados $\vec{v} = (1 - \beta; \beta + 2)$ y $\vec{w} = (2, -\beta)$.

Hallar los valores de β reales para que \vec{v} y \vec{w} sean paralelos.

Expresar ambos vectores e indicar si conservan (o no) el sentido.

II.1.6 Longitud o norma de un vector

Si $\vec{v} = (v_x; v_y)$ se puede obtener su longitud que anotamos $\|\vec{v}\|$ utilizando el Teorema de Pitágoras.

Tomando en cuenta el esquema, en el triángulo inferior la hipotenusa toma valor $\|\vec{v}\|$ y los catetos $|v_x|$ y $|v_y|$, donde las barras indican valor absoluto de un número real (¿porqué deben usarse?).

Se tiene $\|\vec{v}\|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2$; como $|v_x|^2 = (v_x)^2$ y $|v_y|^2 = (v_y)^2$ despejando queda:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Por ejemplo para $\vec{v} = (3; 3\sqrt{3})$ resulta que $\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+9\cdot 3} = \sqrt{36} = 6$;

$$\text{si } \vec{w} = (-2; -5) \text{ es } \|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}.$$

Se puede observar que $\vec{v} = (3; 3\sqrt{3}) = 3 \cdot (1; \sqrt{3}) = 3\vec{u}$ y es razonable esperar que las longitudes de \vec{v} y \vec{u} sea una el triple de la otra.

Efectivamente $\|\vec{u}\| = \|(1; \sqrt{3})\| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; resulta que $6 = 3 \cdot 2$ como se estimaba.

Actividad 5

a) Si $\vec{v} = (-5; 0)$ y $\vec{u} = (4; -3)$ calcular las normas de los vectores \vec{u} , \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

b) ¿Cómo haría para hallar la longitud de un vector \overrightarrow{MN} conociendo M y N?

Aplicarlo con M= (5; -2) y N= (3; 1).

c) ¿Cuáles son los valores de x reales para que la distancia de A a B sea 10 sabiendo que A=(x-4; -3) y B= (x+4; x-2)?

d) Obtenga el perímetro del cuadrilátero RSTU si R= (1; 0), S= (4; 4), T= (-5; 4) y U= (0; -8).

e) ¿Cómo obtener un vector de tamaño uno –llamado *unitario*- que sea paralelo a otro no nulo que se haya dado?

Ayudarse con $\vec{v} = (5; -12)$ –comprobar el resultado- pero no olvide de generalizarlo para cualquier vector (x, y) no nulo..

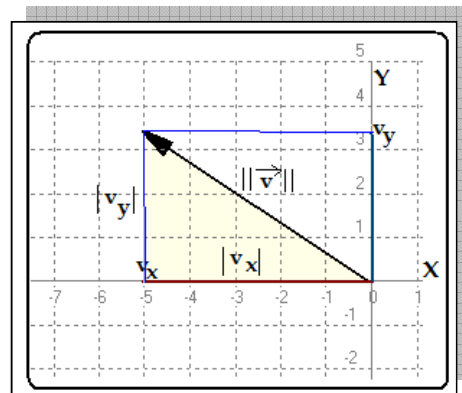
f) Explique por qué resulta que la norma de cualquier vector no nulo es mayor que cero.

g) Demuestre que $\forall \vec{v}$ de \mathbb{R}^2 y $c \in \mathbb{R}$ vale $\|c \cdot \vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$.

h) Explique con sus palabras qué interpreta con la siguiente relación¹⁸:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \text{ vectores del plano vale } \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Nota: ayúdese con un gráfico cartesiano.



¹⁸ Se denomina *Desigualdad triangular*.



Actividad de refuerzo 6

- A = (2; -3), B = (1; -1) y C = (-1; 0). Hallar D si $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$
- Construir todos los \vec{w} paralelos a $\vec{v} = (-4; 3)$ de longitud 1 e igual sentido.
- Hallar \vec{u} tal que sea paralelo a $\vec{v} = (-4; 3)$ y de longitud 2. ¿Cuántos existen?
- ¿Qué puntos C = (x; 1) forman un triángulo ABC equilátero con A = (0; 0) y B = (0; 2)? Corrobore geoméricamente su respuesta.
- Dados M = (-1; -5), N = (3; -2), P = (1; 1). Obtener Q tal que MNPQ sea un paralelogramo (en ese orden; ayúdese con un esquema). Verifique que con el Q obtenido es efectivamente un paralelogramo. ¿Cuál es su perímetro?

II.2 Recta por y fuera del origen en el plano.

Dado un vector no nulo $\vec{v} = (v_x; v_y)$ que llamamos **vector director** consideramos los vectores que se obtienen al multiplicar a \vec{v} por cualquier valor real α .

O sea $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}$; $\vec{w} = \alpha \cdot (v_x; v_y) = (\alpha \cdot v_x; \alpha \cdot v_y)$

En el gráfico se han marcado diferentes puntos que son los extremos de los respectivos vectores \vec{w} ; el tomar todos los valores posibles de α produce la recta **R** graficada.

¿Qué ocurriría si pretendemos obtener todos los $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \vec{P}$

con $P = (p_x, p_y)$ un punto del plano (y que podemos pensar como)?

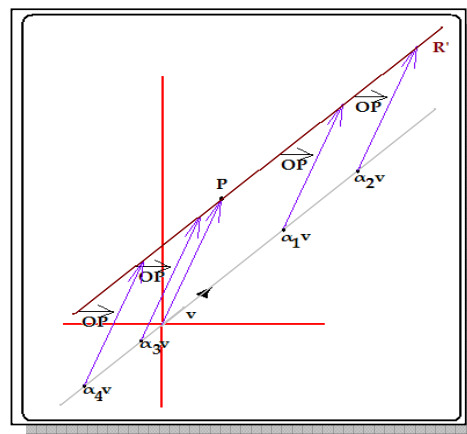
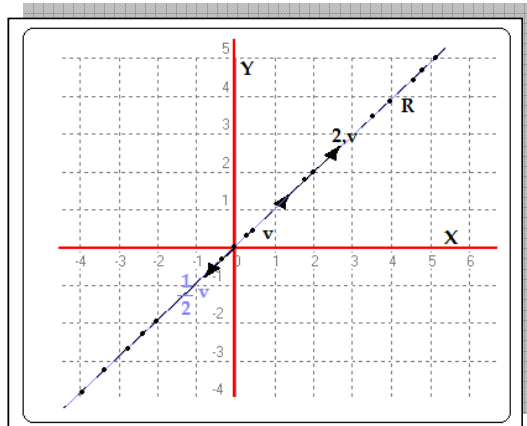
Observar el gráfico de ayuda.

Se ha vuelto a dibujar la recta **R** dirigida por \vec{v} y una serie de puntos de ella. A cada uno de éstos se le ha sumado el vector libre $\vec{t} = \overrightarrow{OP}$ obteniendo así una serie de puntos de una recta **R'** paralela a **R** y que pasa por **P**.

La expresión $r: \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \vec{P}$ [II.2.1] o

$$(u_x; u_y) = \alpha \cdot (v_x; v_y) + (p_x; p_y) \quad [\text{II.2.2}]$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ se denomina **ecuación vectorial** de la recta **r**.



De la expresión [II.2.2] se obtiene $\begin{cases} u_x = \alpha \cdot v_x + p_x \\ u_y = \alpha \cdot v_y + p_y \end{cases}$ [II.2.3]

que son las **ecuaciones paramétricas cartesianas** de la recta.

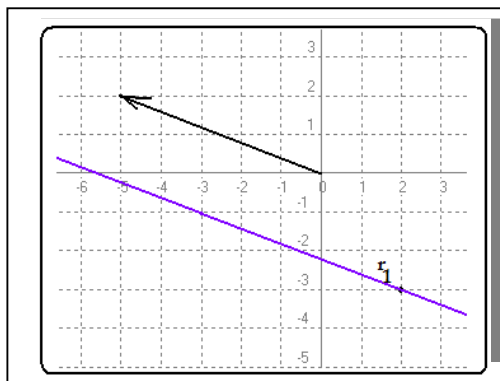
Notar que se tienen **dos** ecuaciones¹⁹.

Ejemplo 1

a) Obtener la ecuación de la recta r_1 que pasa por el punto $(2; -3)$ si el vector director es $\vec{v} = (-5; 2)$.

Graficar r_1 .

$$(x; y) = (2; -3) + \alpha \cdot (-5; 2) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ o } \begin{cases} x = 2 - 5\alpha \\ y = -3 + 2\alpha \end{cases}$$



b) Dar 3 puntos de la recta diferentes al $(2; -3)$.

Si $\alpha = 2$ se tiene $A = (2; -3) + 2 \cdot (-5; 2) = (-8; 1)$;

$\alpha = -1$, $B = (2; -3) - 1 \cdot (-5; 2) = (7; -5)$; $\alpha = 1/2$, $C = (2; -3) + 1/2 \cdot (-5; 2) = (-1/2; -2)$.

c) ¿El punto $(-68; 24)$ pertenece a la recta?

Para que esto ocurra debe existir un valor de α que cumpla $(-68; 24) = (2; -3) + \alpha \cdot (-5; 2)$

$$-68 = 2 - 5 \cdot \alpha \rightarrow -70 / (-5) = 14 = \alpha$$

$$24 = -3 + 2 \cdot \alpha \rightarrow 27 / 2 = 13,5 = \alpha$$

Como α no es el mismo para ambas ecuaciones el punto $(-68; 24)$ **no pertenece** a la recta.

d) ¿Qué punto Q de la recta cumple con la condición que la abscisa sumada al duplo de la ordenada da cero?

$x + 2y = 0 \rightarrow$ usando las ec. paramétricas

$$2 - 5\alpha + 2 \cdot (-3 + 2\alpha) = 0 \rightarrow -4 - \alpha = 0 \rightarrow -4 = \alpha$$

Luego $Q = (2 - 5 \cdot (-4); -3 + 2 \cdot (-4)) = (22; -11)$ —efectivamente $x + 2y$ da cero—

Comentario

En $\begin{cases} x = 2 - 5\alpha \\ y = -3 + 2\alpha \end{cases}$ podemos despejar α en la primera y luego reemplazar en la otra.

Tendríamos:

$$\alpha = -\frac{1}{5} \cdot (x - 2) \rightarrow \alpha = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

y vinculándola con la segunda:

$$y = -3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right) = -3 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

que es la **forma explícita** de la recta y la que comúnmente usamos en la escuela media.

Si partimos de la forma explícita, ¿cómo llegamos a la vectorial?

¹⁹ En el apéndice hemos desarrollado otras formas de expresar las rectas en el plano que no serán profundizadas en el curso.

$$(x, y) \in r \text{ si es de la forma } (x, y) = (x, -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}) = (x, -\frac{2}{5}x) + (0, -\frac{11}{5}) = x \cdot (1, -\frac{2}{5}) + (0, -\frac{11}{5})$$

De esta última expresión vemos que un vector director es el $(1, -\frac{2}{5})$ –podría serlo

cualquier múltiplo no nulo, como ser el $(-5, 2)$ – y un punto de la recta es el $(0, -\frac{11}{5})$.

Actividad 6

a) Para las siguientes rectas se pide expresarlas en forma vectorial dando un punto de cada una y un vector director (¿cuántos vectores directores tiene una recta?). Graficarlas.

1) $r_A: y = -\frac{1}{3}x + 4$ 2) $r_B: \begin{cases} x = -\beta + 1 \\ y = -2 \end{cases}$ 3) r_C : Pasa por los puntos $(1; -1)$ y $(-3; -2)$

b) Se tiene una recta como $y = m \cdot x + b$.

Pasarla a su expresión vectorial e indicar un punto de la misma y un vector director.

Reescribir a m como el cociente de dos números reales Δy y Δx [$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \Delta x \neq 0$] y

reconocer que un vector director de la recta es $(\Delta x; \Delta y)$ lo cual justifica lo aprendido en la escuela secundaria (y visto en la unidad 1) que para ir de un punto a otro de la recta hay una proporción que se mantiene constante.

Interprete por qué m suele llamarse pendiente y b ordenada al origen.

II.2.1 Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas las rectas $r: \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + P$ y $r': \vec{u} = \beta \cdot \vec{v}' + P'$.

Tome una hoja y represéntelas imaginando e interpretando a \vec{v}, \vec{v}', P y P' .

¿Cuál estima será la condición para que ambas rectas sean *paralelas*?

A partir de lo obtenido analice si las siguientes 4 rectas son paralelas entre sí:

$r_A: (x; y) = (0; 2) + \alpha \cdot (-1; 1)$ $r_B: (x; y) = (1; -4) + \beta \cdot (\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$ $r_C: x + y = 6$

Graficar cada una de ellas y confirmar su análisis.

Analicemos la *perpendicularidad* en el plano.

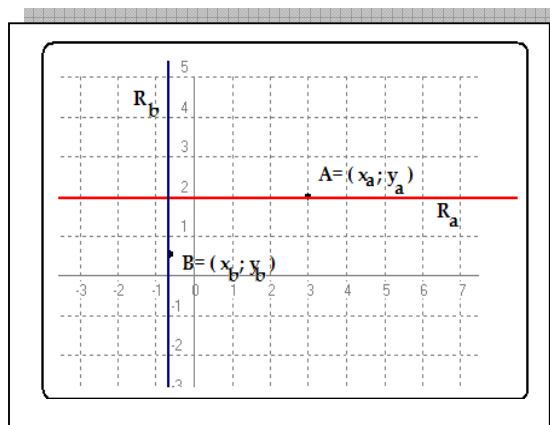
1) Supongamos que R_a es una recta horizontal y por ende su perpendicular es una recta R_b vertical. Sus ecuaciones pueden escribirse como:

$R_a: \vec{u} = \lambda \cdot (h; 0) + (x_a; y_a)$ con $h \neq 0$ (¿por qué?)

$R_b: \vec{u} = \lambda \cdot (0; k) + (x_b; y_b)$ con $k \neq 0$ (¿por qué?)

Los vectores directores de ambas rectas son $\vec{v}_a = (h; 0)$ y $\vec{v}_b = (0; k)$ respectivamente.

2) Si R_a no es horizontal resulta que R_b no es vertical (o viceversa). Se puede escribir a cada recta del siguiente modo (elegimos la forma explícita para recuperar conocimientos adquiridos en la escuela media y ver que son consistentes con todo nuestro desarrollo vectorial).



$$R_a: y = m_a \cdot x + b$$

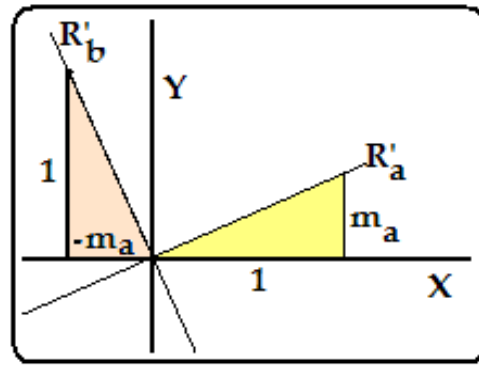
$$R_b: y = m_b \cdot x + b'$$

En la escuela la condición de perpendiculares

en R^2 era que $m_a \cdot m_b = -1$ o $m_b = -\frac{1}{m_a}$.

Para justificar lo anterior se trasladan ambas rectas al origen ya que la perpendicularidad no se verá modificada.

Sean $R'_a: y = m_a \cdot x$, $R'_b: y = -\frac{1}{m_a} \cdot x$ las rectas.



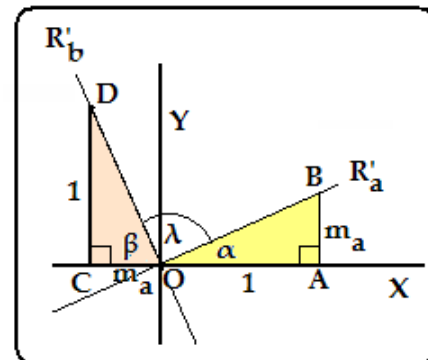
Las tablas de valores permiten graficarlas²⁰.

R'_a		R'_b	
x	y	x	y
0	0	0	0
1	m_a	$-m_a$	1

Si se comparan los triángulos AOB y DOC rectángulos se observa que tienen un ángulo congruente (el recto) y $\overline{AB} \cong \overline{OC} \wedge \overline{OA} \cong \overline{DC}$.

Por un criterio de congruencia entre triángulos (LAL, lado-ángulo-lado) resultan ambos triángulos congruentes.

$$\text{Por lo tanto: } \begin{cases} \overline{OB} \cong \overline{OD} \\ \alpha = \angle AOB \cong \angle CDO \\ \angle ABO \cong \angle CDO = \beta \end{cases}$$



Como la suma de ángulos interiores de un triángulo vale 180° , en OAB queda:

$$\alpha + \angle ABO + 90^\circ = 180^\circ \text{ y por lo anterior}$$

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Además del esquema surge que $\alpha + \beta + \lambda = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + \lambda = 180^\circ \rightarrow \lambda = 90^\circ$

O sea R'_a y R'_b son perpendiculares como se pretendía probar.

Hemos demostrado que si vale la relación de pendientes resulta que ambas rectas son perpendiculares.

Faltaría probar que si son perpendiculares la relación de las pendientes es la dada.

Sean $R'_a: y = m_a \cdot x \wedge R_b: y = m_b \cdot x$ las rectas por el origen.

²⁰ Tácitamente se ha supuesto m_a positivo pero puede rehacerse todo el desarrollo con valor negativo y se llegará a resultados equivalentes –y consistentes–.

Si usamos las tablas:

R'_a		R'_b	
x	y	x	y
0	0	0	0
1	m_a	$\frac{1}{m_b}$	1

Volvemos a tener un llano entre $\hat{C}OB$, $\hat{D}OB$ y $\hat{B}OA$.

De allí sale $\alpha + \beta = 90^\circ$.

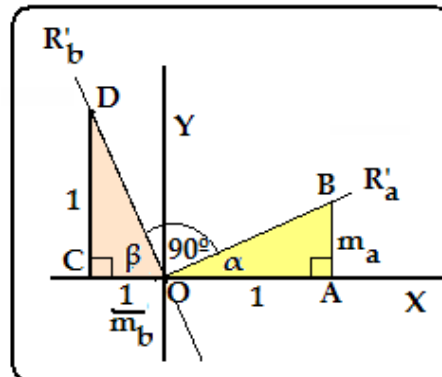
Pero como en \hat{OAB} resulta

$$\alpha + \hat{ABO} + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \alpha + \hat{ABO} = 90^\circ;$$

En \hat{OCD} sucede que $\beta + \hat{CDO} + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow$

$$\beta + \hat{CDO} = 90^\circ$$

Comparando las tres ecuaciones sombreadas se consigue que $\hat{ABO} = \beta$ y $\hat{CDO} = \alpha$



Los triángulos tienen un lado de igual longitud (1) y

los ángulos adyacentes a los extremos congruentes (de 90° y $\hat{CDO} = \alpha$). Por lo tanto resultan congruentes.

En particular $\overline{AB} = \overline{CO} \rightarrow m_a = -1/m_b$ (si $m_a > 0$ resulta que $m_b < 0$ o viceversa).

Luego $m_a \cdot m_b = -1$ como se pretendía probar.

• Así si R_a fuera la recta $y = -\frac{2}{5}x + 4$ una recta perpendicular sería $R_b: y = \frac{5}{2}x - 1$.

Comprobar la relación de pendientes y graficar ambas en un mismo sistema cartesiano.

Actividad 7

- Encontrar la recta r_1 que pasa por los puntos $M = (-2, 1)$ y $N = (1, -1)$.
- Obtener los puntos A y B donde r_1 corta al eje X y al eje Y respectivamente.
- Hallar $r_2 \parallel r_1$ que pasa por el origen.
- ¿Cuál es la recta r_3 perpendicular a r_1 que pasa por el punto $(2, 4)$?
- Graficar las tres rectas.

II.2.2 Producto escalar de vectores en R^2

Regresamos a R_a y R_b perpendiculares –ninguna vertical–.

$$R_a: y = m_a \cdot x + b \quad \wedge \quad R_b: y = m_b \cdot x + b'$$

Escribamos sus expresiones vectoriales

$$R_a: (x; y) = (x; m_a \cdot x + b) = (x; m_a \cdot x) + (0; b) = x \cdot (1; m_a) + (0; b)$$

$$R_b: (x; y) = (x; m_b \cdot x + b') = (x; m_b \cdot x) + (0; b') = x \cdot (1; m_b) + (0; b')$$

Los vectores directores son $\overline{v_a} = (v_{ax}; v_{ay}) = (1; m_a)$ y $\overline{v_b} = (v_{bx}; v_{by}) = (1; m_b)$ [con $m_a \cdot m_b = -1$]

En \mathbb{R}^2 (y más adelante en \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 , ...) se define una nueva operación entre vectores denominada **producto escalar** entre vectores y cuyo resultado es un número real (de allí el término escalar):

$$\overline{v_a} \cdot \overline{v_b} = (v_{ax}; v_{ay}) \cdot (v_{bx}; v_{by}) = v_{ax} \cdot v_{bx} + v_{ay} \cdot v_{by}$$

Por ejemplo $(-3; 2) \cdot (4; 5) = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = -12 + 10 = -2$

Si se efectúa el producto escalar para los dos vectores directores de las rectas R_a y R_b da

$$\overline{v_a} \cdot \overline{v_b} = (1; m_a) \cdot (1; m_b) = 1 + m_a \cdot m_b = 1 + (-1) = 0$$

¡O sea que el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es nulo!

Observar que si las rectas fueran horizontal y vertical se tenía $(h; 0) \cdot (0; k) = h \cdot 0 + 0 \cdot k = 0$

En su momento se profundizará acerca del producto escalar entre vectores y sus propiedades y aplicaciones.

Actividad 8

a) Si $\vec{v} = (2\alpha - 7; -\alpha)$ y $\vec{w} = (\alpha; 3)$, hallar α real, \vec{v} y \vec{w} para que $\vec{v} \perp \vec{w}$.

b) Probar que el triángulo ABC con $A = (-5; -4)$, $B = (-2; -5)$ y $C = (-3; -8)$ es rectángulo en B.

Obtenga el perímetro y compruebe que se satisface el Teorema de Pitágoras.



Actividad de refuerzo 7

(I) Dada la recta $r: (x; y) = \alpha \cdot (-4; 3) + (5; -6)$. Se pide:

a) Obtener los puntos intersección con los ejes coordenados. Grafique r .

b) Si $Q = (2k+5; -21)$ -con k real-; ¿para qué valores de k resulta Q perteneciente a la recta r ? Dar Q .

c) Dar la ecuación explícita de la recta r' perpendicular a r cuya ordenada al origen sea 4.

Compruebe para este ejemplo la propiedad de las pendientes para rectas perpendiculares.

(II) Sea $r: (x; y) = \beta \cdot (3; -5) + (1; 1)$.

a) Obtenga $r' \perp r$ que pasa por el $(-1, 2)$.

b) ¿Qué punto de r' tiene sus dos coordenadas iguales?

c) ¿Cuáles puntos de r' distan del $(-1, 0)$ el valor $\sqrt{116}$?

II.3 El espacio tridimensional (\mathbb{R}^3)

Ya hemos trabajado en el plano (\mathbb{R}^2) y se hace necesario agregar una tercera dimensión (z o x_3 generalmente).

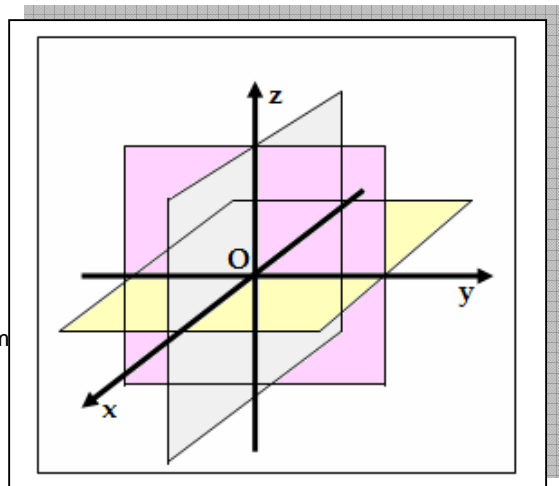
Para la ubicación de puntos (y por ende de vectores) en \mathbb{R}^3 utilizaremos una terna de referencia de tres ejes ortogonales entre sí:

x -eje de abscisas-

y -eje de ordenadas-

z -eje de cotas-

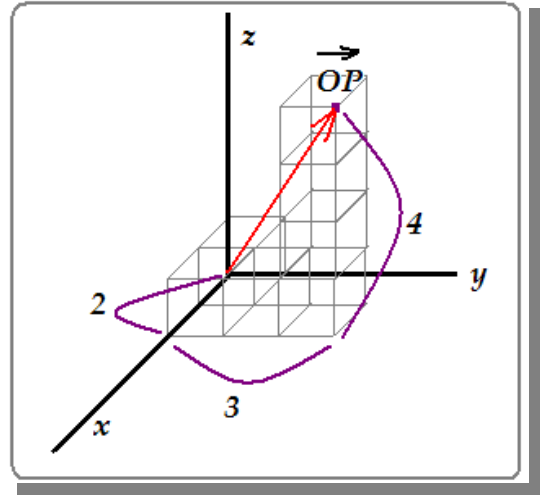
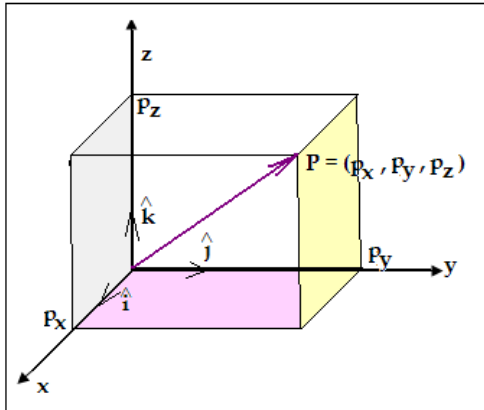
cortándose en el punto O llamado *origen de coordenadas*.



Los planos determinados por cada par de ejes se llaman *planos coordenados*: $pl(x,y)$; $pl(x,z)$ y $pl(y,z)$.

Todo **punto** $P = (p_x, p_y, p_z) \in R^3$ está asociado a un **vector posición** que va desde el origen hasta dicho punto del plano.

Tenemos $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (p_x, p_y, p_z)$ terna ordenada de números reales.



Un punto como $S = (2; 3; 4)$ indica 2 unidades en la dirección x , 3 en la y y 4 en la z .

Además $(2; 3; 4) = (2; 0; 0) + (0; 3; 0) + (0; 0; 4) =$

$= 2.(1; 0; 0) + 3.(0; 1; 0) + 4.(0; 0; 1) = 2.\hat{i} + 3.\hat{j} + 4.\hat{k}$ donde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son los *versores canónicos*.

Las operaciones vistas en R^2 se adaptan en R^3 del siguiente modo:

$\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{v}' = (x', y', z')$ vectores de R^3 y $\alpha \in R$ entonces:

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{v}' &= (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \alpha \cdot \vec{v} &= \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)\end{aligned}$$

y las interpretaciones geométricas se mantienen.

Actividad 9

a) Representar en el siguiente sistema de referencia los vectores $\vec{a} = (3, -2, 0)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, 4, 2)$, $\vec{d} = (0, 3, 4)$.

Obtener gráfica y analíticamente $\vec{e} = 2\vec{a}$, $\vec{f} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{g} = \vec{a} + \vec{d}$, $\vec{h} = \vec{b} - \vec{c}$

b) Hallar analíticamente \vec{l} para que $\frac{1}{3}\vec{l} - \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{d}$

c) Sean $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ hallar α y β reales para que $\vec{w} = (14, -5, -1)$ cumpla con $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Cuando existan los valores de α y β diremos que \vec{w} es **combinación lineal** de \vec{u} y \vec{v} .

d) ¿Estudie qué características deberán tener dos vectores \vec{m} y \vec{n} para ser paralelos?

¿Para qué valores de k real resultan $\vec{m} // \vec{n}$ si $\vec{m} = (3-k, k-2, 1)$ y $\vec{n} = (4, -6, 8-2k)$?

Establezca si los vectores tienen igual sentido u opuesto.

e) En el plano vimos que vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son *equivalentes* si trasladados al origen coinciden.

Si $A = (1, -2; 0)$, $B = (-3, 3, 5)$ y $C = (-4, 0, -1)$, obtener D tal que \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} sean equivalentes.

Actividad 10 (muy importante)

Probar que \mathbb{R}^3 es un *espacio vectorial real*.

Eso significa que:

- a) $\forall \vec{u} \text{ y } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ resulta que $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- b) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}$ sucede que $\alpha \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
- c) $\forall \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- d) $\forall \vec{v} \text{ y } \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.
- e) Existe $\vec{O} = (0;0;0) / \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ resulta que $\vec{O} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{O} = \vec{v}$.
- f) Cada vector \vec{v} tiene un vector $-\vec{v} / \vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{O}$.
- g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$
- h) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$
- i) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$
- j) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ resulta que $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

II.4 Rectas en el espacio

Tomemos un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ no nulo.

¿Qué obtenemos geoméricamente al efectuar los productos $\alpha \cdot \vec{v}$ con α un número real?

¿Cuál es el efecto geométrico que le produce sumarle a $\alpha \cdot \vec{v}$ un vector $\vec{OP} = (p_x, p_y, p_z)$?

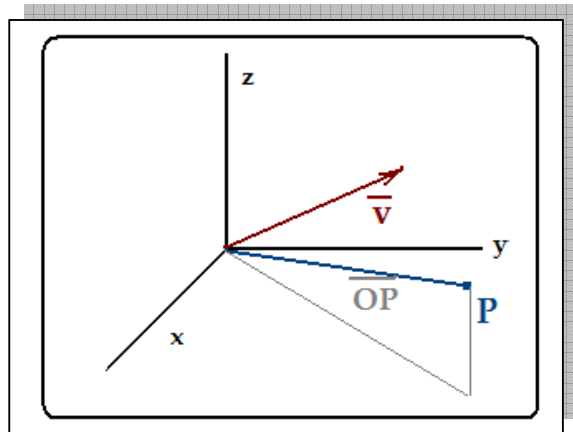
A \vec{v} se lo denomina *vector director* de la recta r que pasa por P.

Cualquier punto $X \in \mathbb{R}^3$ debe cumplir con la existencia de algún $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual:

$$\boxed{X = (x, y, z) = P + \alpha \cdot \vec{v}} \quad (\text{ecuación vectorial})$$

Más explícitamente: $\boxed{r: (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \alpha \cdot (v_x, v_y, v_z)}$ (ecuación paramétrica vectorial)

Y operando $r: \begin{cases} x = p_x + \alpha \cdot v_x \\ y = p_y + \alpha \cdot v_y \\ z = p_z + \alpha \cdot v_z \end{cases}$ (ecuaciones paramétricas de la recta)



Despejando (si $v_x \neq 0$, $v_y \neq 0$, $v_z \neq 0$) se obtiene r :
$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z} \quad (\text{ecuaciones simétricas})$$

Ejemplo 2

• Obtener las diferentes ecuaciones de la recta que pasa por $P = (-1, 4, 2)$ y que tiene por vector director al $\vec{v} = (-3, -1, 5)$.

La ecuación vectorial $(x, y, z) = (-1, 4, 2) + \beta \cdot (-3, -1, 5)$ con $\beta \in \mathbb{R}$.

Lo anterior puede escribirse como $(x, y, z) = (-1, 4, 2) + (-3\beta, -\beta, 5\beta) = (-1-3\beta, 4-\beta, 2+5\beta)$

Las ecuaciones paramétricas son:
$$\begin{cases} x = -1 - 3\beta \\ y = 4 - \beta \\ z = 2 + 5\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}.$$

[Se observa que en las ecuaciones anteriores los términos independientes representan las coordenadas de un punto que pertenece a la recta y los coeficientes de β son las componentes de un vector director de la recta].

Si se desea conocer distintos puntos que pertenezcan a esta recta, basta con asignarle a β distintos números reales:

Con $\beta = 1$ se obtiene $(-4; 3; 7)$; $\beta = -2$, $(5; 6; -8)$; $\beta = 1/2$, $(-5/2; 7/2; 9/2)$.

Volviendo a la recta, si despejamos β en las tres ecuaciones nos da nos da

$$\frac{x+1}{-3} = \beta; \frac{y-4}{-1} = \beta; \frac{z-2}{5} = \beta$$

e igualando obtenemos las *ecuaciones simétricas de la recta*:

$$r: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

[En las ecuaciones simétricas, los números que restan a las variables son las coordenadas de un punto que pertenece a la recta y los denominadores constituyen las componentes de un vector paralelo a la recta].

De $r: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-4}{-1}$ podemos despejar x (por ejemplo)

$$x+1 = 3y-12 \rightarrow x = 3y-13$$

Y de $\frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{5}$ sale $-5y+20 = z-2 \rightarrow z = -5y+22$

$$\boxed{x = 3y - 13 \wedge z = -5y + 22}$$

son las *ecuaciones explícitas ó reducidas* de una recta en el espacio (**notar que son dos**).

¿Para que valor de g resulta que $(2g-2, g+5, 1-4g)$ pertenece a r ?

Podemos utilizar cualquiera de las expresiones obtenidas, por ejemplo las reducidas:

En $x = 3y - 13$ reemplazamos y da:

$$2g-2 = 3.(g+5) - 13 \rightarrow 2g-2 = 3g+2 \rightarrow -g = 4 \rightarrow g = -4$$

$$\text{Y de } z = -5y + 22 \rightarrow 1-4g = -5.(g+5) + 22 \rightarrow 1-4g = -5g-3 \rightarrow g = -4$$

Como el valor de $g = -4$ es el mismo hay solución.

Además el punto perteneciente a r es $(2g-2, g+5, 1-4g) = (-8-2, -4+5, 1+16) = (-10, 1, 17)$.

Actividad 11

a) Sea $r': \frac{x-4}{-3} = y+2; z=-6$.

Obtenga la ecuación vectorial de la recta y dar tres puntos de ella. Indicar si $A = (13; 1; 6)$ y $B = (4+3\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, -6)$ pertenecen a la recta. Justifique adecuadamente.

b) Si $S(3,0,-2)$ y $T(1,-4,-1)$, ¿cuál es la ecuación vectorial de r' que incluye a S y a T ? Compruebe que M punto medio del segmento \overline{ST} pertenece a la recta.

c) $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \frac{1}{3}\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dar las ecuaciones simétricas y reducidas de r .

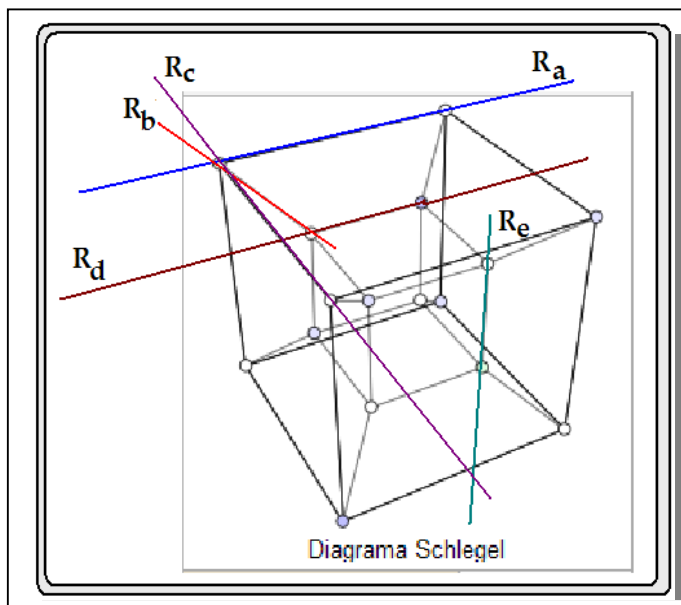
¿Qué puntos (x, y, z) de r cumple con $x - 3y - z = 0$? ¿Y con $-6y + x + z = -13$? ¿Y con $2x + z = 2$?

II.4.1 Rectas paralelas, secantes y alabeadas.

Vimos que en el plano dos rectas podían ser secantes (como caso especial ser perpendiculares), paralelas coincidentes o paralelas no coincidentes. Los tres casos nos lleva a que las dos rectas puedan tener un *único punto en común*, *todos los puntos en común* o *ningún punto en común*.

En el espacio la cuestión de la intersección se mantiene pero aparece un nuevo tipo de relación entre rectas. El gráfico ayudará²¹ a la comprensión.

Las rectas R_a, R_b y R_c son *secantes*, esto es, *se cortan en un punto*; R_a y R_c son *perpendiculares* –o sea *forman un ángulo de 90°* –; R_a y R_d son *paralelas* (no coincidentes) –sus *vectores directores son paralelos* y *no se intersectan*– y las cuatro anteriores son *alabeadas* con R_e –no se cortan pero sus *vectores directores no son paralelos*–; R_e es perpendicular a R_c y a R_a .



Dos rectas R y R' son **alabeadas** si sus vectores directores no son paralelos y las rectas **no se cortan en ningún punto**.

Por lo tanto en \mathbb{R}^3 si dos rectas tienen intersección vacía no necesariamente son paralelas.

²¹ <http://es.wikipedia.org/wiki/Hipercubo>

Ejemplo 3

Determinaremos la posición relativa de las rectas de ecuación:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = -3 + 2\gamma \\ z = -2 - \gamma \end{cases} \quad y \quad r_2 : \frac{x-17}{3} = y-4 = \frac{z+8}{-1}$$

¿Se cortarán en algún punto?

Si es así éste debe satisfacer ambos conjuntos de ecuaciones.

Al tener las ecuaciones paramétricas de r_1 las reemplazamos en las simétricas de r_2 y analizamos condiciones.

$$\frac{1+\gamma-17}{3} = -3+2\gamma-4 = \frac{-2-\gamma+8}{-1} \rightarrow \frac{\gamma-16}{3} = 2\gamma-7 = \gamma-6$$

De la igualdad $2\gamma-7 = \gamma-6$ deducimos $\gamma=1$ y comprobamos que se cumpla $\frac{\gamma-16}{3} = 2\gamma-7$

$$\frac{1-16}{3} = 2 \cdot 1 - 7 \quad \text{o sea} \quad -5 = -5.$$

Se cortan en el punto $(1+1, -3+2 \cdot 1, -2-1) = (2, -1, -3)$.

El sistema resultó *compatible determinado* (tiene una única solución).

Nota: a veces puede tantearse acerca de las posibilidades en la posición relativa de las rectas. Si encontramos los vectores directores de ambas se tiene $(1, 2, -1)$ y $(3, 1, -1)$ que no son múltiplos entre sí y por lo tanto las rectas no son paralelas; sólo podría ocurrir que sean secantes o alabeadas.

Actividad 12

a) Obtener la intersección entre los siguientes pares de rectas:

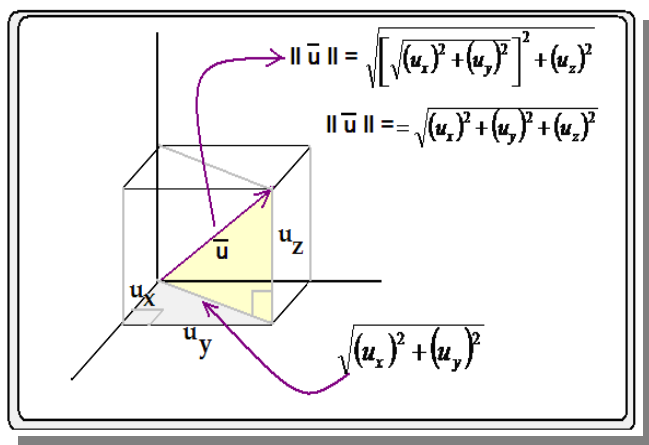
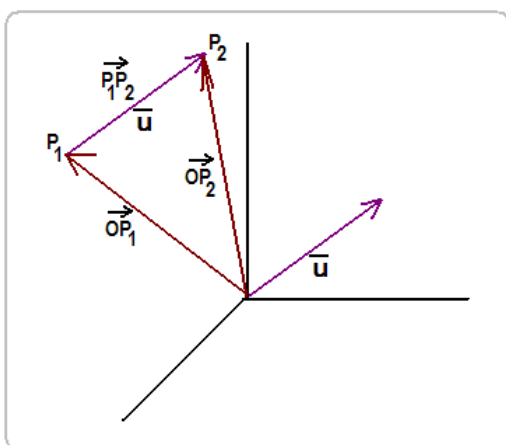
$$(I) \quad r_1 : \begin{cases} x = 2 - \gamma \\ y = 1 + \gamma \\ z = -2\gamma \end{cases} \quad y \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad (II) \quad r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\gamma \\ y = 4 + 2\gamma \\ z = \frac{7}{2} + \gamma \end{cases} \quad y \quad r_2 : x-3 = \frac{y-8}{3} = \frac{z}{-4}$$

b) Hallar la recta r_a que es paralela al vector $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y pasa por el punto $(2; 2; 1)$.

c) Obtener r_b paralela a r : $\frac{x-2}{3} = \frac{2y+1}{-6} = \frac{-z-5}{2}$ y que pasa por $U = (4; 1; -6)$.

II.5 Norma, magnitud o longitud de un vector en R^3

La norma o longitud de un vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dada por la longitud del vector equivalente $\vec{u} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ que tiene su punto de inicio en el origen de coordenadas.



Si $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ son origen y extremo del vector, respectivamente, resulta:

$$\bar{u} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Si recurrimos al Teorema de Pitágoras, la norma de un vector será

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Si $A = (-2, 3, 0)$ y $B = (-1, 5, -2)$ resulta que la distancia de A a B es:

$$d(A; B) = \|\overline{AB}\| = \|B - A\| = \|(1, 2, -2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Actividad 13

a) Halle $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla $\|k\bar{u}\| = 2$ con $\bar{u} = (2\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3})$.

b) Demuestre que $|k| \cdot \|\bar{u}\| = \|k\bar{u}\| \forall k \in \mathbb{R} \wedge \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$

c) Si $\vec{u} = (-1, -2, 2)$ obtener dos vectores \vec{a} y \vec{b} de tamaño uno que sean paralelos a \vec{u} (llamados versores).

Señale otros dos (\vec{c} y \vec{d}) que sean paralelos a \vec{u} y de tamaño 12.



Actividad de refuerzo 8

(I) Dada la recta $r: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{3} = z+2$ se pide:

a) Dar tres puntos de la misma.

b) Obtener la ecuación vectorial de la recta r'/r y que pasa por el punto $A = (1; 0; -6)$.

¿Qué punto de r' tiene sus dos últimas coordenadas coincidentes?

Indique un vector director y un punto de la recta $r'': \frac{2x-8}{-2} = \frac{-y-1}{3} = \frac{z}{7}$.

Piense antes de responder.

(II) Dadas las rectas $r: (x, y, z) = t \cdot (-2, 1, 2) + (1, -3, -4)$ y $r': (x, y, z) = k \cdot (\beta, -\beta+2, -\beta) + (0, -3, 1)$.

a) Obtener β real para que r sea paralela a r' .

b) Compruebe que además r y r' no se intersectan.

c) Obtenga la distancia entre un punto de r y otro punto de r' elegidos por usted.

(III) a) Dadas las rectas $r: (x, y, z) = \alpha \cdot (-5, 1, 2) + (2, 2, -1)$ y $r': \begin{cases} x = 3\beta - 2 \\ y = -\beta \\ z = -3\beta - 12 \end{cases}$ compruebe que

se cortan en un punto P . ¡Encuéntrelo!

b) Obtenga la distancia de P a $A = (-24, 9, 7)$.

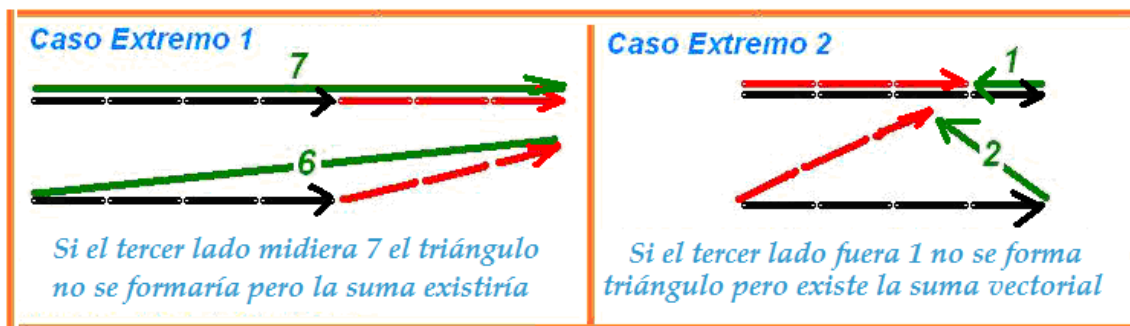
c) Sea L la recta dada por $(x, y, z) = \alpha \cdot (0, 1, -1)$. Construya otra recta L' alabeada a L .

II.5.1 Propiedades de la norma de un vector

Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores cualesquiera:

1.- $\|\vec{u}\| \geq 0$ [la norma es un número real positivo o nulo.]

2.- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ [Desigualdad triangular]



3.- que $|k| \cdot \|\vec{u}\| = \|k \cdot \vec{u}\| \quad \forall k \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

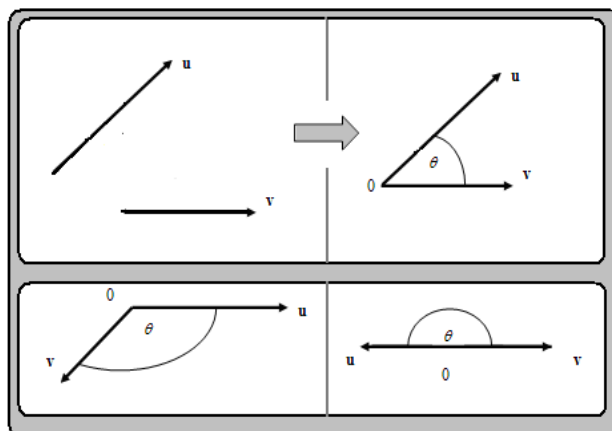
II.6 Productos entre vectores de \mathbb{R}^3

En esta sección nos ocuparemos de los *distintos productos* entre vectores (interior o escalar, vectorial y mixto), sus propiedades y su vinculación con la geometría y la física.

Desde el punto de vista geométrico el estudio de estos productos nos permitirá introducir las nociones de ángulo entre vectores, norma de un vector, distancia entre puntos, paralelismo y perpendicularidad, proyecciones, concepto físico-geométricos de área y volumen, entre otros.

II.6.1 Ángulo entre vectores

Si dos vectores \vec{u} y \vec{v} son no nulos, se entiende por ángulo entre ellos al número real $\hat{\theta} = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ (entre 0 y π) siendo $\hat{\theta}$ el ángulo entre las direcciones de los vectores \vec{u} y \vec{v} cuando se trasladan a un origen común.



Para vectores *paralelos* el ángulo es 0° o π ; si son *perpendiculares* es $\frac{1}{2}\pi$ y se dirá que son *ortogonales*.

II.6.2 Producto interior (ó escalar ó punto) en R^3

Se puede comenzar una *presentación axiomática* de producto interno y luego deducir nociones de ángulo, distancia, etc. o a partir de alguna de ellas llegar a su *expresión canónica*.

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores entonces el producto interior entre \vec{u} y \vec{v} es²²:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad [\text{II.6.2.1}]$$

En II.2.2 hemos presentado una definición alternativa; resulta una consecuencia de la otra.

El *teorema del coseno* en un triángulo cualquiera establece que “el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto entre ambos y el coseno del ángulo que forman”.

Simbólicamente: $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$

Sean $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$; $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$;

reemplazando llegamos a:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2 = (u_x)^2 - 2 \cdot u_x \cdot v_x + (v_x)^2 + (u_y)^2 - 2 \cdot u_y \cdot v_y + (v_y)^2 + (u_z)^2 - 2 \cdot u_z \cdot v_z + (v_z)^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 + (v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2 - 2 \cdot \vec{u} \bullet \vec{v}$$

Comparando ambos miembros derechos y simplificando términos comunes,

$$-2 \cdot u_x \cdot v_x - 2 \cdot u_y \cdot v_y - 2 \cdot u_z \cdot v_z = -2 \cdot \vec{u} \bullet \vec{v}$$

y dividiendo por -2 se obtiene:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z} \quad [\text{II.6.2.2}]$$

Ejemplo 4

a) Sean $\vec{v} = (2, -5, 1)$ y $\vec{v}' = (4, 3, -3)$.

Obtener el producto escalar entre ambos y el ángulo que forman.

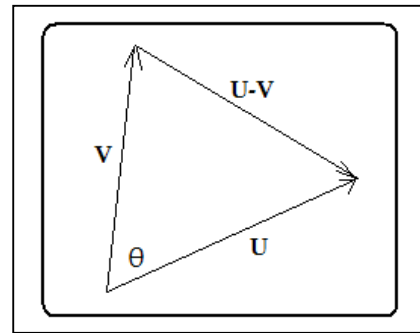
$$\vec{v} \bullet \vec{v}' = 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 1 \cdot (-3) = 8 - 15 - 3 = -10$$

$$\text{Además } \|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30} \text{ y } \|\vec{v}'\| = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}.$$

$$\text{Como } \vec{v} \bullet \vec{v}' = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\| \cdot \cos \theta \rightarrow -10 = \sqrt{30} \cdot \sqrt{34} \cdot \cos \theta \rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{-10}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{34}} \approx -0,313112145 \rightarrow \theta = 1,889264519 \text{ (rad)} \quad (\text{aproximadamente } 108^\circ 14' 49'')$$

²² θ existe si ambos vectores son no nulos.



b) Si $\vec{g} = (k-3, 0, 2)$ y $\vec{h} = (-3, k, 2k-1)$. Encuentre para qué valores de k resultan ambos vectores perpendiculares. Indicar los vectores resultantes para esos valores de k.

Los vectores deben ser ortogonales o el ángulo entre de 90° ; como $\cos 90^\circ = 0$ resulta que su producto escalar es cero.

$$-3.(k-3) + 0.k + 2.(2k-1) = 0 \rightarrow -3k + 9 + 4k - 2 = 0 \rightarrow k = -7$$

Y reemplazando obtenemos $\vec{g} = (-10, 0, 2)$ y $\vec{h} = (-3, -7, -15)$.

Efectivamente el producto escalar vale $-10.(-3) + 0.(-7) + 2.(-15) = 30 + 0 - 30 = 0$

II.6.2.1 Propiedades del producto interior entre vectores (en R^3 pero vale para R^n)

a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 : \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (conmutatividad)

b) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3 : \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ (distributividad respecto de la suma de vectores)

c) $\forall \alpha \in R \wedge \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 : (\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\alpha \vec{v}) = \alpha.(\vec{u} \bullet \vec{v})$ (extracción de un escalar)

d) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 \wedge \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} : \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \text{áng}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$ (perpendicularidad de vectores no nulos)

e) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 : \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v}$

f) $\forall \vec{u} \in R^3 : \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $\forall \vec{u} \in R^3 : \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ (relación producto interior y norma de un vector)

Ejemplo 5

a) Calcule $\|\vec{u}\|$ sabiendo que se cumplen simultáneamente
$$\begin{cases} \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \\ \|\vec{v}\| = 4 \\ (\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{u} \end{cases}$$

Como $(\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{u}$ el producto escalar entre ambos vectores es nulo.

$$(\vec{u} - \vec{v}) \bullet \vec{u} = 0 \rightarrow \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{u} = 0 \rightarrow \vec{u} \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} \rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

Como ninguno de los vectores son nulos (forman ángulo) resulta que $\|\vec{u}\| \neq 0$ y podemos dividir la última ecuación por este número.

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta) \rightarrow \|\vec{u}\| = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

b) ¿Es cierto que $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (3\vec{u} - \vec{v}) = 3\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v}$?

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (3\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \bullet (3\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \bullet (3\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \bullet (3\vec{u}) - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet (3\vec{u}) - \vec{v} \bullet \vec{v} = \\ &= 3\vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + 3\vec{v} \bullet \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = 3\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \bullet \vec{v} + 3\vec{u} \bullet \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = \\ &= 3\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 \quad (\text{la igualdad es cierta}) \end{aligned}$$

c) Probar que en todos los rombos sus diagonales son perpendiculares.

Consideremos a A, B, C, D los cuatro puntos del rombo ordenado ABCD.

Nuestro objetivo es probar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ o sea que $(C-A) \cdot (B-D) = 0$ que reescribiremos como $(C-A) \cdot B - (C-A) \cdot D$ y confirmaremos que esta cuenta nos da cero.

Recordamos que la característica de un rombo es la de tener sus cuatro lados de igual longitud:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\|$$

Elevemos al cuadrado todos los miembros:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{DA}\|^2$$

$$\text{Desarrollamos } \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

$$(B-A) \cdot (B-A) = (C-B) \cdot (C-B)$$

$$B \cdot B - B \cdot A - A \cdot B + A \cdot A = C \cdot C - C \cdot B - B \cdot C + B \cdot B$$

simplificando y usando propiedad conmutativa del producto escalar

$$-2B \cdot A + \|A\|^2 = \|C\|^2 - 2B \cdot C \rightarrow 2B \cdot C - 2B \cdot A = \|C\|^2 - \|A\|^2 \rightarrow 2B \cdot (C - A) = \|C\|^2 - \|A\|^2$$

$$B \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \{ \|C\|^2 - \|A\|^2 \}$$

$$\text{De igual forma } \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{DA}\|^2 \rightarrow (D-C) \cdot (D-C) = (A-D) \cdot (A-D)$$

$$D \cdot D - D \cdot C - C \cdot D + C \cdot C = A \cdot A - A \cdot D - D \cdot A + D \cdot D$$

$$-2D \cdot C + \|C\|^2 = \|A\|^2 - 2D \cdot A \rightarrow -2D \cdot C + 2D \cdot A = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow -2D \cdot (C - A) = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow$$

$$-D \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \{ \|A\|^2 - \|C\|^2 \}$$

Realicemos la cuenta buscada:

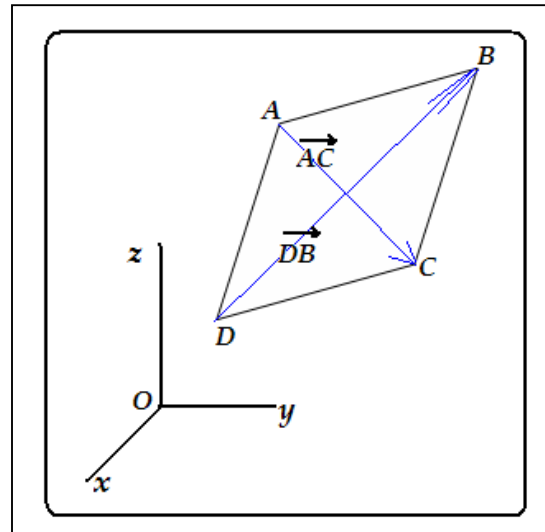
$$(C-A) \cdot B - (C-A) \cdot D =$$

$$B \cdot (C-A) - D \cdot (C-A) \quad [\text{por propiedad conmutativa del producto escalar}]$$

Reemplazando por las expresiones sombreadas:

$$\frac{1}{2} \{ \|C\|^2 - \|A\|^2 \} + \frac{1}{2} \{ \|A\|^2 - \|C\|^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \|C\|^2 - \|A\|^2 + \|A\|^2 - \|C\|^2 \} = \frac{1}{2} \{ 0 \} = 0 \quad \text{que es lo que se pretendía probar.}$$



Actividad 14

a) Sean $\vec{u} = (5, -1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 2, 1)$; hallar un vector \vec{w} perpendicular al eje x y que cumpla con $\vec{u} \cdot \vec{w} = 9$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = -14$.

b) Si $\vec{u} = (4, 2, 0)$ y $\vec{v} = (1, 3, -1)$ obtener \vec{w} y \vec{r} tales que cumplan simultáneamente con

$$\begin{cases} \vec{w} // \vec{u} \\ \vec{r} \perp \vec{u} \\ \vec{v} = \vec{w} + \vec{r} \end{cases} \quad \text{Verifique su solución.}$$



Actividad de refuerzo 9

- (I) a) Compruebe que los puntos $A = (1, 1, -4)$, $B = (3, 0, -6)$ y $C = (-7, 5, 4)$ pertenecen a una misma recta r .
- b) Obtenga el punto Q de r tal que \overrightarrow{MQ} sea ortogonal a \vec{v} sabiendo que $M = (8, 0, -14)$ y $\vec{v} = (5, 1, -1)$.
- c) ¿Cuánto vale el ángulo entre \vec{v} y \overrightarrow{AB} ?
- (II) Obtenga la norma de un vector \vec{v} sabiendo que $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -9$, $\|\vec{u}\| = 2$ y el ángulo entre \vec{u} y \vec{v} vale 120° .
- Justifique claramente cada propiedad que vaya utilizando.

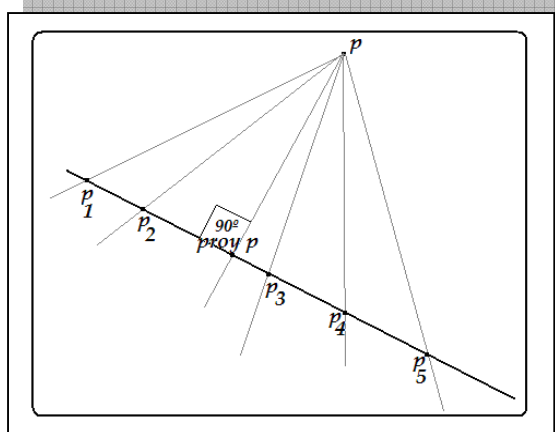
II.6.3 Proyección de un vector sobre una dirección

En geometría, la proyección ortogonal de un punto sobre una recta está dada por un punto ubicado sobre la recta que es la intersección entre dicha recta y la perpendicular a ella, trazada desde el **punto** cuya proyección estamos buscando.

En el gráfico la proyección está marcada con ese nombre.

No lo son p_1 , p_2 , p_3 , p_4 y p_5 .

La proyección de p es p' y de q es q' ; la del vector \overrightarrow{pq} es $\overrightarrow{p'q'}$.



Comencemos con un ángulo θ que sea nulo o agudo.

Traslademos \overrightarrow{pq} con comienzo en p' y nos da el vector que denotaremos \overrightarrow{ab} .

Las **longitudes** entre los segmentos $\overline{p'q'}$ y \overline{ab} están relacionados por el coseno de θ :

$$\cos \theta = \frac{\|\overline{p'q'}\|}{\|\overline{ab}\|} \rightarrow \|\overline{ab}\| \cos \theta = \|\overline{p'q'}\|$$

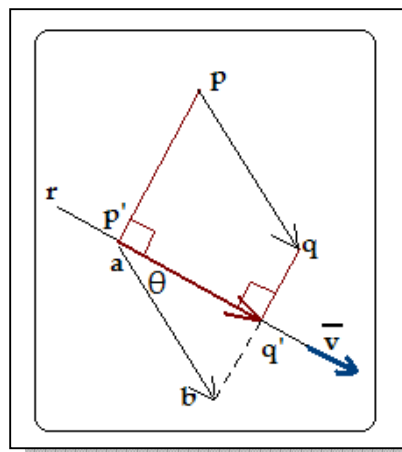
La dirección de la recta r nos la da un vector director \vec{v} .

Si multiplicamos $\|\overline{ab}\| \cos \theta = \|\overline{p'q'}\|$ por $\|\vec{v}\|$ tenemos:

$$\|\overline{ab}\| \cos \theta \cdot \|\vec{v}\| = \|\overline{p'q'}\| \cdot \|\vec{v}\| \rightarrow \overline{ab} \cdot \vec{v} = \overline{p'q'} \cdot \vec{v} \rightarrow \overrightarrow{pq} \cdot \vec{v} = \overline{p'q'} \cdot \vec{v}$$

ya que \overrightarrow{pq} y \overline{ab} son equivalentes.

Despejando:



$$\frac{\overrightarrow{pq} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \overline{p'q'} = \text{proy.escalar}_{\vec{v}} \overrightarrow{pq}$$

¿Qué ocurriría si ángulo θ fuera recto?

..... (complete usted)

Veamos la situación de un ángulo obtuso o llano.

Los ángulos θ y β son suplementarios (y β menor a un recto) y por lo tanto el $\cos\theta$ es negativo (además vale que $\cos\theta = -\cos\beta$).

Lo primero que uno nota es que el vector $\overrightarrow{p'q'}$ es colineal, con sentido opuesto al vector \vec{v} lo cual no es un dato menor.

Si al desarrollo recién hecho lo repetimos usando a β en reemplazo de θ seguimos teniendo una relación de longitudes:

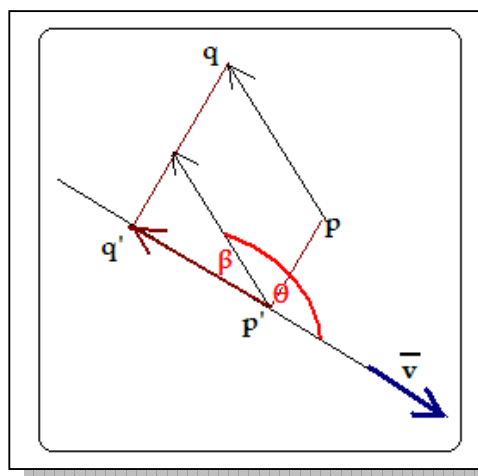
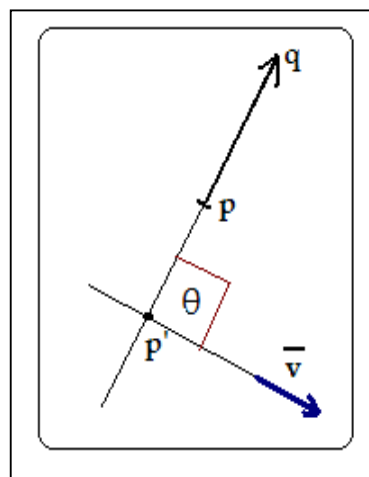
$$\|\overline{ab}\| \cos \beta \cdot \|\vec{v}\| = \|\overline{p'q'}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Pero si nosotros queremos significar un sentido opuesto al sentido de \vec{v} , a $\overline{p'q'}$ debemos asociarle un valor negativo con lo cual debiéramos definir que:

$$\overline{p'q'} \cdot \|\vec{v}\| = -\|\overline{ab}\| \cdot \cos \beta \cdot \|\vec{v}\| = \|\overline{pq}\| \cdot (-\cos \beta) \cdot \|\vec{v}\| = \|\overline{pq}\| \cdot (\cos \theta) \cdot \|\vec{v}\| = \overrightarrow{pq} \cdot \vec{v}$$

Y si de allí surge que nuevamente:

$$\frac{\overrightarrow{pq} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \overline{p'q'} = \text{proy.escalar}_{\vec{v}} \overrightarrow{pq}$$



Resumiendo:

La *proyección escalar* de un vector \overrightarrow{pq} en la dirección de un vector \vec{v} es un número (positivo, negativo o cero) que geométricamente indica la longitud -asociada a un signo- de la proyección perpendicular del vector \overrightarrow{pq} sobre \vec{v} .

Si el ángulo entre \vec{v} y \overrightarrow{pq} es menor a 90° el valor será positivo; si el ángulo supera los 90° (hasta 180°) el resultado será negativo.

Podemos obtener el vector $\overrightarrow{p'q'}$ multiplicando a $\overrightarrow{p'q'}$ por el vector \vec{v} normalizado (o sea de tamaño uno).

Así
$$\overrightarrow{p'q'} = \overrightarrow{p'q'} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\overrightarrow{pq} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rightarrow$$

$$\boxed{\text{proy}_{\vec{v}} \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'} = \left[\frac{\overrightarrow{pq} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right] \cdot \vec{v}} \quad \text{proyección del vector } \overrightarrow{pq} \text{ en la dirección del vector } \vec{v}$$

Si fuera \vec{v} un vector normalizado (consideramos a \hat{v}) la expresión se reduce a:

$$\boxed{\text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{pq} = (\overrightarrow{pq} \cdot \hat{v}) \hat{v}} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{proy.escalar}_{\hat{v}} \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pq} \cdot \hat{v}}$$

Ejemplo 6

Sea $\vec{A} = (3, -4, 0)$ y $\vec{B} = (2, -2, -1)$.

Obtener las proyecciones escalares y las proyecciones de \vec{A} sobre \vec{B} y de \vec{B} sobre \vec{A} .

Al ser más sencillas las expresiones con los vectores normalizados obtengamos \hat{A} y \hat{B} .

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{9+16+0} = 5; \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{4+4+1} = 3; \quad \hat{A} = \frac{(3, -4, 0)}{5} = \frac{1}{5} \cdot (3, -4, 0);$$

$$\hat{B} = \frac{(2, -2, -1)}{3} = \frac{1}{3} \cdot (2, -2, -1)$$

$$\text{Luego } \text{proy.escalar}_{\hat{B}} \vec{A} = \text{proy.escalar}_{\hat{B}} \vec{A} = \vec{A} \cdot \hat{B} = (3, -4, 0) \cdot \frac{(2, -2, -1)}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\text{proy}_{\hat{B}} \vec{A} = (\text{proy.escalar}_{\hat{B}} \vec{A}) \hat{B} = \frac{14}{3} \cdot \frac{(2, -2, -1)}{3} = \frac{14}{9} \cdot (2, -2, -1) = \left(\frac{28}{9}, -\frac{28}{9}, -\frac{14}{9} \right)$$

$$\text{proy.escalar}_{\hat{A}} \vec{B} = \text{proy.escalar}_{\hat{A}} \vec{B} = \vec{B} \cdot \hat{A} = (2, -2, -1) \cdot \frac{(3, -4, 0)}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\text{proy}_{\hat{A}} \vec{B} = (\text{proy.escalar}_{\hat{A}} \vec{B}) \hat{A} = \frac{14}{5} \cdot \frac{(3, -4, 0)}{5} = \frac{14}{25} \cdot (3, -4, 0) = \left(\frac{42}{25}, -\frac{56}{25}, 0 \right)$$

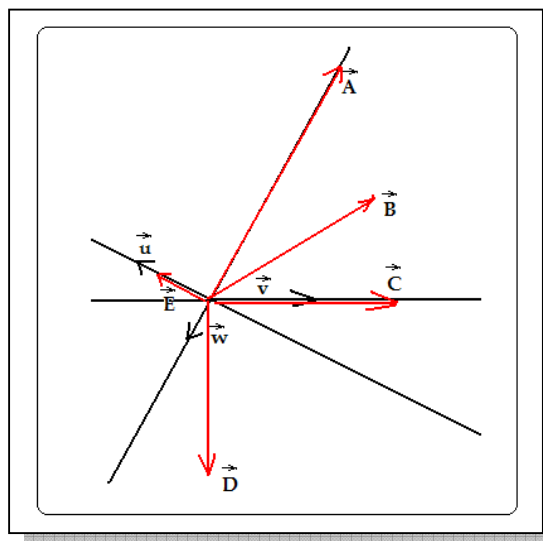
Resumiendo:

$$\text{proy.escalar}_{\hat{B}} \vec{A} = \frac{14}{3}; \quad \text{proy.escalar}_{\hat{A}} \vec{B} = \frac{14}{5};$$

$$\text{proy}_{\hat{B}} \vec{A} = \left(\frac{28}{9}, -\frac{28}{9}, -\frac{14}{9} \right); \quad \text{proy}_{\hat{A}} \vec{B} = \left(\frac{42}{25}, -\frac{56}{25}, 0 \right).$$

Actividad 15

a) Efectuar geoméricamente las proyecciones de los vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ sobre los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} .



b) Completar la tabla indicando si la proyección del vector sobre el otro da positiva, negativa o nula.

	Proyección escalar sobre estos vectores		
	\vec{u}	\vec{v}	\vec{w}
\vec{A}	0		
\vec{B}			
\vec{C}			< 0
\vec{D}			
\vec{E}			

c) Obtener las proyecciones de \vec{A} sobre \vec{B} y de \vec{B} sobre \vec{C} si $\vec{A} = (2, 4, -7)$, $\vec{B} = (1, -1, 1)$ y $\vec{C} = (6, -5, -11)$.

d) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores pertenecientes a R^3 .

Justificar si es verdadero o falso que si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{v}$.

Interprete la situación geoméricamente.

e) En el plano se tiene $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{v} = 4\vec{i} + \beta\vec{j}$.

Obtenga $\beta \in R$ -si existe-, tal que ocurra lo señalado en cada caso:

e.1] $\vec{u} \perp \vec{v}$ e.2] $\vec{u} // \vec{v}$ e.3] $\|\text{Proy}_{\vec{v}} \vec{u}\| = 3$ e.4] $\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$ ²³

II.6.4 Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Si $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ ($n \in \mathbb{N}$) se cumple:
$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \quad (\text{II.6.4.1})$$

donde las barras simples indican valor absoluto de un número real²⁴.

Demostración

a) Si alguno de los vectores es nulo tanto el producto escalar con otro vector como su norma se anula y por lo tanto la ecuación (II.6.4.1) se satisface.

b) Sean entonces ambos vectores *no nulos* y efectuemos el siguiente producto escalar:

$$(\vec{u} + \lambda \vec{v}) \bullet (\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \|\vec{u} + \lambda \vec{v}\|^2 \text{ donde } \lambda \text{ es un número real.}$$

La igualdad da un número real no negativo (la norma no puede serlo) y varía con λ .

²³ Al desarrollar el ejercicio obtendrá dos posibles soluciones, una de las cuales deberá ser descartada. Explique por qué y en cual paso debe establecerse alguna restricción para que no aparezca esa solución extraña.

²⁴ Antes de efectuar la demostración es interesante señalar que si hubiésemos arrancado con una presentación axiomática del producto escalar luego se define una noción de distancia y de ángulo.

Está última sería: si \vec{u} y $\vec{v} \neq \vec{0}$, el ángulo θ entre \vec{u} y \vec{v} es aquel entre 0 y π tal que $\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

Desarrollamos el lado izquierdo:

$$(\vec{u} + \lambda \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) + (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\lambda \vec{v}) \cdot (\lambda \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \vec{u} + \lambda^2 \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 = f(\lambda)$$

Respecto a λ tenemos una función cuadrática con coeficiente principal positivo ($\|\vec{v}\|^2$).

Como siempre es $f(\lambda) \geq 0$ (recordar el subrayado de más arriba) tiene una o ninguna raíz real (a lo sumo corta una sola vez al eje λ).

Por ende el discriminante es ≤ 0 .

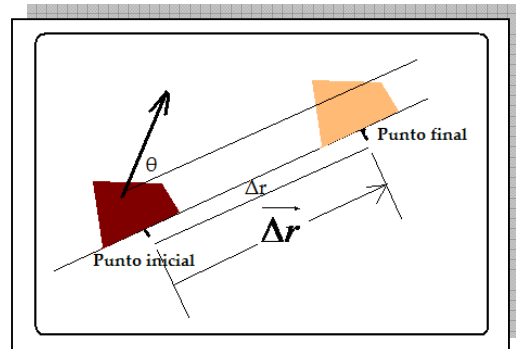
$$(2\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 \leq 0 \rightarrow 4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq 4\|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2$$

$$\rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 \rightarrow \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \leq \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ que es lo que se pretendía probar.}$$

II.6.5 Trabajo de una Fuerza

Si una fuerza constante \vec{F} se mantiene aplicada sobre un cuerpo que se desplaza un recorrido recto Δr (al cual le asociamos un vector $\vec{\Delta r}$ para incluir el sentido de movimiento), ésta produce un trabajo L dado por la expresión $L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$



Ejemplo 7

Si actúa una fuerza $\vec{F} = (-3, 4, 2)$ [en Newtons] a lo largo de la recta $r: (x, y, z) = (2, -1, 7) + t \cdot (-1, 3, 3)$ [en metros] desde $t=0$ hasta $t=4$ se tiene que:

a) Las posiciones iniciales y final son $(2, -1, 7)$ y $(-2, 11, 19)$.

b) Por lo tanto $\vec{\Delta r} = (-2, 11, 19) - (2, -1, 7) = (-4, 12, 12)$.

c) Luego $L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = (-3, 4, 2) \cdot (-4, 12, 12) = 12 + 48 + 24 = 84$ (en Newton por metros, o sea Joule).

Si la fuerza fuera variable o el recorrido no recto se hace un abordaje infinitesimal utilizando herramientas del Análisis Matemático.

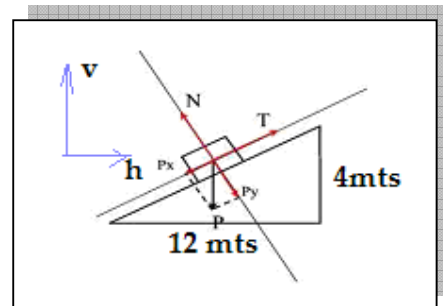
II.6.6 Descomposición de una fuerza en 2 y 3 direcciones.

A veces es preciso descomponer una fuerza en dos o tres direcciones. Nuestros aprendizajes permiten producir una respuesta.

Mostremos un ejemplo en el plano y otro en el espacio:

Ejemplo 8

a) Descomposición de la fuerza peso en el plano inclinado



Si un cuerpo sube a velocidad constante debe compensarse la componente en la dirección del plano (\vec{P}_x) con la acción de una fuerza \vec{T} ; por otro lado la resistencia del piso (\vec{T}) impide que nuestro cuerpo se hunda (debido a \vec{P}_y).

El problema se resuelve de manera sencilla usando trigonometría pero lo abordaremos desde otro ángulo.

Consideremos un vector \hat{v} en la dirección del plano unitario (o sea un versor) y otro \hat{w} en la dirección perpendicular. Nuestro sistema de referencia es **h-v**.

Un vector en la dirección del plano es (12; 4) o también (3; 1); si lo normalizamos nos da:

$$\hat{v} = \frac{(3;1)}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{(3;1)}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3;1);$$

uno perpendicular y en el sentido y dirección de la normal sería (-1; 3) –notar que la componente **v** vertical es positiva y el producto escalar da cero- que normalizado da

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1;3)$$

Supongamos que un peso de 20 N (aproximadamente 2kg de masa) quiere ser descompuesto en ambas direcciones. Para eso debe ocurrir que existan α y β tal que:

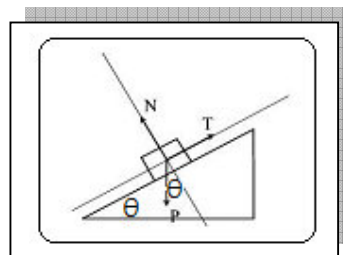
$$\vec{P} = (0; -20) = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3;1) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1;3) \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{3\alpha}{\sqrt{10}} - \frac{\beta}{\sqrt{10}} \\ -20 = \frac{\alpha}{\sqrt{10}} + \frac{3\beta}{\sqrt{10}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -20 = \frac{\alpha}{\sqrt{10}} + \frac{3\beta}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -20 = \frac{\alpha}{\sqrt{10}} + \frac{9\alpha}{\sqrt{10}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -20 = \frac{10\alpha}{\sqrt{10}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -2\sqrt{10} = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -6\sqrt{10} \\ -2\sqrt{10} = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -6\sqrt{10} \\ \alpha = -2\sqrt{10} \end{cases}$$

Luego

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3;1) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1;3) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{P}_x = -2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3;1) = (-6,-2) \\ \vec{P}_y = -6\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1;3) = (6,-18) \end{cases}$$



Observar que las componentes **h** y **v** de ambas componentes del peso dan con los signos correctos y además $\vec{P}_x + \vec{P}_y = \vec{P}$.

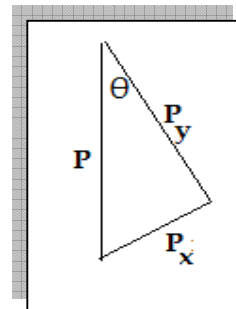
Además las normas de \vec{P}_x y \vec{P}_y son respectivamente $\sqrt{40} \approx 6,3246$ y $\sqrt{360} \approx 18,9737$.

En Física la situación se resuelve utilizando trigonometría:

$$P_x = P \cdot \sin\theta \text{ y } P_y = P \cdot \cos\theta, \text{ tg}\theta = 4/12 \rightarrow \theta = 18^\circ 26' 6''$$

$$P_x = 20 \cdot \sin(18^\circ 26' 6'') \text{ y } P_y = 20 \cdot \cos(18^\circ 26' 6'')$$

$P_x = 6,3246$; $P_y = 18,9737$; se observa que coinciden ambos resultados.



b) Veamos una descomposición en el espacio.

Sea $\vec{F} = (14; -5; 13)$ N; hallar las componentes en las direcciones de los vectores $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -1)$ y $\vec{v}_3 = (0, 1, 2)$.

Sean \vec{F}_1, \vec{F}_2 y \vec{F}_3 las componentes según esas tres direcciones.

O sea $\vec{F} = F_1 \cdot \hat{v}_1 + F_2 \cdot \hat{v}_2 + F_3 \cdot \hat{v}_3$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, -2, 3), \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2, 0, -1) \quad \text{y} \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0, 1, 2).$$

$$\vec{F} = F_1 \cdot \hat{v}_1 + F_2 \cdot \hat{v}_2 + F_3 \cdot \hat{v}_3 = F_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, -2, 3) + F_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2, 0, -1) + F_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0, 1, 2) \quad \text{y para no trabajar con}$$

$$\text{raíces cuadradas consideremos a } \alpha = F_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}, \beta = F_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \gamma = F_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(14, -5, 13) = \alpha \cdot (1, -2, 3) + \beta \cdot (2, 0, -1) + \gamma \cdot (0, 1, 2)$$

$$\begin{cases} 14 = \alpha + 2\beta \\ -5 = -2\alpha + \gamma \\ 13 = 3\alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14 - \alpha = 2\beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 13 = 3\alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 - \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 13 = 3\alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 - \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 13 = 3\alpha - 7 + \frac{1}{2}\alpha - 10 + 4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 13 = 7,5\alpha - 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 - \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 30 = 7,5\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 - \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ -5 + 2\alpha = \gamma \\ 4 = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = \beta \\ 3 = \gamma \\ 4 = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_2 = 5 \cdot \sqrt{5} \\ F_3 = 3 \cdot \sqrt{5} \\ F_1 = 4 \cdot \sqrt{14} \end{cases}$$

$$\vec{F} = F_1 \cdot \hat{v}_1 + F_2 \cdot \hat{v}_2 + F_3 \cdot \hat{v}_3 = 4 \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, -2, 3) + 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2, 0, -1) + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0, 1, 2)$$

$$\vec{F}_1 = (4, -8, 12), \quad \vec{F}_2 = (10, 0, -5) \quad \text{y} \quad \vec{F}_3 = (0, 3, 6).$$

II.6.7 Producto vectorial

Una nueva operación **definible únicamente entre vectores de \mathbb{R}^3** es el **producto vectorial**.

Si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y \cdot v_z - v_y \cdot u_z; u_z \cdot v_x - v_z \cdot u_x; u_x \cdot v_y - v_x \cdot u_y)$$

Recordar la fórmula anterior es un poco tedioso por lo que se utiliza la siguiente regla práctica que más adelante se asimilará al concepto de determinantes.

Una **matriz** es una disposición de números en filas y columnas. Definimos determinante de una matriz cuadrada –igual cantidad de filas que de columnas– de dos filas y dos columnas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ –a, b, c y d son números– del siguiente modo}^{25}:$$

²⁵ Las barras en vez del corchete o el paréntesis de una matriz “cuadrada” indica el determinante de dicha matriz. A lo largo del curso profundizaremos sobre “matrices” y “determinantes”.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c; \text{ por ejemplo } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - 4.(-5) = 38$$

A continuación para efectuar $\vec{u} \wedge \vec{v}$ disponemos en una matriz de 3x3 los tres versores canónicos de \mathbb{R}^3 y luego dos filas ordenadas para \vec{u} y \vec{v} .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & u_y & u_z \\ \hat{j} & u_x & u_z \\ \hat{k} & u_x & u_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{i} & v_y & v_z \\ \hat{j} & v_x & v_z \\ \hat{k} & v_x & v_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & u_y & v_z \\ \hat{j} & u_x & v_y \\ \hat{k} & u_x & v_y \end{vmatrix} \quad \text{donde hemos suprimido los}$$

elementos de la fila y de la columna de cada versor en forma selectiva. El signo menos (-) antes del segundo determinante lo aplicamos aquí "por decreto" y tendrá su explicación en el momento de desarrollar el tema determinantes.

Esto último se traduce como:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \hat{i} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \hat{i} (u_y.v_z - u_z.v_y) - \hat{j} (u_x.v_z - u_z.v_x) + \hat{k} (u_x.v_y - u_y.v_x) \quad (**)$$

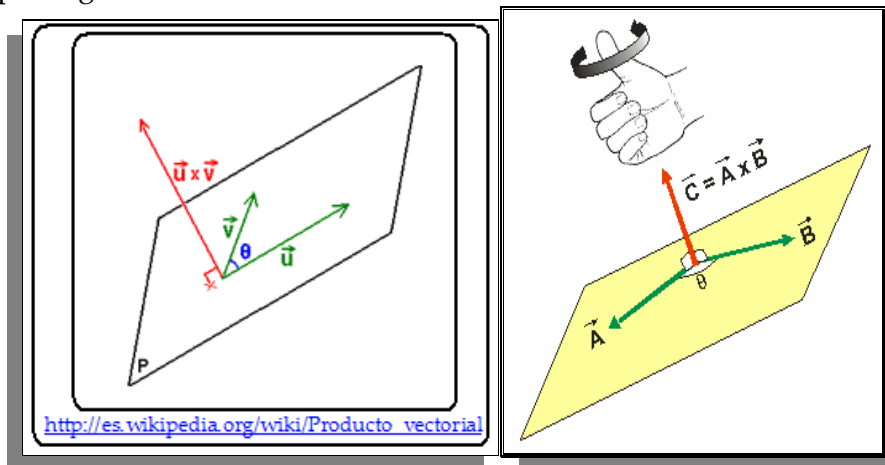
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \hat{i} (u_y.v_z - u_z.v_y) + \hat{j} (u_z.v_x - u_x.v_z) + \hat{k} (u_x.v_y - u_y.v_x)$$

Observar que ambas expresiones (*) y (**) son coincidentes.

$$\text{Así } (-3, 2, 4) \wedge (5, 0, -6) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}.(-12) - \hat{j}.(-2) + \hat{k}.(-10) = (-12, 2, -10)$$

- El producto vectorial resulta ser un nuevo vector que es perpendicular a cada uno de los vectores que lo generaron.



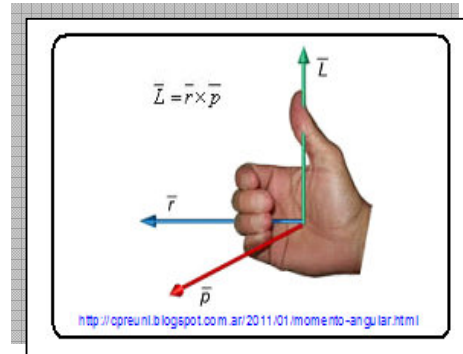
En nuestro caso $(-12, 2, -10) \perp (-3, 2, 4)$ pues $(-12, 2, -10).(-3, 2, 4) = 36 + 4 - 40 = 0$ y $(-12, 2, -10) \perp (5, 0, -6)$ puesto que $(-12, 2, -10).(5, 0, -6) = -60 + 0 + 60 = 0$.

Hagámoslo en forma genérica:

$$\begin{aligned}\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} &\Rightarrow (u_x, u_y, u_z) \bullet (u_y v_z - v_y u_z; u_z v_x - v_z u_x; u_x v_y - v_x u_y) \\&= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x \\&= \underline{u_x u_y v_z} - \underline{u_x u_z v_y} + \underline{u_y u_z v_x} - \underline{u_y u_x v_z} + \underline{u_z u_x v_y} - \underline{u_z u_y v_x} = 0\end{aligned}$$

De forma análoga probar que $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Geométricamente (si los vectores son no nulos y no paralelos) podemos ubicar al vector producto vectorial de dos vectores -a través de la *regla de la mano derecha*- en una recta que es perpendicular al plano que determinan los vectores componentes.



El sentido del vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define por dicha *regla*:

Se coloca la mano derecha en el origen común de los dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , y se flexionan los de esa mano partiendo de \mathbf{A} hacia \mathbf{B} . El pulgar extendido define la dirección del vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.²⁶

II.6.7.1 Propiedades del producto vectorial entre vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores de R^3 y $\lambda \in R$ entonces:

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 : \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ [anticonmutatividad]
- $\forall \vec{u} \in R^3 \wedge \vec{0} \in R^3 : \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall \vec{u} \in R^3 : \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 \wedge \forall \lambda \in R : (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$
- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3 : \begin{cases} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}) \\ (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{u}) \end{cases}$ pero $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = -[(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u}]$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 : \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$ [Identidad de Lagrange]
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \hat{\theta}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3 \wedge \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

Todas las propiedades pueden obtenerse a partir de la definición.

• Para cada propiedad exprese en lenguaje coloquial qué significa.

Por ejemplo en a): “el producto vectorial entre dos vectores resulta dar el *vector opuesto* si la operación se efectúa en el orden inverso”.

Nos detendremos un momento en las dos últimas.

De g) se deduce:

El módulo del producto vectorial de dos vectores nos da el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores.

²⁶ <http://cpreuni.blogspot.com.ar/2010/08/producto-vectorial.html>

Utilizando el esquema se observa:

$$\mathbf{A} = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

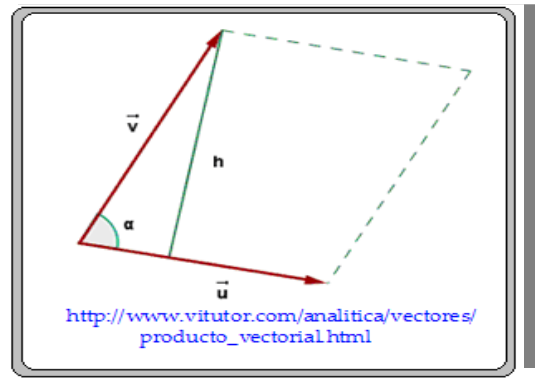
Para la propiedad h) se parte de g);

$$\text{si } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0 \rightarrow 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \hat{\theta} \rightarrow$$

$$0 = \sin \hat{\theta} \rightarrow \theta = 0^\circ \text{ ó } \theta = 180^\circ.$$

Análogamente si los vectores son paralelos resulta $\theta = 0^\circ$ ó $\theta = 180^\circ$

$$\rightarrow \sin \hat{\theta} = 0 \rightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0 \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$



Actividad 16

a) Si $\vec{u} = (-3, 2, 5)$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ calcular $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{u}$, $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ y $\|2\vec{u} \times (-3)\vec{v}\|$ (comparar las normas de estos dos últimos).

¿Cuál es el área del paralelogramo de vértices O, \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} + \vec{v}$?

b) Sean $\vec{u} = (-3, 4, -2)$; $\vec{v} = (1, -4, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 4)$. Hallar -si fuera posible-:

$$1) \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \quad 2) (\vec{u} \bullet \vec{v}) \times \vec{w} \quad 3) \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}) \quad 4) \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{v}) \quad 5) (\vec{u} \times \vec{w}) + \vec{v} \quad 6) \vec{u} \bullet (\vec{v} \bullet \vec{w})$$

c) Determine si es verdadero o falso, justificando su respuesta:

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3 \text{ y } \forall k \in R$$

$$1) (\vec{u} + k\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} \quad 2) (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$3) \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad 4) \vec{u} = (-1, 1, 0) \wedge \vec{v} = (-1, x, x) \Rightarrow \vec{u} // \vec{v} \quad \forall x \in R$$

II.6.8 Producto mixto

El producto mixto sólo es posible en R^3 y se define así:

Si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ es $\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$; el resultado es un número real y primero se efectúa el producto vectorial entre los dos primeros vectores y al resultado se lo multiplica escalarmente por el tercer vector.

Recordando que $\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - v_y u_z)\vec{i} - (u_x v_z - v_x u_z)\vec{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\vec{k}$ resulta que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = w_x u_y v_z - w_x v_y u_z - w_y u_x v_z + w_y v_x u_z + w_z u_x v_y - w_z v_x u_y$$

Ejemplo 9

Si $\vec{u} = (3, 0, -1)$, $\vec{v} = (-2, 5, 1)$ y $\vec{w} = (-1, -3, 4)$ es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (-1, -3, 4) \bullet \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 4) \bullet (5, -1, 15) = -5 + 3 + 60 = 58.$$

II.6.8.1 Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto

Tres vectores \vec{u} , \vec{v} , $\vec{w} \in R^3$ -con origen en O- generan un paralelepípedo cuyas tres aristas concurrentes son esos vectores.

El volumen de éste está dado por el producto de la superficie de la base por su altura:

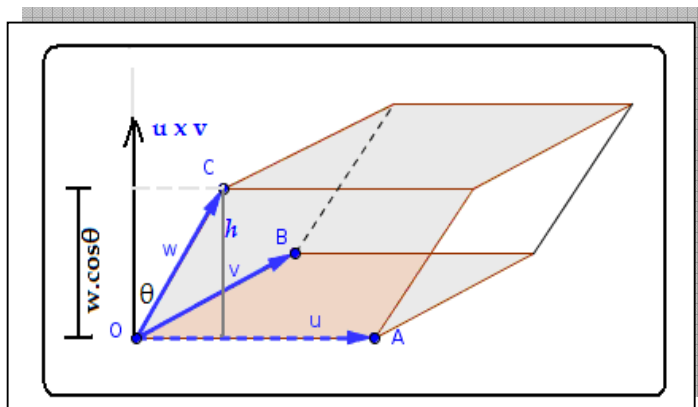
$$\text{Volumen} = \text{sup. base} \times \text{long. altura}$$

Como la superficie de la base puede obtenerse por la norma del producto vectorial de los vectores aristas se tiene:

$$V = h \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

Pero $h = \|\vec{w}\| |\cos \theta|$ (ponemos valor absoluto pues el módulo puede ser negativo)

$$\text{Volumen} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| |\cos \theta| = \|\vec{w} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})\|$$



O sea que el valor absoluto del producto mixto entre tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo determinados por esos tres vectores.

II.6.8.2 Condición de coplanaridad entre tres vectores en R^3

Tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ se denominarán coplanares si sus direcciones quedan incluidas en el mismo plano. Si esto ocurriera no formarían un paralelepípedo o equivalentemente su volumen daría cero por lo que podemos resaltar el siguiente resultado:

Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$, no nulos, serán coplanares si y sólo si el producto mixto entre ellos da cero.

Actividad 17

a) Si los puntos $A = (1, 3)$, $B = (4, -2)$ y $C = (-3, 6)$ son los vértices de un triángulo determine la amplitud de sus ángulos interiores.

b) Sean los puntos: $A = (3, 2, -1)$, $B = (3, 3, 3)$ y $C = (6, 4, -2)$

1) Determine si están alineados

2) ¿ $\vec{F} = (-2, 3, 1)$ es coplanar con ellos?

3) Halle el perímetro del triángulo determinado por los puntos A, B y C y su área.

4) ¿Qué punto D determina un paralelogramo de vértices ABCD –en ese orden–?

¿Cuánto vale su área?

c) Si $\vec{u} = (-2, 0, 3)$; $\vec{v} = (1, -1, -a)$ y $\vec{w} = (3, a, 9)$ obtenga $a \in R$ tal que los vectores resulten coplanares. Mostrar las ternas de vectores que obtiene.

¿Para que valores de a resulta que \vec{u}, \vec{v} y \vec{i} determinan un paralelepípedo de volumen 12, si $\vec{i} = (3, 1, -4)$?

d) Demostrar que los vectores del plano $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ y $\vec{v} = -b\hat{i} + a\hat{j}$ son ortogonales para cualquier a y b reales.

e) Hallar los valores de k para que:

1) El ángulo entre $\vec{u} = (3k, 4k, 5)$ y $\vec{v} = (0, k, -1)$ sea de 60° .

2) El área del paralelogramo de lados \vec{u} y \vec{v} sea de $\sqrt{6}$, con $\vec{u} = (-2, k, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

f) Si $A = (1, -1, 2)$, $B = (1, 3, -1)$ y $C = (-3, -4, 2)$ probar que:

1) Los puntos A, B y C determinan un triángulo isósceles de base BC.

2) La bisectriz del ángulo A contiene a la altura del lado BC y a la mediana de dicho lado.

g) Si $\vec{q} = (-2, 3, -6)$, $\vec{r} = (-1, -2, 1)$, hallar un vector \vec{t} que sea perpendicular a \vec{q} y \vec{r} simultáneamente y que su módulo sea 12.

h) Si $\vec{u} = (0, 3, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4, 2)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 1)$, hallar \vec{r} tal que $\vec{r} \perp \vec{u}$, $\vec{r} \perp \vec{v}$ y $\|\text{Proy}_{\vec{w}} \vec{r}\| = 6$.

i) Sea $\|\vec{u}\| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$; hallar $\vec{u} \cdot \vec{w}$ si $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

j) Hallar a y b reales si $\vec{v} // \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{u}$ con $\vec{u} = (-a, -1, -b)$, $\vec{w} = (\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$ y $\vec{v} = (a, 2b, a)$.

II.7 Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y su geometría

a) Consideramos las rectas $r_1: y = -x + 2$ y $r_2: 4x + 3y = 3$.

Es sencillo graficarla (¡hacerlo!) pero nuestra atención es hacia la siguiente cuestión:

¿Existirá algún punto P que pertenezca a ambas rectas?

El esquema siguiente nos dará una idea pero no se representa al ejemplo numérico dado.

Se observa que casi siempre tomando un valor x los valores verticales y que corresponden a las rectas son diferentes, o sea $y_{R1} \neq y_{R2}$.

Pero sucede que en el punto de intersección de ambas líneas $(x_p; y_p)$ para el valor x_p resulta el valor vertical de ambas idéntico.

En nuestra situación se tendría:

$$\begin{cases} y_p = -x_p + 2 \\ 4x_p + 3y_p = 3 \end{cases}$$

Esto recibe el nombre de **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**.

Se puede resolver sustituyendo en este caso la primera ecuación en la segunda.

$$4x_p + 3(-x_p + 2) = 3 \rightarrow 4x_p - 3x_p + 6 = 3 \rightarrow x_p = 3 - 6 \rightarrow x_p = -3$$

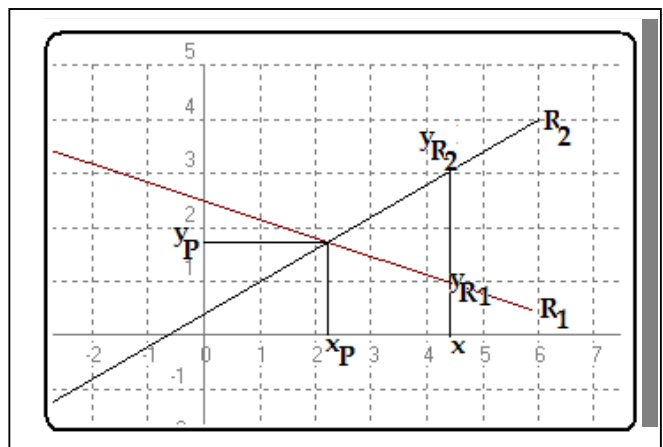
Al regresar a la primera ecuación se

obtiene: $y_p = -(-3) + 2 = 5$

Resulta que el punto de intersección es $P = (-3; 5)$.

Por seguridad es conveniente verificar la ecuación utilizada para el cálculo de y_p .

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde existe un **único** par ordenado $(x; y)$ que las cumple a ambas se denomina **sistema compatible determinado**. Si no hay



ningún par ordenado que las verifique se llama *sistema incompatible*; si existen infinitos pares que satisfacen a ambas se trata de un *sistema compatible indeterminado*.

Actividad 18

- i) Graficar en un sistema de referencia tres situaciones donde se muestren los tres casos recién presentados.
- ii) Dar la expresión de 3 parejas de rectas cada una de las cuales corresponda a cada caso.
- iii) Analice qué situaciones pueden aparecer al hallar la intersección entre tres rectas. Realice la interpretación gráfica.

b) Veamos esta otra situación y una nueva técnica para llegar a la solución.

Se pretende resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 & \text{ecuación 1} \\ 6x + 7y = 23 & \text{ecuación 2} \end{cases}$$

¿Cambia el sistema si a la ecuación 1 la multiplicamos por 3? (a)

$$S': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ecuación 3} \\ 6x + 7y = 23 & \text{ecuación 2} \end{cases}$$

¿Qué ocurre si a la ecuación 2 le restamos la ecuación 3?

Pensar que aquí estamos restando el número 39 (que equivale a $6x - 9y$) (b)

$$S'': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ecuación 3} \\ 6x + 7y - (6x - 9y) = 23 - 39 & \text{ec. 4} \end{cases}$$

$$S''': \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ec. 3} \\ 16y = -16 & \text{ec. 4} \end{cases}$$

$$S''': \begin{cases} 2x - 3y = 13 & \text{ec. 1} \\ 16y = -16 & \text{ec. 4} \end{cases} \quad [\text{la ec. 1 tiene valores más pequeños que facilitan el despeje}]$$

Podemos ver que S'' es *fácilmente resoluble*.

De la ec. 4 resulta $y = -1$; reemplazando en la ec. 3 se tiene $2x + 3 = 13 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$

El par $(5; -1)$ satisface las ecuaciones de los 4 sistemas: S, S', S'' y S''' (¡hacer las cuentas!).

Las operaciones (a) y (b) son *operaciones elementales entre ecuaciones*; le podríamos agregar la de permutar el orden en las ecuaciones (c). Además la ec. 4 podría pensarse como la suma de la ec. 2 con la ec. 1 multiplicado por (-3) .

Los 4 sistemas ejemplificados tienen el mismo conjunto solución: se dice que son *equivalentes*.

Generalizando lo efectuado en el ejemplo podemos recopilar:

Dado un sistema S con n ecuaciones lineales se consigue un sistema S' equivalente a través de cualquiera de estas tres operaciones elementales entre ecuaciones:

a) Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.

b) A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.

c) A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta por un múltiplo de otra (el factor de multiplicación podría ser cero pero no sería muy útil ya que $S' = S$).

Estas operaciones permitirán resolver ecuaciones por el **Método de Gauss** (y de **Gauss-Jordan**) que abordaremos más adelante.

A propósito se han ordenado los cuatro sistemas escribiendo las variables x e y en ese orden; se podría haber elegido al revés pero es fundamental *optar por uno*.

Los coeficientes que acompañan a las variables y los términos independientes (más allá del igual) pueden distribuirse en un *arreglo rectangular* llamado **matriz** (algo se presentó al introducir el “Tratamiento digital de Imágenes” en la página 14).

Vinculado a cada sistema se tiene una serie de matrices pero por ahora nos focalizaremos en la **matriz ampliada** del sistema que llamemos M , M' , M'' y M''' .

Ellas son:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 6 & 7 & 23 \end{bmatrix}; M' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 39 \\ 6 & 7 & 23 \end{bmatrix}; M'' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 39 \\ 0 & 16 & -16 \end{bmatrix}; M''' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 0 & -16 & 16 \end{bmatrix}$$

Esta disposición (dentro de otras particularidades) impide la dispersión que pudieran hacer las variables sobre nuestro desarrollo algebraico y de alguna manera *lo automatiza*.

Cada una de las cuatro matrices presentadas tiene 2 filas y 3 columnas. Las primeras representan en nuestra situación a las ecuaciones y las segundas a las variables – ordenadas- y a los términos independientes.

Las operaciones elementales entre ecuaciones pueden pensarse como **operaciones elementales entre filas**.

Analice puntillosamente cuáles fueron las operaciones que permitieron ir de la matriz M hasta la M''' .

Si tuviésemos el sistema $\begin{cases} 2x - y + 4z = 13 \\ 3y - z = 4 \\ 10z = 50 \end{cases}$ cuya matriz ampliada de 3 filas y 4 columnas es

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{array} \right); \text{ la solución es } z=5; 3y - 5 = 4 \rightarrow y = 3; 2x - 3 + 20 = 13 \rightarrow x = -2.$$

Evidentemente podemos resolver el sistema desde las ecuaciones iniciales pero la matriz con tanto ceros y estratégicamente ubicados facilita la resolución. Es por eso que se nos hace necesario un tratamiento individual y más profundo.

II.8 Matrices. Definición. Orden.

Una matriz es una tabla de números dispuestos en filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales). Sus **elementos** son números reales o complejos y su **dimensión, tamaño** u **orden** es la cantidad de filas y de columnas que posee. Tenemos matrices de 3×2 (3 filas, 2 columnas), de 4×1 (4 filas, 1 columna), etc.

La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ tiene una dimensión de 2×3 y decimos que es rectangular; en cambio $B = \begin{bmatrix} 2^5 & -7 \\ 7 & 1,2 \end{bmatrix}$ es de 2×2 y se denomina cuadrada (se abrevia cuadrada de orden 2); como los coeficientes son números reales se dice que $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Las matrices las simbolizaremos con letras mayúsculas. El elemento que aparece en la fila i y la columna j de la matriz A se le nombra como a_{ij} . Por ejemplo $a_{12} = -1$ y $b_{21} = 7$.

Una matriz $C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ tendría la siguiente forma general:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} = [c_{i,j}]_{1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 2} \text{ en donde cualquier } c_{ij} \text{ toma un valor real.}$$

En general una matriz de orden $n \times m$ es un arreglo así

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \bullet & \bullet & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \bullet & \bullet & d_{2m} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ d_{n1} & d_{n2} & \bullet & \bullet & d_{nm} \end{bmatrix} = [d_{i,j}]_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$

II.8.1 Igualdad entre matrices

Dos matrices U y V son iguales si tienen la misma dimensión ($m \times n$) y vale:

$$u_{i,j} = v_{i,j} \text{ con } 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n.$$

Esto significa que los valores en posiciones idénticas tienen que ser iguales.

Ejemplo 10

Si $U = V$ con $U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} a+b & 1-b & 1 \\ -7 & c+a & b+a-c \end{bmatrix}$ debe ocurrir que

- (1) $2 = a + b$
- (2) $-4 = 1 - b \rightarrow b = 5 \rightarrow$ de (1) sale $a = -3$
- (3) $-1 = c + a \rightarrow$ de (1) y (2) sale $c = 2$
- (4) $0 = b + a - c$ Se cumple pues $0 = 5 + (-3) - 2$

Actividad 19

- a) Escriba matrices reales de los siguientes órdenes: 3×4 ; 4×3 ; 2×1 ; 1×2 y 3×3
- b) Explicite $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.
- c) Ídem para $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ con $b_{ij} = i^2 - 3j$
- d) Una matriz se llama **columna** si es de orden $n \times 1$. De 3 ejemplos de diferente tamaño. Suelen llamarlas **vector columna**.
- e) ¿A cuál tipo de matriz se denominará **vector fila**? Ejemplifique.
- f) Una matriz con todos los coeficientes iguales a 0 se llama **matriz Nula** o **Cero** (**N** o **O**).

¿Cuáles son las matrices nulas para 2x5 y 4x4?

g) La siguiente matriz G es de orden 3x5:
$$G = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 3,2 & -2 & -0,3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Los elementos g_{ii} se llaman **elementos diagonales**. ¿Qué valores puede tomar i en este caso? ¿Cuáles son los elementos diagonales?

La matriz G puede pensarse como formada por tres vectores filas G_1 , G_2 y G_3 . Escribirlos.

Se acostumbra anotar a $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}.$

De forma similar se reconocen 5 vectores columnas G^1 , G^2 , G^3 , G^4 , G^5 de forma tal que es $G = \begin{bmatrix} G^1 & G^2 & G^3 & G^4 & G^5 \end{bmatrix}.$ Anotar los G^i .²⁷

h) Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son nulas se llama **matriz diagonal**.

Escriba una de orden 2 y orden 4. ¿Es la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ diagonal?

¿Cómo simbolizaría a las matrices cuadradas de orden 3?

i) Una matriz diagonal tal que sus elementos de la diagonal principal sean idénticos se dice **escalar**. De 2 ejemplos de diferente orden.

j) Una matriz escalar con unos en la diagonal se llama **matriz identidad**. Escribir $I^{2 \times 2}$, $I^{3 \times 3}$.

k) Si H es una matriz de mxn se defina **transpuesta** de H (se anota H^T) a la matriz de dimensión nxm tal que los vectores fila de H son los vectores columnas de H^T . O simbólicamente:

$$[H^T]_{ij} = [H]_{ji} \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Escribir las transpuestas de las siguientes matrices:

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}; H' = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{11} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}; H'' = \begin{bmatrix} 3 & -5,5 & \sqrt{17} \\ \frac{1}{4} & 0 & -12 \\ 5^2 & 4 & -9 \\ 7 & 0,45 & -4 \\ 1 & -9 & 59 \end{bmatrix}; H''' = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}.$$

l) Una matriz cuadrada se llama **simétrica** si es igual a su transpuesta.

Ejemplifique tres matrices simétricas de diferente dimensión.

Indique una regla en lenguaje coloquial para decidir si una matriz cuadrada es o no simétrica.

ll) Una matriz cuadrada L se llama **antisimétrica** si $[L]_{ij} = -[L]_{ji}$.

De 3 ejemplos. Dar una regla en lenguaje coloquial.

²⁷ Esta notación es la más usada pero puede llevar a ambigüedad pues puede confundirse con la potencia de una matriz que se definirá más adelante.

m) Una matriz se denomina:

triangular superior si todas las entradas por debajo de la diagonal principal se anulan;

triangular inferior si todas las entradas por encima de la diagonal principal son nulos.

Brindar ejemplos de ambas en $\mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\mathbb{R}^{4 \times 3}$.

II.8.2 Operaciones entre matrices

a) Solo podemos definir la **suma** para matrices del mismo orden.

Sean A y $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$; se define una matriz suma S así: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Por ejemplo
$$\begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 & \pi \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -10 & 7 & -6 \\ 23 & 0 & -3,2 & \sqrt{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & \pi-6 \\ 24 & -3 & 0,8 & \sqrt{17} \end{bmatrix}$$

b) **Producto de un escalar por una matriz**

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$ definimos la matriz $[k.A]$ como $[k.A]_{ij} = k \cdot [A]_{ij}$

$$(-4) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 & \pi \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -40 & -8 & -4\pi \\ -4 & 12 & -16 & 0 \end{bmatrix}$$

Definidas estas dos operaciones podemos pensar a la resta como una combinación de ambas: $A-B = A + (-1) \cdot B$

Desafío 2

Regresar a II.1.3.1, página 24, al comentario sobre Estructura de Espacio Vectorial.

Demostrar que $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es un espacio vectorial real sobre las matrices utilizando las dos operaciones recientemente definidas.

c) **Producto entre matrices**

En II.2.2 y II.6.2 trabajamos con el producto escalar entre vectores. Si tenemos dos vectores con n componentes cada uno el producto escalar entre ambos es el número que se obtiene al efectuar la sumatoria de los productos entre las parejas de componentes.

Más claramente

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n) \text{ y } \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, w_n) \\ \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 + \dots + v_{n-1} \cdot w_{n-1} + v_n \cdot w_n \end{aligned}$$

Vamos a definir el producto entre una matriz vector fila y una matriz vector columna en este orden.

Sea $V \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ y $W \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el resultado de $V.W$ es un número real obtenido al realizar la

cuenta $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 + \dots + v_{n-1} \cdot w_{n-1} + v_n \cdot w_n$ donde $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ y $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

El siguiente esquema puede usarse como facilitador gráfico.

$$\begin{array}{c|c}
 V \cdot W & \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\
 \hline
 \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} & [v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n]
 \end{array}$$

Si $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ resulta que $A \cdot B = [6 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-6) + (-8) \cdot 0] = [12]$

Ponemos la respuesta entre corchetes pues el resultado es una **matriz de 1x1**.

Producido el primer paso se puede intentar la generalización del producto de $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $W \in \mathbb{R}^{n \times q}$.

Se piensa a V considerando m vectores filas de n elementos, $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix}$

y a W como q vectores columnas de p elementos $W = \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{p1} & w_{p2} & \dots & w_{pq} \end{bmatrix}$

La siguiente disposición nos facilitará la comprensión de lo que se pretende inducir.

$$\begin{array}{c|c}
 V \cdot W & \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^q \\ \hline w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{p1} & w_{p2} & \dots & w_{pq} \end{bmatrix} \\
 \hline
 \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{array} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Para llenar cada celda se debe efectuar el producto de una matriz fila por una correspondiente columna donde ambas tengan la misma cantidad de componentes. Por lo tanto **n debe ser igual a p** . O sea sólo se puede multiplicar matrices donde la primera tenga igual cantidad de columnas que tiene por filas la segunda.

Además el producto tiene **m filas por q columnas**.

Ejemplo 11

$$\text{Sean } U = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuál de los siguientes productos están definidos?

U.Z; Z.U; U.T; T.U; Z.T; Z.R; R.Z; U.R; R.U; T.R; R.T

Conviene escribir las dimensiones de ambas matrices en el orden del producto y comparar número de columna con número de fila.

$$U.Z: 3 \times 2 \bullet 2 \times 3 \rightarrow 3 \times 3$$

$$Z.U: 2 \times 3 \bullet 3 \times 2 \rightarrow 2 \times 2$$

$$U.T: 3 \times 2 \bullet 1 \times 3 \text{ no se puede}$$

$$T.U: 1 \times 3 \bullet 3 \times 2 \rightarrow 1 \times 2$$

$$Z.T: 2 \times 3 \bullet 1 \times 3 \text{ no se puede}$$

$$Z.R: 2 \times 3 \bullet 3 \times 1 \rightarrow 2 \times 1$$

Las restantes quedan de tarea.

b) Efectuar $Z.U \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -33 \\ 8 & -20 \end{bmatrix}$ –ver disposición de ayuda-

c) Completar los productos dados en a) que sean posibles de resolver.

d) Notar que con los primeros ejemplos surge que la propiedad conmutativa no se cumple: existiendo A.B puede no existir B.A o existir B.A y ser de diferente tamaño o no coincidir con A.B.

Mostrar ejemplos con las tres posibilidades.

Dar un ejemplo donde la propiedad sea válida.

Z.U	$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3+20+7 & 2+0-35 \\ 0+4+4 & 0+0-20 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 30 & -33 \\ 8 & -20 \end{bmatrix}$

Actividad 20

a) Obtener una matriz $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \frac{1}{3}.G - A^2 + 4 B.C = D^T$

con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (Nota: $A^2 = A.A$)

b) Si $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ efectuar $T.I^{2 \times 2}$ e $I^{3 \times 3}.T$; extraer conclusiones.



Actividad de refuerzo 10

(I) a) Dar una matriz escalar de 4×4 y otra triangular superior de 5×3 .

b) Si $M = \begin{bmatrix} k+3 & k^2 \\ -6k & 1-k \end{bmatrix}$, hallar k para que M sea simétrica. Dar las M .

c) Sea A de $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ / $a_{ij} = i^2 - 3j$. Indicar quién es A .

Sea $B = \begin{bmatrix} -1 & \alpha + 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; sabiendo que $(A \cdot B)_{12} = 7$, hallar α y $A \cdot B$ y $B \cdot A$

(II) Si $M = \begin{bmatrix} -1 & 3a & 4 \\ 2a+5 & -3 & 0 \\ b+1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

a) Establezca los valores de a y b reales para que ocurra que la matriz M sea:

i) Simétrica; ii) triangular superior.

Nota: cada ítem es independiente del otro.

b) Explique porque no hay valores de a y b para que M sea antisimétrica.

c) Extraiga una matriz columna de 3×1 de la matriz M (elijan usted el a y b si fuera necesario).

Propiedades del producto entre matrices

El producto entre matrices cumple las siguientes relaciones:

1- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ [Asociativa]

Para probar la propiedad debemos ver que un elemento genérico del lado izquierdo coincide con el correspondiente elemento genérico del lado derecho.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$$[A \cdot (B \cdot C)]_{ij} = [(A \cdot B) \cdot C]_{ij}$$

Según se vio al definir producto vale (tomar lápiz y papel):

$$[A \cdot (B \cdot C)]_{ij} = A_{i \cdot} \cdot (B \cdot C)^j = A_{i \cdot} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \cdot C^j \\ B_2 \cdot C^j \\ \vdots \\ B_n \cdot C^j \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot B_1 C^j + a_{i2} \cdot B_2 C^j + \dots + a_{in} \cdot B_n C^j \quad (1)$$

$$[(A \cdot B) \cdot C]_{ij} = (A \cdot B)_{i \cdot} \cdot C^j = \begin{bmatrix} A_i \cdot B^1 & A_i \cdot B^2 & \dots & A_i \cdot B^p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{bmatrix} = A_i B^1 \cdot c_{1j} + A_i B^2 \cdot c_{2j} + \dots + A_i B^p \cdot c_{pj} \quad (2)$$

Partiendo de (1) lleguemos a (2).

$$(1) = a_{i1} \cdot [b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1p}] \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{bmatrix} + \dots + a_{in} \cdot [b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{np}] \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{bmatrix} =$$

(ubicamos en fila para facilitar la comprensión)

$$= a_{i1} \cdot [b_{11} c_{1j} + b_{12} c_{2j} + \dots + b_{1p} c_{pj}] + \dots$$

$$a_{in} \cdot [b_{n1} c_{1j} + b_{n2} c_{2j} + \dots + b_{np} c_{pj}]$$

$$= a_{i1} \cdot b_{11} c_{1j} + a_{i1} \cdot b_{12} c_{2j} + \dots + a_{i1} \cdot b_{1p} c_{pj} + \dots$$

$$a_{in} \cdot b_{n1} c_{1j} + a_{in} \cdot b_{n2} c_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{np} c_{pj}$$

(si observamos la los primeros términos encolumnados –y los segundo, hasta p)

$$(a_{i1} \cdot b_{11} + \dots + a_{in} \cdot b_{n1}) \cdot c_{1j} + (a_{i1} \cdot b_{12} + \dots + a_{in} \cdot b_{n2}) \cdot c_{2j} + \dots + (a_{i1} \cdot b_{1p} + \dots + a_{in} \cdot b_{np}) \cdot c_{pj} =$$

$$[A_i \cdot B^1 + A_i \cdot B^2 + \dots + A_i \cdot B^p] \cdot C^j \quad (2)$$

Dejamos como tarea probar lo siguiente (según el caso escriba alguna matriz en notación por filas o columnas):

2- $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ [Distributiva respecto a la suma por izquierda]

3- $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ [Distributiva respecto a la suma por derecha]

4- $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$ [Asociativa respecto al producto por un escalar]

Actividad 21

Si A y B son matrices tales que pueden efectuarse las operaciones que se indiquen y k un número real, probar:

a) $\bullet (A^T)^T = A$ $\bullet (k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ $\bullet (A + B)^T = A^T + B^T$ $\bullet (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

b) M y N son *matrices simétricas*.

Entonces vale que M.N es simétrico $\leftrightarrow M.N = N.M$

c) Si $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define la traza de C como la suma de los elementos de la diagonal o sea $\text{tr}(C) = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$.

Demuestre que:

$\bullet \text{tr}(k \cdot A) = k \cdot \text{tr}(A)$ $\bullet \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ $\bullet \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ $\bullet \text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$

d) Hallar una condición necesaria y suficiente para que:

1) $(A + B) \cdot (A + B) = A^2 + B^2$ 2) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ 3) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

e) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ obtener M^k con $k = 1, 2, \dots, 10$. ¿Cuánto valdría M^{353} ?

Obtenga conclusiones. ¿Hay infinitos resultados para las potencias?

II.8.3 Aplicaciones de las matrices y de sus operaciones

II.8.3.I Una aplicación para la vida diaria

Se tienen los datos de consumo de pan, carne y manteca de cuatro familias y los precios de esos mismos productos durante los años 2008, 2009, 2010, 2011 y 2012.

Consumos			
	pan	carne	manteca
Familia 1	250	150	5
Familia 2	300	200	1
Familia 3	150	50	3
Familia 4	450	100	0

	Precios				
	2008	2009	2010	2011	2012
Pan	5	7	10	15	20
Carne	20	25	30	35	40
manteca	5	6	10	12	15

a) ¿Cuáles serán los gastos de la familia 1 para el 2009?

b) Se definen dos matrices:

$$\text{una de consumo } C = \begin{bmatrix} 250 & 150 & 5 \\ 300 & 200 & 1 \\ 150 & 50 & 3 \\ 450 & 100 & 0 \end{bmatrix} \text{ y otra de precios } P = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 & 15 & 20 \\ 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \\ 5 & 6 & 10 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

Obtener $G = C.P$ y explicar qué representa.

c) Indique qué información le da la matriz resultante de G . $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$? ¿Y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} G$?

d) Imagine que los precios del pan durante los 5 años hubieran sido un 20% mayor que los señalados.

Recalcule la matriz de precio y compare con el resultado de $\begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .P$

La matriz $\begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se obtiene efectuando $I^{3 \times 3} + 0,2$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (0,2 =20%) pues hemos

aumentado la fila 1 en dicha cantidad.

¿Cuáles cálculos nos llevarían a un aumento del 35% en la carne?

¿Y de un 20% en pan, 35% en carne y 12% en manteca?

Indique las matrices de precio bajo cada nueva circunstancia.

II.8.3.II Las matrices en Sociología

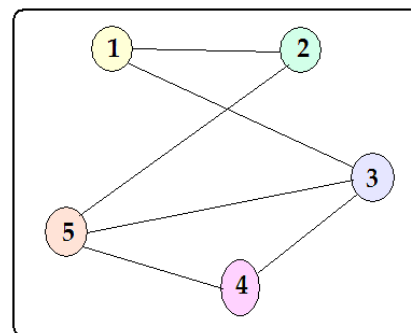
En *Sociología* pueden utilizarse las matrices para describir el grado de amistad o afinidad entre integrantes de un grupo de n personas.

Definimos como matriz de *amistad* A de dimensión $n \times n$ del siguiente modo:

$$[A]_{ij} \begin{cases} a_{ii} = 0 & \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n \\ a_{ij} = 1 & \text{si } i \text{ es amigo de } j \quad (i, j \text{ de } 1 \text{ a } n; i \neq j) \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ no es amigo de } j \quad (i, j \text{ de } 1 \text{ a } n; i \neq j) \end{cases}$$

Suponemos que si i es amigo de j entonces j es amigo de i (relación simétrica).

El esquema presenta la afinidad entre los 5 integrantes de un grupo de personas.



Obtenga la matriz A.

Calcule $M = A^2$ y analice los valores que toma M *fuera de la diagonal* e interpretarlos a la luz del ejemplo presentado.

II.8.3.III Cadenas de Markov

En un boliche bailable se venden dos tragos alcohólicos: Fernet (F) o cerveza (C)²⁸.

El mes de diciembre una cantidad f_0 de los consumidores eligieron Fernet (y el resto c_0 lo hizo por cerveza) y se supone que $\frac{1}{4}$ de las personas cambiarán de Fernet a cerveza y $\frac{1}{3}$ lo harán de cerveza a Fernet.

Queremos obtener las estimaciones de consumo para los próximos doce meses si se mantuvieran las mismas proporciones de preferencia.

Cada mes tenemos un par (f_i, c_i) con $i = 0, 1, 2, \dots$

Buscamos a mano f_1 y c_1 .

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{3}{4} f_0 + \frac{1}{3} c_0 && [\text{ya que } \frac{3}{4} \text{ de los consumidores de Fernet siguen fieles a esa elección}] \\ c_1 &= \frac{1}{4} f_0 + \frac{2}{3} c_0 && [\text{pues } \frac{2}{3} \text{ conservan la preferencia por la cerveza}] \end{aligned}$$

Si supiéramos f_0 y c_0 conseguiríamos f_1 y c_1 . Y luego podríamos obtener f_2 y c_2 de modo análogo a lo hecho.

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3}{4} f_1 + \frac{1}{3} c_1 \\ c_2 &= \frac{1}{4} f_1 + \frac{2}{3} c_1 && [\text{y así siguiendo para todo } n \geq 1] \end{aligned}$$

La información puede ser escrita de una manera más compacta y operativa a través del uso de matrices. Veamos cómo.

Definamos una matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ y matrices $X_0 = \begin{bmatrix} f_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ y $X_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ -vectores columnas-.

Es sencillo ver que las ecuaciones de obtención de f_1 y c_1 pueden escribirse como:

$$X_1 = A X_0$$

Si consideramos la secuencia $X_0, X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}, X_n$ tenemos la relación

$$X_i = A X_{i-1} \quad \text{con } i=1, \dots, n$$

Además ya que $X_2 = A X_1 = A.(A X_0) = A^2 X_0$ [propiedad asociativa del producto]

$$X_3 = A X_2 = A.(A^2 X_0) = A^3 X_0$$

y siguiendo ...

$$X_i = A^i X_0$$

²⁸ Algunas cuentas que se desarrollan en este apartado están efectuadas con un software muy sencillo de usar (está el Help) y portable: *Eigenmath v.137* (<http://www.portablefreeware.com/?id=915>).

"Eigenmath is a computer algebra system that facilitates the manipulation of mathematical expressions in symbolic form. For example, it can assist in solving algebra and calculus problems. It includes a great number of mathematical functions, has limited graphing capabilities and supports scripting. Think of it as portable MatLab "lite"!"

Pongamos una situación particular.

Tomemos a $X_0 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ y calculemos algunos consumos posteriores.

$$A \cdot X_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = X_1$$

$$A \cdot X_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{24} \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix} = X_2$$

O también usando las potencias de A:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{31}{48} & \frac{17}{36} \\ \frac{17}{48} & \frac{19}{36} \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{347}{576} & \frac{229}{432} \\ \frac{229}{576} & \frac{203}{432} \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} \frac{4039}{6912} & \frac{2873}{5184} \\ \frac{2873}{6912} & \frac{2311}{5184} \end{bmatrix}$$

Obtenemos X_1, X_2 y X_3 :

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{24} \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{161}{288} \\ \frac{127}{288} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1957}{3456} \\ \frac{1499}{3456} \end{bmatrix}$$

Si analizamos algunas potencias superiores vemos:

$$A^5 = \begin{bmatrix} \frac{47843}{82944} & \frac{35101}{62208} \\ \frac{35101}{82944} & \frac{27107}{62208} \end{bmatrix}, A^6 = \begin{bmatrix} \frac{570991}{995328} & \frac{424337}{746496} \\ \frac{424337}{995328} & \frac{322159}{746496} \end{bmatrix}, \dots, A^{11} = \begin{bmatrix} \frac{141532379387}{247669456896} & \frac{106137077509}{185752092672} \\ \frac{106137077509}{247669456896} & \frac{79615015163}{185752092672} \end{bmatrix}$$

$$A^{22} = \begin{bmatrix} \frac{105154560133443002067631}{184020479637478805864448} & \frac{78865919504035803796817}{138015359728109104398336} \\ \frac{78865919504035803796817}{184020479637478805864448} & \frac{59149440224073300601519}{138015359728109104398336} \end{bmatrix}$$

O aproximando a número decimal:

$$A^{11} = \begin{bmatrix} 0,571456735 & 0,571391019 \\ 0,4285543264 & 0,428608981 \end{bmatrix} \quad A^{22} = \begin{bmatrix} 0,571428573 & 0,571428569 \\ 0,428571426 & 0,428571431 \end{bmatrix}$$

Se observa que las potencias se van aproximando a un valor determinado.

$$\text{Si tomamos } A^\infty = \begin{bmatrix} 0,57142857 & 0,57142857 \\ 0,42857143 & 0,42857143 \end{bmatrix} \text{ obtendríamos } X^\infty = \begin{bmatrix} 0,57142857 \\ 0,42857143 \end{bmatrix}$$

Pensemos acerca de lo obtenido:

Partimos con un 40% de preferencia de Fernet y un 60% de cerveza.

Los cambios de hábitos son más fuertes entre los consumidores de cerveza que de Fernet (33,3% contra un 25%).

Se llega a una *situación de equilibrio* con un consumo de 57,1% de Fernet y un 42,9% de cerveza.

• Una cuestión adicional es la siguiente: ¿*existen valores f_0 y c_0 particulares tal que en cada mes no se modifique la proporción de preferencia no obstante las migraciones de una bebida a la otra?*

O sea que tendríamos $X_1 = X_0$

$$f_0 = \frac{3}{4} f_0 + \frac{1}{3} c_0 \rightarrow f_0 - \frac{3}{4} f_0 = \frac{1}{3} c_0 \rightarrow \frac{1}{4} f_0 = \frac{1}{3} c_0 \rightarrow f_0 = \frac{4}{3} c_0$$

$$c_0 = \frac{1}{4} f_0 + \frac{2}{3} c_0 \rightarrow c_0 - \frac{2}{3} c_0 = \frac{1}{4} f_0 \rightarrow \frac{1}{3} c_0 = \frac{1}{4} f_0 \rightarrow f_0 = \frac{4}{3} c_0$$

Pero $f_0 + c_0 = 1 \rightarrow \frac{4}{3} c_0 + c_0 = 1 \rightarrow \frac{7}{3} c_0 = 1 \rightarrow c_0 = \frac{3}{7}$ y $f_0 = \frac{4}{7}$ que aproximando a 8 decimales da $f_0 = 0,57142857$ y $c_0 = 0,42857143$.

¿Extraño? ¿O no tanto? El ejemplo que acabamos de ver remite al tema Cadenas de Markov que retomaremos en la unidad III.

Actividad 22

a) Se han encuestado a 300 varones (120 niños y 180 adultos) y 200 mujeres (90 niñas y 110 adultas) acerca del uso diario promedio (en horas) de Internet en los rubros “Juegos”, “Información” y “Redes Sociales”.

Los resultados de éstos pueden volcarse en una matriz $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$ donde hemos

considerado a la fila 1 la información sobre adultos y la fila 2 sobre menores mientras que las columnas representan a los tres rubros en el orden señalado.

¿Cómo debiera armar una matriz D que cruce sexo y edad para que $T = D.Z$ permita encontrar las horas totales que se utilizan en cada uno de los tres rubros por los 500 encuestados sólo discriminando por sexo?

¿Qué se obtiene al efectuar $[1 \ 1] \cdot T$? ¿Y al hacer $T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

b) Una empresa vende bicicletas de cuatro tipos (1,2,3 y 4) en tres tiendas.

La información puede resumirse en la siguiente matriz S:

Interprete el resultado de los productos:

	Tienda		
	1	2	3
Bicicleta 1	10	12	20
Bicicleta 2	18	15	16
Bicicleta 3	30	10	0
Bicicleta 4	24	14	27

$S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, S \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot S \text{ y } [0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot S$

Si los precios de los modelos –en miles de pesos– son 1,8; 2,3; 2,8 y 3,5 respectivamente defina una matriz de precios P tal que P.S permita obtener la inversión en miles de pesos de cada tienda en bicicletas.

¿Qué representaría P. S. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

c) Para el ejemplo III suponga $A = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 \end{bmatrix}$ y $X_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

Encuentre la proporción de bebida para los tres siguientes meses.

¿Cuál sería la distribución estable del mercado?

d) Entre una ciudad y los pueblos de alrededor hay un flujo migratorio. Se sabe que de un año a otro un 95% de los ciudadanos opta por permanecer en su jurisdicción (el 5% emigra hacia los alrededores); en cambio, el 10% de los pobladores aledaños quiere afincarse en la ciudad.

- Defina una matriz M de migración que permita obtener las estimaciones poblacionales en la Ciudad y en los Alrededores sabiendo que en el 2010 toman valores c_0 y a_0 respectivamente.

- Dé la expresión genérica para $\begin{bmatrix} c_i \\ a_i \end{bmatrix}$ para $i=1, 2, 3, \dots, n$.

- Si $c_0 = 30$ y $a_0 = 12$ (en miles de habitantes), obtenga la población para los primeros 5 años.

- ¿Existe alguna condición inicial que permita que las poblaciones de ambos distritos permanezcan inalterables en el tiempo?

II.9 Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

En II.7.1 página 53, se planteó el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 6x + 7y = 23 \end{cases} \quad \text{cuya solución fue } (x, y) = (5; -1)$$

Veamos que dichas ecuaciones tienen varias interpretaciones²⁹:

(a) Cada ecuación corresponde a una recta y cuando uno está frente a un sistema pretende conocer el punto (si existiera) donde las rectas se intersecan. Es una *visión geométrica*.

(b) A todo sistema de ecuaciones lineales se le puede asociar una *formalización matricial*. Definimos una matriz A como matriz del sistema, de tamaño $m \times n$ donde m es el número de ecuaciones y n el número de incógnitas (x_1, x_2, \dots, x_n); una matriz X de incógnitas –que es un vector columna- de $n \times 1$ y una matriz B de términos independientes –también vector columna- de $m \times 1$.

Si el sistema S fuera

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

²⁹ Recordar que en esta unidad estamos trabajando en el plano. Algunas consideraciones geométricas serán readaptadas al trabajar en espacios de mayor dimensión (R^3, R^4, \dots, R^n).

las matrices serían $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

de tal forma que S puede escribirse como $\boxed{A.X = B}$ que es la forma matricial de un sistema de ecuaciones.

También suele definirse otra matriz M, matriz ampliada del sistema y es de orden $m \times (n+1)$.

Su forma es $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ donde el separador punteado es sólo un recurso

visual para recordar que allí debe estar el signo igual³⁰.

En nuestro caso particular tendríamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ y por ende la forma matricial del sistema de ecuaciones es $A.X = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$

Observemos que $\vec{s} = (5; -1)$ es solución del sistema pues al efectuar el producto (y que usaremos como matriz columna) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ obtenemos $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$.

En cambio $\vec{v} = (-3; 2)$ no es solución pues $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}$ y como el resultado *no es* la matriz $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ entonces \vec{v} no es una solución del sistema S.

Actividad 23

Escriba las matrices A, X, B y M para los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$S_1 : \begin{cases} 2x + 6y = -4 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}, S_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 8 \\ -4x + 5y = -3 \end{cases}, S_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 3 \\ 3y + z - w = -4 \\ 2w + z = 8 \end{cases}$$

(c) Tenemos una tercera manera de interpretar un sistema de ecuaciones.

³⁰ El sistema se resolverá por aplicación de operaciones elementales entre filas.

Regresemos al sistema $S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 6x + 7y = 23 \end{cases}$

El mismo puede reescribirse del siguiente modo: $x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$

[Haga el producto por un escalar y sume los elementos de los vectores columnas y verifíquela]

¿Qué significa intuitivamente dicha ecuación?

Se trata de ver cuántas veces el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ sumado a otras tantas veces el vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ nos

permite obtener el vector $\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$, si esto

fuera posible.

Según los cálculos ya hechos debiera ser

5 veces el $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y (-1) vez el $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ o sea

que $5\vec{v} + (-1)\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$

Cuando uno efectúa $x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ se

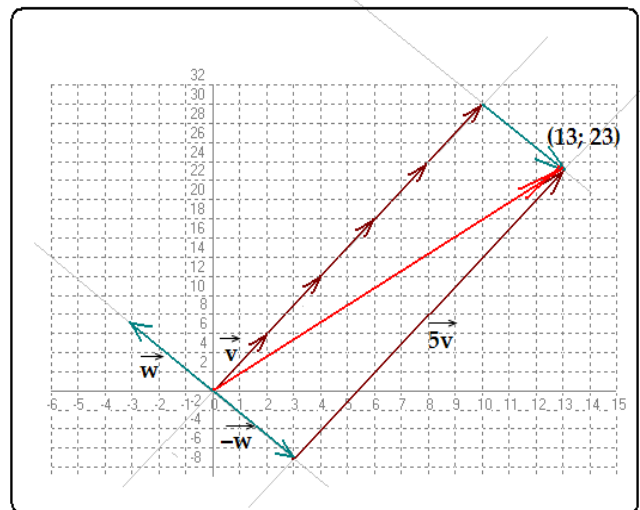
dice que se está realizando **una**

combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

La ecuación $x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$ nos está preguntando si alguna combinación lineal de

éstos permite obtener al $\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$ (lo cual es afirmativo).



Actividad 24

Si $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$, describa con sus palabras qué significa la ecuación matricial-vectorial.

Escriba y resuelva el sistema e interprete lo obtenido.

¿Cómo se modifica la situación si se tiene $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix}$?

Explique el porqué de las diferencias. Efectúe un gráfico que ilustre lo realizado.

- En las dos situaciones anteriores hemos tenido las siguientes parejas de vectores:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ en el primero y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ en el segundo.

En la primera situación los vectores son linealmente independientes. Ninguno de los dos es múltiplo del otro.

En cambio en el segundo $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ es el triple del $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se trata de dos vectores linealmente dependientes. Este concepto será profundizado y generalizado en las dos próximas unidades. Lo visto permite encontrarle una *interpretación vectorial* a un sistema de ecuaciones y nos lleva a *integrar* contenidos:

VECTORES ↔ SISTEMA de ECUACIONES LINEALES ↔ MATRICES ↔ GEOMETRÍA

(d) Adicionalmente aparece una *comprensión funcional* de lo que estamos trabajando.

En el punto b) presentamos $A \cdot X = B$ y en esa situación particular se tenía que

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Si en vez del $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ usamos otro vector el resultado no será el $\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$ sino otro vector $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Se tiene que a cada X le corresponde un único X' según las ecuaciones $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 6x + 7y \end{cases}$.

O sea que $X' = T(X) = A \cdot X$ es una función; en este caso relaciona elementos de R^2 en R^2 (R^2 es un espacio vectorial, II.1.3.1).

Además dicha función cumple con las siguientes propiedades:

Si U y V son vectores columnas de R^2 y k un número real sucede que:

- $T(U+V) = A \cdot (U+V) = A \cdot U + A \cdot V = T(U) + T(V)$ [propiedad distributiva del producto respecto de la suma para matrices].

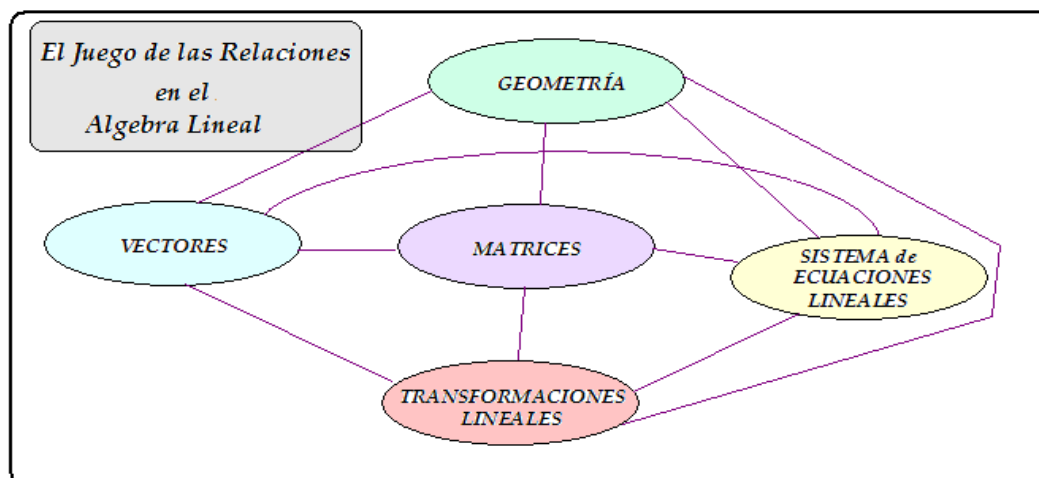
$T(k \cdot U) = A \cdot (k \cdot U) = (A \cdot k) \cdot U = (k \cdot A) \cdot U = k \cdot (A \cdot U) = k \cdot T(U)$ [propiedad asociativa para el producto de un escalar y matrices].

Estas dos características para algunas funciones vienen siendo presentadas desde la unidad I. Su prevalencia nos lleva a dar una definición formal (que será reiterada en próximas unidades).

Consideremos dos espacios vectoriales V y W (no necesariamente diferentes) y un cuerpo K de números. Una función $T: V \rightarrow W$ se dice que es una **transformación lineal** sobre K si cumple las dos siguientes condiciones:

- $\forall v$ y v' elementos de V sucede que $T(v + v') = T(v) + T(v')$
- si $v \in V$ y $k \in K$ entonces $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$

La siguiente representación trata de mostrar el enfoque primordial sobre el cual fue diseñado el presente curso de Álgebra Lineal [II.9.1]:



Hecha la presentación de las transformaciones lineales la retomaremos a la brevedad pero antes abordemos un nuevo contenido.

II.10 Inversa de una matriz (primera aproximación)

- Considerar las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ y obtener $A \cdot B$ y $B \cdot A$

En la situación planteada el producto ha dado la matriz identidad (aquí de dimensión 2).

Definición: Si A es una matriz cuadrada de orden n y existe B cuadrada del mismo orden tal que $A \cdot B = I \wedge B \cdot A = I$ (I es la identidad de tamaño n) entonces B es la inversa de A y se anota $B = A^{-1}$. Si A tiene inversa se dice que es *invertible*, *no singular* o *regular*.

Se observa que obtener la inversa de una matriz conlleva resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$). En esta unidad se presentan situaciones 2×2 o 3×3 pero en la siguiente no se pondrán limitaciones.

- Sea $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$; la intención es obtener B de tamaño 2 tal que $C \cdot B = I$ (luego se comprueba que $B \cdot C = I$).

Se toma a $B = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ y se plantea $C \cdot B = I$.

Esto nos lleva al siguiente par de sistemas de ecuaciones³¹:

$$S_I: \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_{II}: \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ 4z - 7w = 1 \end{cases}.$$

³¹ Una ecuación del tipo $C \cdot X = D$ donde C , X y D son matrices de órdenes tales que las operaciones se pueden efectuar y X es la matriz incógnita se denomina *ecuación matricial*.

Resolverlos y comprobar la solución $(x, y) = (7/2; 2); (z, w) = (2, 1)$.

Esto significa que $B = C^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y debe ocurrir que $C.C^{-1} = I \wedge C^{-1}.C = I$ (¡hacerlo!).

Al resolver los sistemas S_I y S_{II} se habrá notado que las operaciones por filas en ambos sistemas fueron idénticos y sólo cambiaron los resultados de los términos independientes. Esto permite ahorrar trabajo efectuando lo que se llama *resolución simultánea de ecuaciones*. Ejemplifiquemos con el caso presentado.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Se escribe la matriz de coeficientes –coinciden para ambos sistemas– y se forma la matriz ampliada con las dos columnas de términos independientes; las líneas punteadas es para separar visualmente los términos independientes.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2F_1+F_2 \rightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \text{ que puede separarse en estos dos sistemas}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \wedge \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Del primer sistema salen $y=2, -2x+8=1 \rightarrow x=7/2$; del segundo $w=1$ y $-2z+4=0 \rightarrow z=2$.

- Hallar y verificar que $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$ y que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$
- ¿Existe la inversa de $E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$?

II.10.1 Propiedades de la inversa

Para todas las propiedades supondremos A, B, C y D matrices de $R^{n \times n}$.

• La inversa es única

Sean B y C inversas de A, o sea que $A.B = B.A = I$ y $A.C = C.A = I$

Partimos de $A.B = I$ y multipliquemos por izquierda la igualdad

$C.(A.B) = C.I = C$ (I es elemento neutro para el producto de matrices)

$(C.A).B = C$ (propiedad asociativa del producto)

$I.B = C$ (C es la inversa de A)

$B = C$ (I neutro)

• Si una matriz es inversible la inversa de su inversa es ella misma.

$A.B = I$ y $B.A = I$ entonces B es la inversa para A y A es la inversa para B pero como

anotamos a B como A^{-1} resulta que $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

- La inversa de una matriz multiplicada por un escalar cumple: $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$

Sea $B = A^{-1}$ y pensemos a A como filas y B como columnas $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ y $B = [B^1, B^2, \dots, B^n]$.

Como $A.B = I$ se tiene que $[A_i]. [B^j] = 0$ si $i \neq j$ y $[A_i]. [B^i] = 1$ si $i=1,2, \dots, n$.

Al efectuar $c.A$ tenemos: $\begin{bmatrix} c.A_1 \\ c.A_2 \\ \vdots \\ c.A_n \end{bmatrix}$; veamos que $c^{-1}.B$ es la inversa.

$$c^{-1}.B = [c^{-1}.B^1, c^{-1}.B^2, \dots, c^{-1}.B^n]$$

Si efectuamos $[(c.A)_i].[(c^{-1}.B)^j] = \{c.[A_i]\}. \{c^{-1}. [B^j]\}$

$= c. c^{-1}. [A_i]. [B^j]$ pues en un producto escalar un factor constante puede salir del mismo

Pero $[A_i]. [B^j] = 0$ si $i \neq j$ y $[A_i]. [B^i] = 1$ si $i=1,2, \dots, n$.

Entonces $[(c.A)_i].[(c^{-1}.B)^j] = 0$ si $i \neq j$ o 1 si $i=j$.

Por lo tanto vale que $(c.A)^{-1} = c^{-1}.A^{-1}$

- Si A y D son invertibles vale que $A.D$ también lo es y además $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$

Por un lado, $(A.D).(A.D)^{-1} = I$ por definición de inversa

Si aplicamos la hipótesis, $(A.D). D^{-1}.A^{-1} = A.(D.D^{-1}).A^{-1} = A.(I).A^{-1} = (A.I).A^{-1} = A.A^{-1} = I$

(donde se ha utilizado asociatividad en el producto de matrices, inversa de una matriz, asociatividad y elemento neutro para el producto).

Como la inversa es única las expresiones sombreadas son iguales y vale la propiedad.

Actividad 25

- Testea si las siguientes relaciones son correctas (A, B cuadradas e inversibles; k natural):

a) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

d) $C.A = C.B \Rightarrow A = B$ - C cuadrada-

- Si la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ obtener la inversa de A^T , $5A$ y A^3 . Hallar A^{-2} .



Actividad de refuerzo 11

1) Sea el sistema
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

a) Expresarlo en forma matricial.

b) Darlo como combinación lineal de vectores y encontrar 3 combinaciones diferentes del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por Gauss y comprobarla.

3) Si la inversa de M es $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, ¿cuál es la inversa de M^T , M^3 y $\frac{3}{4}M$?

II.10.2 La Criptografía y la Inversa de Matrices

Cuando usted pretenda mandar un mensaje que permanezca oculto necesariamente tendrá que vérselas con algún procedimiento matemático que permita efectuarlo. Una manera sencilla es asignar un símbolo a cada letra del alfabeto, formar una matriz con el texto del mensaje y transformarla al multiplicarla por una *matriz* llamada *codificadora* que suele ser de tamaño grande e inversible. El receptor utilizando la inversa de la matriz codificadora (llamada *matriz decodificadora*) puede recuperar el mensaje inicial.

Ejemplo 12

Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ cuya inversa es $D = \begin{bmatrix} -40 & -8 & 5 \\ 25 & 5 & -3 \\ -16 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (verifíquelo).

Pasemos a codificar el mensaje “Vivan las matrices”.

Para eso deben asignarle un número a cada letra y al espacio en blanco (\emptyset).

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	\emptyset
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

v i v a n \emptyset l a s \emptyset m a t r i c e s
23 9 23 1 14 28 12 1 20 28 13 1 21 19 9 3 5 20

Como vamos a utilizar una matriz codificadora de 3×3 se divide el mensaje en matrices columna de 3×1 y se agregan espacios en blanco al final si fueran necesarios.

$\begin{bmatrix} 23 \\ 9 \\ 23 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$ que puede resumirse en la siguiente matriz de texto T:

$$T = \begin{bmatrix} 23 & 1 & 12 & 28 & 21 & 3 \\ 9 & 14 & 1 & 13 & 19 & 5 \\ 23 & 28 & 20 & 1 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

A continuación codificamos el mensaje

$$C = M.T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 & 1 & 12 & 28 & 21 & 3 \\ 9 & 14 & 1 & 13 & 19 & 5 \\ 23 & 28 & 20 & 1 & 9 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & -7 & 40 & 31 & -12 \\ 69 & 138 & 76 & -51 & 3 & 94 \\ 187 & 117 & 68 & 244 & 257 & 55 \end{bmatrix}$$

Luego podemos recuperar el texto original $T = D.C = M^{-1} \cdot C$

$$W = \begin{bmatrix} 23 & 1 & 12 & 28 & 21 & 3 \\ 9 & 14 & 1 & 13 & 19 & 5 \\ 23 & 28 & 20 & 1 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

La matriz W efectivamente coincide con la T original. Las cuentas las hemos efectuado con el *Eigenmath v.137*.

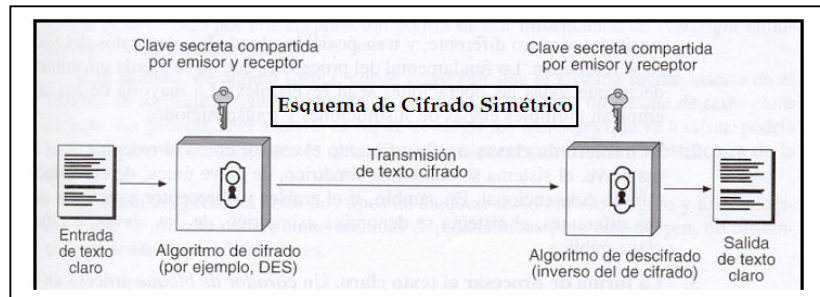
En la página 19 hemos presentado el siguiente esquema:

Identifique en la explicación quién cumple el papel definido el esquema.

Actividad 26

Tomar su nombre y apellido y comprobar el proceso de codificación y decodificación a través de la matriz codificadora

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$



II.11 Sistema de ecuaciones lineales con 3 o más incógnitas. Método de resolución de Gauss y de Gauss-Jordan.

Con mayores conocimientos acerca de las matrices abordaremos la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas a través de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

Ejemplo 13

En R^3 una ecuación lineal en $x, y \wedge z$ la podemos interpretar como la ecuación de un plano (en la unidad III se justificará esto).

Tomemos el problema de determinar si hay (o no) intersección entre los siguientes cinco planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1: 2x + y - z &= 1, & \Pi_2: 3x - 2y - 4z &= 11, & \Pi_3: -x + 4y + 2z &= 1, \\ \Pi_4: -5x - y + 6z &= -26, & \Pi_5: 3y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

Un punto (x, y, z) pertenece a los cinco planos si satisface las cinco ecuaciones que ordenamos a *nuestro gusto* en una matriz ampliada M de coeficientes.

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 11 \\ -5 & -1 & 6 & -26 \end{array} \right] \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{matrix}$$

Recordemos que entre ecuaciones (y por ende entre filas de la matriz) son *lícitas* las siguientes operaciones elementales:

- Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.
- A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.
- A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta y un múltiplo de otra³².

Unifiquemos criterios para la resolución:

a) En el paso siguiente anotaremos en la fila que vamos a modificar qué operación le hemos realizado a las anteriores. Así si en la tercera hilera apareciera $2f_1 + f_3$ debemos entender que la nueva fila 3 (que llamaremos f_3 por abuso de notación) se obtiene de efectuar el doble de la fila 1 adicionado a la fila 3 del paso inmediatamente precedente.

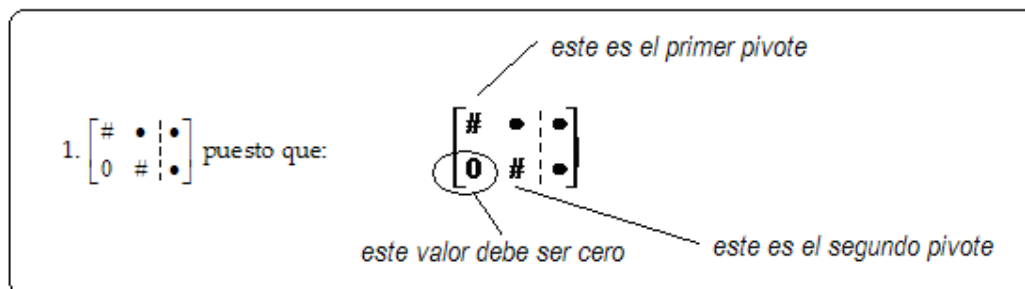
b) La intención del método es por medio de las operaciones elementales llegar a una **matriz escalonada** por filas. Esto sucede si:

- Cualquier fila que se componga enteramente por ceros se ubica en la parte inferior.
- En cada renglón diferente de cero, la primera entrada no nula (llama **entrada principal** o **pivote**) se localiza en una columna a la izquierda de cualquier entrada principal debajo de ella (o equivalentemente, a medida “que bajamos” por la matriz los pivotes aparecen a la derecha).

Al proceso lo llamaremos **triangulación** (si la matriz es cuadrada) o **escalonamiento**.

Los siguientes esquemas muestran algunas matrices triangulares superiores o escalonadas en situaciones de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (por eso el punteado dentro de la matriz) y convengamos que “#” representa un número real no nulo y “•” uno cualquiera (incluyendo el 0).

Ejemplo 13



³² Si a la ecuación que es sumada se la multiplica por cero no se adiciona nada a la ecuación original pero la operación elemental sigue siendo válida y por lo tanto se mantiene su aplicación. Esto será de utilidad al trabajar con sistemas con parámetros.

2. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix} :$

este es el primer pivote

segundo pivote

este valor debe ser cero

este valor es cero pero podría no serlo

3. $\begin{bmatrix} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$

este valor es cero pero podría no serlo

este es el primer pivote

las filas nulas van al final

4. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$

este es el primer pivote

si no es cero es el segundo pivote pero

si fuera cero el elemento "ovalado" ésta posición sería el segundo pivote

las filas nulas se acumulan al final de la matriz

5. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$

este valor es cero pero podría no serlo

primer pivote

segundo pivote

puede o no ser tercer pivote dependiendo si es o no distinto de cero

es cero pero si el elemento superior es nulo podría ser distinto de cero.

es cero pero podría no serlo

deben ser cero

ya que es nulo el elemento de arriba se tienen que anular

entonces estos valores deben anularse

Otras situaciones son:

6. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$

7. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$

8. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$

9. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix} ,$

10. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$

11. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$

Para trabajar: mostrar que en cada matriz se cumple que es triangular superior, esto es, que $m_{ij} = 0$ para $i > j$.

c) La intención es que m_{11} sea diferente de cero y todos los demás elementos de la primer columna que están debajo suyo se anulen.

Luego nos corremos una columna hacia la derecha y una fila hacia abajo y ese elemento debe ser diferente de cero; para lograrlo podemos permutar filas.

Además los restantes valores debajo de ese elemento ser nulos;

si no pudiéramos conseguirlo nos corremos una columna más a la derecha

(como aquí $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \# & & \bullet \\ 0 & 0 & & \bullet \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right]$)

d) El objetivo del método de Gauss es llegar a la solución del sistema resolviendo de atrás hacia delante al terminar la triangulación o escalonamiento, o sea comenzar con lo que se obtiene en la última fila y seguir con las superiores.

El *método de Gauss-Jordan* prosigue triangulando hacia arriba, tratando de dejar solamente los elementos diagonales, con el fin que la respuesta sea directa aunque el precio a abonar es una mayor cantidad de pasos en el proceso de escalonamiento.

Una *adaptación* del método es la preferencia de *obtener unos* en los pivotes aunque ello no es esencial –suele denominarse *resolución escalonada reducida*–.

Sí lo utilizaremos para la obtención de la inversa de una matriz pero lo veremos más adelante.

Sí estimamos conveniente que en cada situación *quien resuelve* analice qué operaciones elementales (y trucos) se pueden usar.

e) El método será utilizado también para obtener el determinante de una matriz cuadrada donde a través del mismo se intenta facilitar el cálculo.

Usamos $b \cdot f_j \rightarrow f_j$ sólo para reducir los valores de los coeficientes en una ecuación y nunca haremos la siguiente operación $a \cdot f_k + b \cdot f_j \rightarrow f_j$ con a y b reales no nulos; si quisiéramos cambiar la fila f_j usando la f_i haremos $a \cdot f_i + f_j \rightarrow f_j$.³³

Ejemplo 14

Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 & f_1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & f_2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & f_3 \\ 3 & -2 & -4 & 11 & f_4 \\ -5 & -1 & 6 & -26 & f_5 \end{array} \right] \quad \text{ya que el } m_{11} \text{ es un } -1 \text{ lo usamos de pivote y a través de él}$$

tratamos de anular los valores restantes de la primer columna. Ese -1 apareció pues al armar la matriz M a *nuestro gusto* el mismo no fue azaroso.

³³ Al estudiar determinantes veremos que $b \cdot f_j$ aumento el determinante de la matriz original en un factor b que quedó oculto tras realizar el reemplazo de la ecuación –o fila–.

Tener un 1 o -1 suele ser conveniente aunque en alguna matriz si los elementos de la columna fueran 6, -3, 3, 12 y 15 tanto el 3 como el -3 serían óptimos –sin necesidad de reducir a 1 el pivote)

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & -21 & -4 & -31 \end{array} \right] \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ 2f_1 + f_3 \\ 3f_1 + f_4 \\ -5f_1 + f_5 \end{array} \quad \text{siempre usamos } +f_i \text{ --la fila } i \text{ es la que cambiamos--}$$

Nuestra atención se dirige a la submatriz que nos queda al ir a la fila y columna siguientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & -21 & -4 & -31 \end{array} \right]$$

y aquí vemos que tanto los coeficientes de las filas 2 y 3 son múltiplos de 3 y 2 respectivamente; por lo tanto los hacemos más pequeños usando la operación elemental b).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ f_3 \div 3 \\ f_4 \div 2 \\ -f_5 \end{array}$$

el 3 en m_{22} será nuestro pivote; ¿cómo hacemos para conseguir un 0 donde hay un 5?

Debemos a f_4 sumarle k veces f_2 , pero con cual k :

$$3.k + 5 = 0 \rightarrow k = -\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{56}{3} \\ 0 & 0 & -10 & 80 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -f_2 + f_3 \\ -\frac{5}{3}f_2 + f_4 \\ -7f_2 + f_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{56}{3} \\ 0 & 0 & -10 & 80 \end{array} \right]$$

Ahora nos focalizamos en la submatriz que se obtiene al “bajar” a una nueva fila y desplazarnos un lugar hacia la derecha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 56 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ 3f_4 \\ f_5 \div 10 \end{array}$$

Hemos multiplicado por 3 la f_4 por comodidad en las cuentas.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -7f_3 + f_4 \\ -f_3 + f_4 \\ \\ \end{array}$$

Se ha **triangulado** –o escalonado– nuestro sistema de ecuaciones llegando a una matriz triangular superior. Las últimas dos ecuaciones ya no nos son útiles pues representan una tautología: es siempre cierto que $0.x + 0.y + 0.z = 0$ para cualquier terna x, y, z de números reales.

Podemos ahora encontrar la solución del sistema yendo desde el final al principio:

$$-z = 8 \rightarrow z = -8$$

$$3y + 2.(-8) = -7 \rightarrow 3y = -7 + 16 \rightarrow y = 3$$

$$-x + 4.3 + 2.(-8) = 1 \rightarrow -x = 1 - 12 + 16 \rightarrow x = -5$$

El sistema resultó ser **compatible determinado** o sea tiene solución única $\boxed{\{(-5, 3, -8)\}}$.

Allí se intersecan los 5 planos.

Comentarios

a) La forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Podríamos haber permutado al principio el -5 de la f_5 y usarlo de pivote. No serían muy lindas las cuentas pero la triangulación sirve igual.

b) Una vez que se pivoteo una columna, ésta no cambia más.

c) Podemos continuar desde la matriz escalonada para llegar a la solución sin resolver hacia atrás “a mano”. Es la esencia del **método de Gauss-Jordan**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A partir del -1 en la tercera fila buscamos conseguir ceros arriba de dicho coeficiente; podemos olvidarnos de las últimas dos filas para la resolución de nuestro sistema de

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2f_3 + f_1 \\ 2f_3 + f_2 \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ f_2 \div 3 \\ -f_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right] \begin{array}{l} -4f_2 + f_1 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right] \text{ de donde salen } x = -5, y = 3, z = -8$$

d) A veces puede ser útil presentar las incógnitas en otro orden.

Nuestra matriz M presupone un orden por columna x - y - z pero en alguna ocasión puede ser que convenga permutar.

Si en $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array} \right]$ permutamos la columna y por z y tenemos $\left[\begin{array}{ccc|c} x & z & y & \\ \hline -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array} \right]$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} x & z & y & \\ \hline -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} x & z & y & \\ \hline -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -2f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \\ -4f_2 + f_5 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} x & z & y & \\ \hline -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} f_3 \div (-3) \\ f_4 \div 2 \\ f_5 \div 3 \end{array}}$$

podemos eliminar la dos últimas filas pues están repetidas y despejar y , z y x (en ese orden). Aquí el permutar columnas facilitó un poco las cuentas (*no* usamos fracciones).

Ejemplo 14

Resolver el sistema de ecuaciones de 6x5:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 12 & \text{ecuación 1} \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 - x_5 = 3 & \text{ecuación 2} \\ 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 1 & \text{ecuación 3} \\ 4x_1 - 4x_2 + x_4 + 3x_5 = 16 & \text{ecuación 4} \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -21 & \text{ecuación 5} \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -33 & \text{ecuación 6} \end{array} \right.$$

Armamos nuestra matriz M con el orden 5, 6, 3, 1, 2 y 4 en las ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 12 \\ 3 & -5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & 3 & 16 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 7 & 33 \\ 0 & -2 & 6 & -10 & 14 & 66 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -f_1 + f_4 \\ -3f_1 + f_5 \\ -4f_1 + f_6 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -3f_2 + f_3 \\ f_2 + f_4 \\ 2f_2 + f_5 \end{array}}$$

las filas 3 y 6 son nulas así que las eliminamos

Nos queda el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array} \right] \text{ y empezamos con la resolución de atrás hacia delante.}$$

Tome lápiz y papel y haga las cuentas con nosotros:

$$8x_3 = 15x_4 - 23x_5 + 100 \rightarrow x_3 = \frac{1}{8} \cdot [15x_4 - 23x_5 + 100]$$

$$x_2 = 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 - 33 = \frac{3}{8} \cdot [15x_4 - 23x_5 + 100] - 5x_4 + 7x_5 - 33 =$$

$$x_2 = \frac{1}{8} \cdot [45x_4 - 69x_5 + 300 - 40x_4 + 56x_5 - 264] \rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \cdot [5x_4 - 13x_5 + 36]$$

$$x_1 = x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 21 \rightarrow x_1 = \frac{1}{8} \cdot [5x_4 - 13x_5 + 36] + \frac{2}{8} \cdot [15x_4 - 23x_5 + 100] - 4x_4 + 5x_5 - 21$$

$$x_1 = \frac{1}{8} \cdot [5x_4 - 13x_5 + 36 + 30x_4 - 46x_5 + 200 - 32x_4 + 40x_5 - 168] \rightarrow x_1 = \frac{1}{8} \cdot [3x_4 - 19x_5 + 68]$$

Se obtuvieron infinitas soluciones de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{8} \cdot [3x_4 - 19x_5 + 68], \frac{1}{8} \cdot [5x_4 - 13x_5 + 36], \frac{1}{8} \cdot [15x_4 - 23x_5 + 100], x_4, x_5 \right)$$

con x_4 y x_5 cualquier par de números reales. El sistema es *compatible indeterminado*.

Las variables x_1 , x_2 y x_3 que corresponden a las posiciones de los pivotes suele llamárselas *variables principales* y a x_4 y x_5 son las *variables libres*.

De acuerdo a los infinitos valores que toman las variables libres se va obteniendo el correspondiente valor para cada variable principal.

No seremos fundamentalistas de esta asignación en el papel que cumple cada variable pues bien podríamos en la tercera ecuación de la matriz final haber despejado a x_5 y considerarla como variable principal; se hubiera obtenido otra forma de expresar el mismo conjunto solución.

La solución obtenida puede reescribirse del siguiente modo:

$$\text{Si } X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow$$

$$X = \left(\frac{3}{8}x_4, \frac{5}{8}x_4, \frac{15}{8}x_4, x_4, 0 \right) + \left(-\frac{19}{8}x_5, -\frac{13}{8}x_5, -\frac{23}{8}x_5, 0, x_5 \right) + \left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0 \right)$$

$$X = \frac{x_4}{8} (3, 5, 15, 8, 0) + \frac{x_5}{8} (-19, -13, -23, 0, 8) + \left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0 \right);$$

si a $\frac{x_4}{8}$ y $\frac{x_5}{8}$ los denominamos respectivamente α y β tenemos:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \alpha \cdot (3, 5, 15, 8, 0) + \beta \cdot (-19, -13, -23, 0, 8) + \left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0 \right) \quad \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R}$$

Otro ejemplo

Supongamos el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y+z+10w=10 \\ x+3y-z+8w=5 \\ y-z+t+w=2 \end{cases}$$

Si representamos con cuidado todas las ecuaciones y las variables utilizadas en una matriz y operamos convenientemente se llega a (obviamente es uno de los caminos de resolución):

$$\begin{aligned} &\left(\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\right) \equiv \left(\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\right) \equiv \left(\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\right) \\ &\quad 2F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \qquad \frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2 \qquad 3F_2 - F_1 \rightarrow F_1, F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \\ &\equiv \left(\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & -4 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]\right) \equiv \left(\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}F_1 \rightarrow F_1 \end{aligned}$$

Lo que nos indica que las soluciones serán de la forma

$$x+2z+2w=5$$

$$t=w+2$$

$$y-z+2w=0 \text{ de donde surge que } z=y+2w$$

$$t-w=2$$

$$x+2z+2w=5 \rightarrow x+2y+4w+2w=5 \rightarrow x=-2y-6w+5$$

Luego las soluciones dependerán de y y w y serán del tipo

$$(x,y,z,t,w) = (-2y-6w+5, y, y+2w, w+2, w) = y(-2, 1, 1, 0, 0) + w(-6, 0, 2, 1, 1) + (5, 0, 0, 2, 0)$$

Sistema compatible indeterminado y el término encerrado en el último paréntesis es una solución particular.

Comentario

¿Qué hubiera ocurrido si al triangular se llegara a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 133 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] ?$$

La misma está triangulada (escalonada) y la cuarta ecuación nos dice que:

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 = 133 \text{ la cual no tiene solución.}$$

El sistema es *incompatible*.

Actividad 27

a) Decidir si las siguientes matrices ampliadas están escalonadas.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right], B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array} \right], C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right], D = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], F = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 7,4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,3 \end{array} \right], G = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$H = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], I = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], J = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

b) Resolver por el método de Gauss (o de Gauss-Jordan) declarando los pasos efectuados y clasificar los sistemas de ecuaciones³⁴. (Respuestas en el Apéndice)

$$a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 7 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 14x_4 = 10 \\ -x_1 + 5x_2 + 17x_3 + 19x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 11x_4 = 4 \\ 2x_1 - 7x_2 - 29x_3 - 24x_4 = 21 \end{cases}$$

En donde haya infinitas soluciones puede expresarse la misma de diferentes formas pero todas equivalentes entre sí.

II.12. Rango fila de una matriz

Dada una matriz de $m \times n$ se denomina *rango fila* de ella a la cantidad de filas no nulas luego de haber triangulado (escalonado) la matriz.

Pensamos a la matriz formada por *m* vectores de *n* componentes y los triangulamos: **sólo los vectores no nulos cuentan** para el rango fila de la matriz.

³⁴ Adaptado de Williams, Gareth (2002): “*Algebra Lineal con aplicaciones*”, Mc Graw-Hill, Interamericana Editores, Cuarta edición, México, pp. 26 y 27.

Ejemplo 15

Busquemos el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

$$(I) \operatorname{rgf} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rgf} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2f_1 + f_2 \\ 3f_1 + f_3 \\ -5f_1 + f_4 \end{matrix} = \operatorname{rgf} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \div 3 \\ f_2 \div 3 \\ f_2 \div 3 \\ f_2 \div 3 \end{matrix} =$$

$$\boxed{\operatorname{rgf} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \end{matrix} = 2}$$

$$(II) \operatorname{rgf} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 4 \quad [\text{ya está triangulada}]$$

Comentarios

a) Si consideramos a las columnas como vectores de ***m* componentes** –de arriba hacia abajo, por ejemplo la columna 1 del ejemplo I es (1, 2, -3, 5)– podemos definir el *rango columna* de una matriz como la cantidad de vectores columnas no nulos que sobreviven al triangularlos.

Más adelante se verá que el rango fila y el rango columna son ***idénticos*** y al dar un mismo número se habla directamente del ***rango de una matriz***.

El resultado adelantado permite ahorrar tiempo ya que en el ejemplo 15 (I) hay 3 columnas por triangular y una se termina yendo. Recordando la propiedad podemos asegurar que el rango fila tiene un tope de 3 aún sin empezar con la triangulación.

b) La noción de rango fila está íntimamente ligada al ***concepto de independencia y dependencia lineal***. Recuperemos el ejemplo 15 (I) pensando que cada fila originariamente es un vector y los números sus componentes.

$$\begin{matrix} \vec{s} = \\ \vec{t} = \\ \vec{u} = \\ \vec{v} = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \vec{s} = \\ -2\vec{s} + \vec{t} = \\ 3\vec{s} + \vec{u} = \\ -5\vec{s} + \vec{v} = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\vec{s} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{permutamos } f_2 \text{ y } f_3 \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
3\vec{s} + \vec{u} &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3\vec{s} + \vec{u} \\ -3(3\vec{s} + \vec{u}) - 2\vec{s} + \vec{t} \\ -5(3\vec{s} + \vec{u}) - 5\vec{s} + \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
-2\vec{s} + \vec{t} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\
-5\vec{s} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\
\rightarrow -3(3\vec{s} + \vec{u}) - 2\vec{s} + \vec{t} = \vec{0} \wedge -5(3\vec{s} + \vec{u}) - 5\vec{s} + \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \\
-9\vec{s} - 3\vec{u} - 2\vec{s} + \vec{t} = \vec{0} \wedge -15\vec{s} - 5\vec{u} - 5\vec{s} + \vec{v} = \vec{0} \\
\rightarrow \boxed{\vec{t} = 11\vec{s} + 3\vec{u}} \wedge \boxed{\vec{v} = 20\vec{s} + 5\vec{u}}
\end{aligned}$$

O sea que dos vectores quedaron en función de otros dos y estos últimos no son múltiplos entre sí, o sea son **linealmente independientes**.

En general si tuviéramos m vectores filas y son los últimos k los nulos entonces los $m-k$ que quedan encima son linealmente independientes entre sí (los últimos k son linealmente dependientes de estos $m-k$).

Si no hubiéramos permutados filas durante el escalonamiento los $m-k$ vectores-fila iniciales serían LI.

II.12.1. Teorema de Rouche-Fröbenius

Vamos a vincular el rango fila de una matriz con la posibilidad de existencia de solución a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\text{Un sistema } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{ puede escribirse matricialmente como } A \cdot X = B$$

donde A es la **matriz de coeficientes** del sistema ($m \times n$), X la **matriz columna de incógnitas** ($n \times 1$) y B la **matriz columna de términos independientes** ($m \times 1$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

Asimismo tenemos a M , **matriz ampliada** del sistema de dimensión $m \times (n+1)$:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Analicemos algunos casos particular para ver si ciertos resultados pueden ser generalizados (“#” representa un número real no nulo y “•” uno cualquiera o sea que puede anularse).

Ejemplo 16

a) ¿Qué sucede si tuviéramos un sistema con $n=2$ incógnitas de este tipo $\begin{bmatrix} \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & \# & | & \bullet \end{bmatrix}$?

De la segunda obtendríamos x_2 y luego sustituyendo en la primera saldría x_1 ; el sistema es compatible determinado (SCD).

Veamos los rangos de las matrices $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & \# \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & \# & | & \bullet \end{bmatrix}$.

Al estar ambas trianguladas tenemos $\text{rgf}(A) = 2$ y $\text{rgf}(M) = 2$; $n=2$.

b) $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & | & \# \end{bmatrix}$.

El sistema es incompatible pues la segunda ecuación significa $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \#$ (SI).

Aquí $\text{rgf}(A) = 1$, $\text{rgf}(M) = 2$, $n=2$.

c) $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$; el sistema es compatible indeterminado (SCI); x_1 queda en función de x_2 ; $\text{rgf}(A) = 1$, $\text{rgf}(M) = 1$, $n=2$.

Cuestión: ¿Podríamos asegurar que x_2 se puede poner en función de x_1 ?

d) $M = \begin{bmatrix} 0 & \# & | & \bullet \\ 0 & 0 & | & \# \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$; SI; nos imaginamos a A y tenemos: $\text{rgf}(A) = 1$, $\text{rgf}(M) = 2$, $n=2$.

e) $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & | & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & | & \bullet \end{bmatrix}$; SCD; $\text{rgf}(A) = 4$, $\text{rgf}(M) = 4$, $n=4$.

f) $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & | & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \# \end{bmatrix}$; SI; $\text{rgf}(A) = 3$, $\text{rgf}(M) = 4$, $n=4$.

g) $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & | & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & | & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$; SCI; $\text{rgf}(A) = 2$, $\text{rgf}(M) = 2$, $n=4$.

El teorema de Rouche-Fröbenius da un marco teórico a lo ejemplificado.

Tabulemos lo obtenido –tener en cuenta que $\text{rgf}(A) \leq \text{rgf}(M)$ pues M se obtiene agregando una columna adicional a A –.

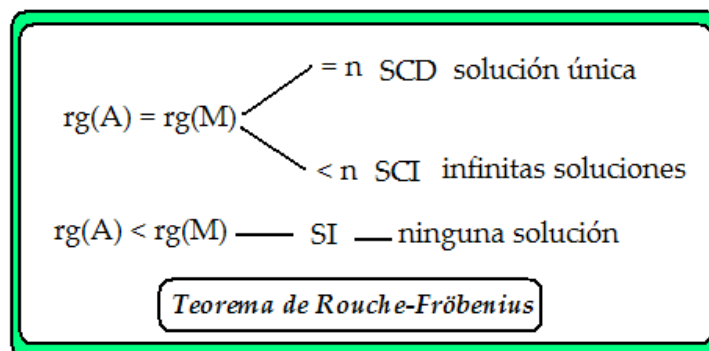
Ejemplo	Rango A	Rango M	n	Tipo de solución
(a)	2	2	2	SCD
(b)	1	2	2	SI
(c)	1	1	2	SCI
(d)	1	2	2	SI
(e)	4	4	4	SCD
(f)	3	4	4	SI
(g)	2	2	4	SCI

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$ hay solución:

- a) única si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n$
- b) infinitas si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) < n$

Recordar que los rangos filas y columnas coinciden; el número de columnas está dado por el número de incógnitas y por eso $\text{rg}A \leq n$ en cualquier caso.

Si $\text{rg}(A) < \text{rg}(M)$ no tenemos solución.



Actividad 28

a) Dado el sistema $A \cdot X = B$ de **m** ecuaciones con **n** incógnitas y sea **M** la matriz ampliada de dicho sistema.

Completar la tabla:

	Rango A	Rango M	n	Tipo de solución
1	5	6	6	
2	4	4	7	
3	3	3		SCD
4		2	2	SI
5	3		6	SCI

b) Analizar el rango de las siguientes matrices:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -10 & 13 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 23 & -3 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nota

¿Tiene algún tope el rango de la matriz que está analizando?

¿Convendría obtener el rango fila o el rango columna?

c) Analizar el rango de los siguientes conjuntos de vectores:

$$N = \{(0,1,1,0); (1,0,0,-2); (3,1,1,-6)\}$$

$$\tilde{N} = \{(-2,1,1,-1); (1,-2,-1,4); (2,5,1,-13); (-1,-1,0,3)\}$$

II.12.2. Equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales

¿Cómo podemos ver si dos sistemas de ecuaciones S_1 y S_2 son equivalentes o sea tienen el mismo conjunto solución?

Primero podríamos triangular cada conjunto de ecuaciones por separado y quedarnos con las independientes (cuya cantidad coincide con el rango de cada matriz de coeficientes y de la matriz ampliada; si éstas no son iguales ya no tendríamos solución y sólo son equivalentes los sistemas si ambos son incompatibles).

Si ambos sistemas son esencialmente iguales deben tener igual rango k . Por ende si los rangos de ambos sistemas fueran diferentes no podrán ser equivalentes.

O sea si el rango es k en ambos casos seguimos trabajando.

Ubicamos las k ecuaciones de uno de ellos y a continuación las k del otro (y éstas no son intercambiadas con ninguna de las del primero) procediendo a triangularlas. Si los sistemas son equivalentes las últimas k deben anularse por completo.

Ejemplo 17

Compruebe que $S: \begin{cases} -3x + 2y - z = 8 \\ 2x - y + 3z = -12 \end{cases}$ y $S': \begin{cases} -x + 2y + 9z = -24 \\ -11x + 9y + 8z = -4 \end{cases}$ son equivalentes.

El rango de ambos sistemas es 2 pues las dos ecuaciones son linealmente independientes (una no es múltiplo de otra).

Triangulemos ubicando por comodidad las de S' arriba y luego las de S .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ -11 & 9 & 8 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -13 & -91 & 260 \\ 0 & -4 & -28 & 80 \\ 0 & 3 & 21 & -60 \end{array} \right) \begin{array}{l} -11f_1 + f_2 \\ -3f_1 + f_3 \\ 2f_1 + f_4 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_2 \div 13 \\ f_3 \div 4 \\ f_4 \div 3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_2 + f_3 \\ f_2 + f_4 \end{array}$$

Toda solución de S cumple con las ecuaciones de S' y como ambos tienen igual rango representan al mismo sistema de ecuaciones; tiene idéntico conjunto solución.

• Compruebe que S_1 es equivalente a S_2 pero no es equivalente a S_3 .

$$S_1 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}, \quad S_3 = \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

II.13. Sistemas con parámetros

Un sistema como el que sigue se denomina un sistema con parámetros (en este caso un solo parámetro, α); aparte de las incógnitas x_1 y x_2 hay un número α que según el valor que tome puede influir en el tipo de solución.

$$S_1: \begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 = -6 \\ (\alpha^2 - 4)x_2 = (2 + \alpha) \end{cases}$$

Analicemos la matriz M: $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 2 & -6 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 2 + \alpha \end{array} \right)$.

La matriz M parece estar triangulada pero no lo es en todos los casos: si a_{11} (que vale α) fuera nulo no lo estaría.

Si α y $\alpha^2 - 4$ son diferentes de cero podríamos deducir x_2 de la segunda ecuación

($x_2 = \frac{2 + \alpha}{\alpha^2 - 4}$) y luego reemplazar dicho valor en la primera y obtener x_1 ; además $\text{rg}(A) =$

$\text{rg}(M) = n = 2$ y el sistema es SCD.

Si $\alpha = 0$ nos queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \end{array} \right)$; de la primera ecuación sale $x_2 = -3$ pero de la segunda $x_2 =$

$-\frac{1}{2}$ lo cual es inconsistente; tenemos un SI – si trabajáramos un poco llegaríamos a $\text{rg}(A) = 1$; $\text{rg}(M) = 2$.

Que $\alpha^2 - 4 = 0$ implica dos opciones: $\alpha = 2$ ó $\alpha = -2$ y nos quedan las matrices $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$ y

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ que corresponden a sistemas incompatibles e indeterminados

respectivamente. Resumiendo:

Valor de α	Tipo de solución
$\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$	SCD
0	SI
2	SI
-2	SCI

Ejemplo 18

Dada la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones analizamos el tipo de solución para las posibles combinaciones de los parámetros a y b .

$$S_2: \begin{pmatrix} 5-a & -2 & -1 & | & 1 \\ -2 & 2-a & -2 & | & 2 \\ -1 & -2 & 5-a & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}; \text{ reordenamos con } f_3, f_2, f_1.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5-a & | & b \\ -2 & 2-a & -2 & | & 2 \\ 5-a & -2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5-a & | & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & | & 2-2b \\ 0 & -12+2a & (5-a)^2-1 & | & (5-a)b+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2f_1+f_2 \\ (5-a)f_1+f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5-a & | & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & | & 2-2b \\ 0 & 0 & (5-a)^2-1-24+4a & | & (5-a)b+1+4-4b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2f_2+f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5-a & | & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & | & 2-2b \\ 0 & 0 & a^2-6a & | & (5-a)b+5-4b \end{pmatrix}$$

Si $(6-a)$ y (a^2-6a) son diferentes de cero ($a \neq 6$ y $a \neq 0$) ocurre que $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Si $a=6$ queda $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & 2-2b \\ 0 & 0 & 0 & | & 5-5b \end{pmatrix}$ que tiene solución solamente si $b=1$.

O sea si $a=6 \wedge b=1$ SCI ($\text{rg}(A)=\text{rg}(M)=1$, $n=3$); si $a=6 \wedge b \neq 1$ el sistema es incompatible.

Si $a=0$ resulta $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & | & b \\ 0 & 6 & -12 & | & 2-2b \\ 0 & 0 & 0 & | & b+5 \end{pmatrix}$; para $b=-5$ es $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 < n = 3$ y hay infinitas

soluciones; si $b \neq -5$ el sistema es incompatible.

En fin:

$a \backslash b$	$R-\{1, -5\}$	1	-5
$R-\{0, 6\}$	SCD		
6	SI	SCI	SI
0	SI		SCI

Actividad 29

Analizar las soluciones según el valor que asumen los parámetros (respuestas en el Apéndice):

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -3 \\ 0 & -a+1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & b+2 & | & 3-a \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ k & k+1 & -1 & | & k \\ 5 & k & 13 & | & k+4 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 1 & -3 & 3 & | & b \\ 2 & -1 & 4 & | & c \end{pmatrix}$

$$\text{iv)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & -6a-12 \\ -2 & -1 & 1 & 3a+5 \\ 3 & -1 & 3 & a+5 \end{array} \right) \text{ (piense en algún "truco" que facilite la triangulación)}$$

III14. La inversa de una matriz (segunda aproximación)

Recordemos que una matriz A de $n \times n$ es inversible si existe una matriz B de $n \times n$ tal que:

$A \cdot B = B \cdot A = I^{n \times n}$ donde esta última es la identidad para matrices cuadradas de orden n .

En la pp. 69-71 se vió que se trataba de **resolver en forma simultánea varios sistemas de ecuaciones lineales con diferentes términos independientes**.

O sea que $A \cdot B = I$ puede pensarse como la resolución de $A \cdot X^1 = E^1$, $A \cdot X^2 = E^2$, ..., $A \cdot X^n = E^n$ donde E^i es la i -ésima columna de la identidad $n \times n$ y X^i es el i -ésimo vector columna de la matriz que por ahora resulta ser desconocido. Al tener todos estos n sistemas con n incógnitas cada uno de ellos **la misma matriz A** , las operaciones elementales de filas son idénticas para todos y sólo cambian los valores de cada vector de términos independientes.

Ejemplo 19

$$\text{I) Calcular la inversa de } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por Gauss-Jordan buscando obtener la identidad del lado izquierdo de la matriz ampliada M .

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \text{ reordenamos } f_2, f_3 \text{ y } f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 + f_2 \\ -2f_1 + f_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} 2f_2 + f_3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_3 + f_1 \\ f_3 + f_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} -f_2 + f_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ la inversa es } A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ [¡Verificarla!]}$$

Comentario

Si al resolver llegamos a un sistema incompatible no existirá inversa.

Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es inversible pues al plantear $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la

última ecuación para la tercera columna de A^{-1} sería $0 \cdot x_{33} = 1$, la cual no tiene solución.

Una matriz cuadrada de $n \times n$ es inversible si y sólo si su rango es n

Actividad 30

Obtener las inversas (si las hubiera) de las siguientes matrices³⁵ (respuestas en el Apéndice):

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.14.1. Inversa y sistemas de ecuaciones lineales

Si tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas podemos representarlo como $A \cdot X = B$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, X y $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Si A es inversible resulta que $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow (I^{n \times n}) \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow$
 $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

La expresión obtenida nos permite hallar X .

Ejemplo 20

Sea el sistema $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$. a) Resolverlo por Gauss (tarea para el lector).

b) El sistema puede expresarse como $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

³⁵ Adaptado de Williams, Gareth (2002): "Algebra Lineal con aplicaciones", Mc Graw-Hill, Interamericana Editores, Cuarta edición, México, p. 87 y Poole, David (2006): "Algebra Lineal. Una introducción moderna", Cengage Learning Editores S.A., Segunda Edición, México D.F., p.p. 173-177.

la matriz A de coeficientes del sistema es cuadrada y vale $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; su inversa

(ejemplo 19) es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Por ende $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x=1; y=-1; z=1$ (compararlo con el resultado obtenido en a)

Una cuestión puede haber surgido:

¿Qué tan conveniente es obtener a X de este modo donde hallar la inversa resultó ser más largo que resolver el sistema de ecuaciones?

La **ventaja** puede radicar en la necesidad de hallar la solución para varios sistemas con igual matriz A y diferentes B (B, B', B'', ...); cada solución (X, X', X'', ...) se obtiene efectuando el producto de A^{-1} por la matriz de términos independientes correspondiente.

Así para el **nuevo** sistema $\begin{cases} 2x-3y-5z=-3 \\ x-y-2z=2 \\ -x+3y+5z=-4 \end{cases}$ la solución es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix} \rightarrow$
 $x=-7; y=23; z=-16$.

II.15. Las "otras" miradas sobre un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema S: $\begin{cases} 2x-3y-5z=0 \\ x-y-2z=0 \\ -x+3y+5z=1 \end{cases}$ como el ya trabajado puede pensarse de diferentes modos:

a) Como la búsqueda de la intersección (si la hubiera) entre tres planos en el espacio.

Los planos son $\Pi: 2x-3y-5z=0$; $\Pi': x-y-2z=0$; $\Pi'': -x+3y+5z=1$.

Si tuviéramos más de tres incógnitas esta mirada geométrica escapa a nuestra percepción sensorial. Tal vez alguno de nuestro lectores tenga un desarrollo cognitivo lo suficientemente versátil como para "ver" en cuatro o más dimensiones (para nosotros aún no es accesible).

b) Como una combinación lineal de vectores y el análisis de la dependencia o independencia lineal entre ellos:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estamos viendo si el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ o sea si pertenece al **subespacio**³⁶ que generan estos tres últimos vectores.

c) La representación $A \cdot X$ nos suministra para cada vector incógnita X una respuesta o imagen $A \cdot X = f(X)$ que puede coincidir o no con B .

Si coincide con B decimos que X es una solución del sistema.

$$\text{Así } \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

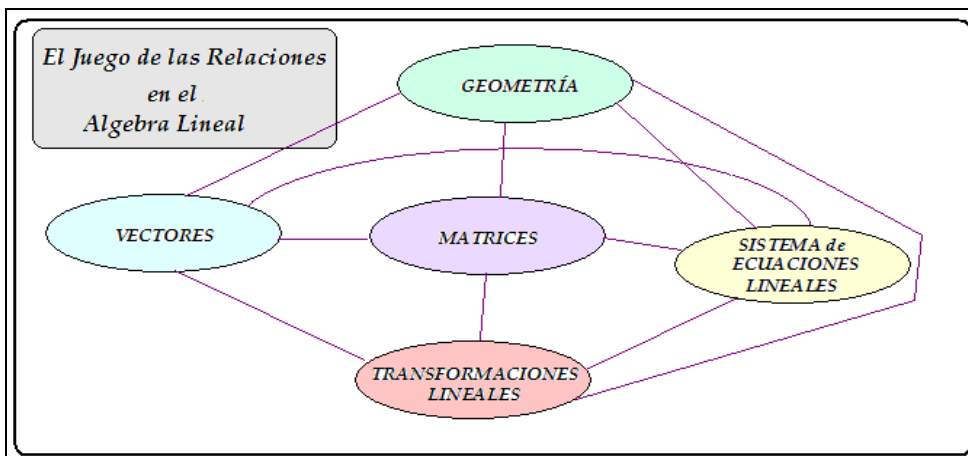
$$\text{en cambio } \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \neq B;$$

por lo tanto $\begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix}$ no es solución del sistema $A \cdot X = B$.

La función $f(X) = A \cdot X$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^{n \times 1}$ en $\mathbb{R}^{m \times 1}$ si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y representa a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$f(X)$ es la imagen de X bajo f y por lo tanto el plantear $f(X) = B$ puede verse como la certificación de si B es un elemento de la imagen de f .

Por lo tanto un sistema incompatible es aquel donde **ningún resultado** de los obtenidos al transformar los infinitos X posibles permite obtener a B .



³⁶ Subconjunto de un espacio vectorial con determinadas propiedades. Este tema se desarrollará más adelante.



Actividad de refuerzo 12

(I) Sea el sistema $S: \begin{cases} 2x + y = b \\ -x + a.y = 23 \end{cases}$, a y b reales.

a) Hallar a y b para que la solución a S sea $\{(-5; 6)\}$.

b) Si a hubiera sido $-1/2$ y $b=4$, encuentre la *nueva* solución.

c) Si un sistema $S': \begin{cases} 4x + 3y = \alpha \\ -3x + 5.y = \beta \end{cases}$ – con α y β valores reales– tiene por solución al $(-1; 4)$,

¿cuál sería la solución para el nuevo sistema: $\begin{cases} -4x + 3y = \alpha \\ +3x + 5.y = \beta \end{cases}$?

(II) Por medio del método de Gauss compruebe que el sistema $S: \begin{cases} 4x + 5y = 4 \\ -x - 3y = 6 \\ -3x + y = -22 \end{cases}$ tiene

solución única. ¿Cuál es ésta?

(III) Dado el sistema $S: \begin{cases} -x + y = 4 \\ 2y + z = 6 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$, se pide:

a) Expresarlo matricialmente.

b) Halle la inversa de la matriz A del sistema.

c) A través de A^{-1} obtenga la solución del sistema S.

d) Indique al sistema como una combinación lineal de vectores y señale cual combinación

nos da al vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

e) Defina la función $T(X) = A.X$ con A la matriz del sistema de ecuaciones.

Obtenga $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ y cuál vector \vec{v} cumple con $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

II.16. Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos.

Si $A.X = B$ representa un sistema \mathcal{S} de m ecuaciones lineales con n incógnitas y B no es la matriz nula de $m \times 1$ ($O^{m \times 1}$) diremos que \mathcal{S} es un sistema lineal *no homogéneo*;

si B fuera $O^{m \times 1}$ se dice que \mathcal{S} es un sistema lineal *homogéneo*.

Por ejemplo $\mathcal{S}: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$ es un sistema no homogéneo y,

$$\mathcal{S}_H: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \text{ es homogéneo.}$$

Un sistema homogéneo *siempre es compatible* pues asignando valor cero simultáneamente a cada una de las variables todas las ecuaciones se satisfacen.

En el ejemplo observamos que ambos sistemas comparten la misma matriz A de coeficientes del sistema; diremos que \mathcal{S}_H es el sistema homogéneo asociado a \mathcal{S} . Si \mathcal{S} fuera homogéneo tendríamos que \mathcal{S} y \mathcal{S}_H coincidirían.

Vamos a tratar de vincular las soluciones de \mathcal{S} y \mathcal{S}_H .

Sean X' y X'' soluciones de \mathcal{S} o sea:

$$A.X' = B$$

$$A.X'' = B$$

Si restamos miembro a miembro: $A.X' - A.X'' = O$ (matriz nula)

$$A.(X' - X'') = O$$

O sea que $X' - X'' = H_1$ que es una solución del sistema \mathcal{S}_H ; esto es $A.H_1 = O$

Por otro lado si efectuamos $\alpha.H_1$ con α un número real resulta:

$$A.(\alpha.H_1) = (A.\alpha).H_1 = \alpha.(A.H_1) = \alpha.O = O.$$

O sea que $\alpha.H_1$ es una nueva solución del sistema homogéneo asociado.

De la igualdad $X' - X'' = H_1$ podemos pensar que para cierto X es $X - X'' = \alpha.H_1$ y despejando sale que $X = X'' + \alpha.H_1$ lo cual puede interpretarse del siguiente modo: podemos obtener infinitas soluciones de \mathcal{S} si conocemos una (X'') del mismo y una no nula de \mathcal{S}_H (si fuera nula cualquier múltiplo de ella nos regresa el vector nulo y la única solución es X'').

El conjunto de soluciones de \mathcal{S} se obtiene tomando una solución particular de \mathcal{S} y sumar cada vez una solución del sistema \mathcal{S}_H asociado; a cada una de las infinitas posibilidades de \mathcal{S}_H -si fuera un SCI- le vamos sumando X'' y conseguimos una nueva solución X de \mathcal{S} .

Antes de pasar a un ejemplo comentemos que la *búsqueda de soluciones para un sistema homogéneo* $A.X = O$ puede admitirse como la obtención de raíces o ceros de la función -y transformación lineal- $f(x) = A.X$.

Básicamente estamos planteando $A.X = O$ como muchas veces hicimos a lo largo de nuestro recorrido educativo (¿o se olvidó de $x^2 - 6x - 7 = 0$ de la escuela media?).

Ejemplo 21

I) Sean $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ soluciones del sistema $\mathcal{S}: A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Dar tres soluciones adicionales de \mathcal{S} .

Si X' y X'' son soluciones $\rightarrow H_1 = X' - X'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es solución de \mathcal{S}_H y $\alpha \cdot H_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ también.

Entonces otras soluciones X de \mathcal{S} son de la forma: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = 2 \rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$; $\alpha = -2 \rightarrow X_{-2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\alpha = 3 \rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$;

b) ¿Cuál de las soluciones anteriores $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple con que $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$?

Como $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$ se tiene que $2(-\alpha) - (-4\alpha - 1) + \alpha + 1 - 3(5\alpha + 2) = 32$

$-2\alpha + 4\alpha + 1 + \alpha + 1 - 15\alpha - 6 = 32 \rightarrow -12\alpha - 4 = 32 \rightarrow -12\alpha = 36 \rightarrow \alpha = -3 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

c) Si $Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $\mathcal{S}' : A \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ indicar otras 3 soluciones del sistema

$\mathcal{S}'' : A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

El sistema \mathcal{S}'' tiene igual \mathcal{H} que \mathcal{S} y \mathcal{S}' ; por lo tanto una cantidad infinita de soluciones

de \mathcal{S}'' las obtendremos sumando una particular del mismo a $\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ -que permite obtener

este último soluciones homogéneas-.

Tratamos de “rearmar” la ecuación $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sabemos que $A. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y que $A. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

de esta última si multiplicamos por 3 a ambos miembros sale:

$$3.A. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow A.[3. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow A. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si sumamos $A. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $A. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ obtenemos $A. \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A. \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es una solución particular de \mathcal{S}'' .

Otras soluciones de \mathcal{S}'' son: $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha. \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Con α igual a 1, 2 y 3 obtenemos $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Actividad 31

a) Se sabe que $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ son (respectivamente) soluciones de los sistemas $A.X = B$,

$A.X = C$ y $A.X = O$.

Obtener 3 soluciones para los sistemas $S: A.X = B + C$; $S': A.X = -\frac{1}{3}B + 5.C$

b) Dados los sistemas $S: \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ (k-1).x_1 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$ y $S': \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + (3-\beta).x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 + \frac{\beta}{2}.x_4 = 8 \end{cases}$:

b1- Hallar k y β sabiendo que $(-1, 2, 2, 4)$ es solución de ambos sistemas.

b2- Encuentre todas las soluciones comunes a S y S' .

II.17 Actividades de repaso y reafirmación de contenidos

- 1) Dados los puntos $Q = (1; 0)$, $R = (4; 1)$, $S = (3; 5)$, $M = (-5; 4)$, $N = (-6; 1)$ y $P = (-1; -3)$.
- Graficar en el plano.
 - Obtener e indicar en la gráfica los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ y \vec{w}_5 que permiten producir el recorrido MNPQRS (en ese orden).
 - Hallar la distancia de Q a S.
 - ¿Qué punto T cumple con \overrightarrow{PT} equivalente a \overrightarrow{NM} ?
 - ¿Cuál es el punto medio del segmento \overline{MP} ?
 - Demostrar que $\triangle NMR$ es un triángulo rectángulo en M.
 - Conseguir $\vec{v} // \overline{QN}$ de sentido contrario y $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{41}{2}}$
 - ¿Qué punto H del eje y cumple con $\overline{MP} \perp \overline{HS}$?
 - Obtener las ecuaciones vectorial y explícita de la recta r que pasa por M y Q.
 - ¿Quién es r' perpendicular a r que pasa por S?
 - Establecer $r'' // r$ cuya abscisa al origen es $x = -5$.
- 2) Si $A = (1; 2)$, $B = (-2; 6)$ y $C = (6; 2)$:
- Verificar que $d(A; B) = d(A; C)$
 - Obtener D tal que ABDC sea un rombo.
 - Comprobar que los lados del rombo son paralelos entre sí.
 - Corroborar que las diagonales son perpendiculares entre sí.
- 3) Sea $A = (-6; 4)$.
- Elegir $B \neq A$ y establecer \overline{AB} y su norma.
 - Obtener C diferente a A tal que $\overline{AC} \perp \overline{AB}$.
 - ¿Qué vector \vec{w} es paralelo a \overline{AC} y de igual tamaño al \overline{AB} ?
 - Si $D = A + \vec{w}$ y $E = A - \vec{w}$, ¿qué tipos de triángulos son los AEB y ADB? ¿Cuánto vale el área de cada uno de ellos?
- 4) a) Hallar y graficar las rectas perpendiculares a la recta $\frac{x-1}{5} = y-4$ que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 5.
- b) La ecuación de la recta que contiene al punto $R = (-3, 1)$ siendo este el pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la recta buscada. Ayúdese con un esquema.

5) Dadas $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Obtener sin hacer todo el producto:

- La segunda fila de $A \cdot B$

- b) La tercer columna de B.A
 c) El coeficiente c_{13} de $C=B.A.B$

6) Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, hallar $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A^2 + X = 2B$.

7) Si $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ determine todos los valores de a y b para que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

8) Simplificar las siguientes expresiones matriciales³⁷:

- a) $A.(A - 4B) + 2B.(A+B) - A^2 + 7B^2 + 3A.B$
 b) $B.(2I - B.A) + B.(4I + 5A).B - 3B.A.B + 7B^2.A$

9) ¿Qué lo incorrecto en la siguiente demostración³⁸?

Si $A.X = B$ es un sistema de ecuaciones con A de orden n y X_1 y X_2 son dos soluciones sucede que:

$$A.X_1 = B \text{ y } A.X_2 = B \quad \rightarrow \quad A.X_1 = A.X_2 \quad \rightarrow \quad X_1 = X_2$$

Entonces nunca un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene más de una solución.

10) Dado un sistema de 2×2 podemos representarlo por $A.X = B$.

Si A es inversible ocurre que $A^{-1}.(A.X) = (A^{-1}.A).X = I.X = X = A^{-1}.B$

O sea que la solución es $X = A^{-1}.B$

Para los siguientes sistemas escribalos en forma matricial, obtenga A^{-1} y luego la solución X.³⁹

$$S_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad S_3: \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ -6x_1 + 2x_2 = -8 \end{cases}$$

11) Encuentre todos los valores de a real para que las siguientes ecuaciones tenga⁴⁰:

a) Exactamente una única solución; b) infinitas soluciones; c) ninguna solución.

I) $a^2.x - 2 = 4x + a$ II) $(a^4 - 1).x = a + 1$ III) $(a^2 + 1)x = a$ IV) $ax - a^2.y = 3a$

12) Al encuestar a 100 mil titulares de autos (70% pequeños y 30% grandes) se supo que para la próxima compra anual el 75% de lo que tienen auto chico seguirán con esa elección y 65% de poseedores de autos grandes prosiguen con ese gusto.

A través de un modelo matricial obtenga la distribución de autos luego de 12 años.

³⁷ Williams, Gareth (2002): "Algebra Lineal con aplicaciones", Mc Graw-Hill, Interamericana Editores, Cuarta edición, México, p.64.

³⁸ Idem anterior, p.64.

³⁹ Adaptado de Williams, p.87.

⁴⁰ Adaptado de Nakos, George; Joyner, David (1988): "Algebra Lineal con Aplicaciones", International Thomson Editores, México, p.12.

¿Existe alguna distribución inicial de tal manera que la misma permanezca inalterable a lo largo del tiempo?

13)⁴¹ Un negocio de ropa se provee de camisas de dos talleristas (A y B). El primero le entrega 150 camisas de abrigo por semana y 50 de vestir; el segundo 100 y 60 respectivamente.

Si consideramos los vectores columnas como $\vec{v} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}' = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \end{bmatrix}$ interprete a:

a) $\vec{v} + \vec{v}'$ b) $\vec{v} - \vec{v}'$ c) $8 \cdot \vec{v}$ d) $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}'$ con α y $\beta \in \mathbb{R}^+$.

e) ¿Cuántas veces proveyó cada tallerista para que el comerciante tenga a disposición 1900 camisa de abrigo y 820 de vestir?

II.18 Apéndice

II.18.1. Otras formas de explicitar una recta en el plano

Partiendo de la expresión *ecuación vectorial* de la recta $\boxed{r: \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + P}$ $\alpha \in \mathbb{R}$,

obtenemos las *ecuaciones paramétricas cartesianas* $\begin{cases} u_x = \alpha \cdot v_x + p_x \\ u_y = \alpha \cdot v_y + p_y \end{cases}$

Si se despeja α en ambas ecuaciones (será posible si v_x y v_y no son nulos): $\begin{cases} \frac{u_x - p_x}{v_x} = \alpha \\ \frac{u_y - p_y}{v_y} = \alpha \end{cases}$

igualando se llega a $\boxed{\frac{u_x - p_x}{v_x} = \frac{u_y - p_y}{v_y}}$ [II.2.4] *ecuación simétrica* de la recta.

Normalmente se usa x como u_x e y como u_y quedando $\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$.

Si de esta ecuación se despeja y

$$\left(\frac{x - p_x}{v_x} \right) \cdot v_y = y - p_y \rightarrow \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \cdot (x - p_x) = y - p_y \rightarrow \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \cdot x - \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \cdot p_x + p_y$$

a las siguientes expresiones (que dan un número real siempre que $v_x \neq 0$) se le asigna un

nuevo nombre: $m = \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$ y $b = -\left(\frac{v_y}{v_x} \right) \cdot p_x + p_y$

De esta manera se obtiene una nueva expresión $\boxed{y = m \cdot x + b}$ [II.2.5] llamada *ecuación explícita* de la recta.

De aquí se pueden reconocer otras dos posibilidades:

a) $-m \cdot x + y - b = 0$; si se multiplica por un número no nulo β queda

⁴¹ Adaptado de Nakos, p. 73.

$$\beta \cdot (-m) \cdot x + \beta \cdot y + \beta \cdot (-b) = \beta \cdot 0 \rightarrow y \text{ si se renombra lo sombreado da } \boxed{s \cdot x + t \cdot y + q = 0} \quad [\text{II.2.6}]$$

b) $y - m \cdot x = b$; si $b \neq 0$ se puede dividir ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y}{b} - \frac{m \cdot x}{b} = 1 \rightarrow \frac{y}{b} + \left(-\frac{m}{b}\right) \cdot x = 1 \rightarrow \frac{y}{b} + \left(\frac{1}{-\frac{b}{m}}\right) \cdot x = 1; \text{ si } x_0 = -\frac{b}{m} \text{ e } y_0 = b \text{ queda}$$

$$\boxed{\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1} \quad [\text{II.2.7}] \text{ ecuación segmentaria de la recta R.}$$

La intención no es recordar el nombre de cada manera de expresar una recta sino reconocer en qué caso se está ante las ecuaciones de una recta y cuando no.

II.18.2

Desafío 1

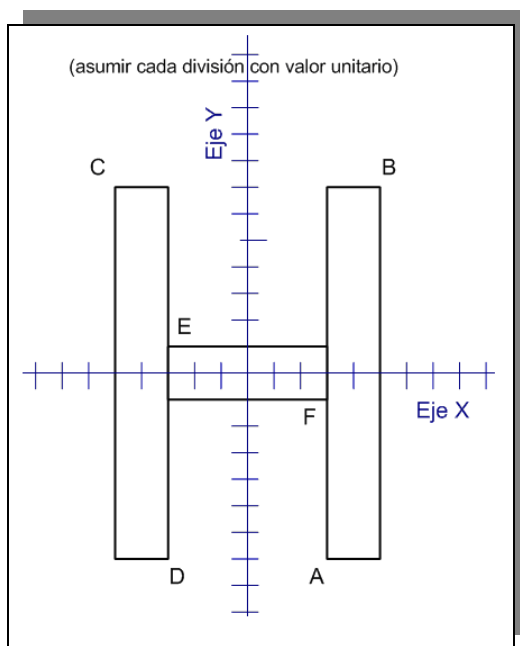
1) Utilizando la figura responda a las consignas.

a) Identifique los puntos indicando sus coordenadas.

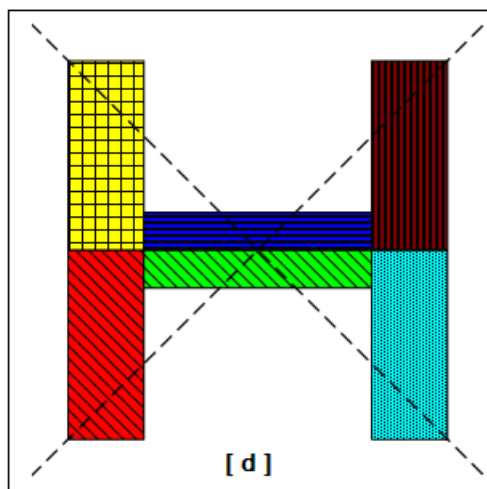
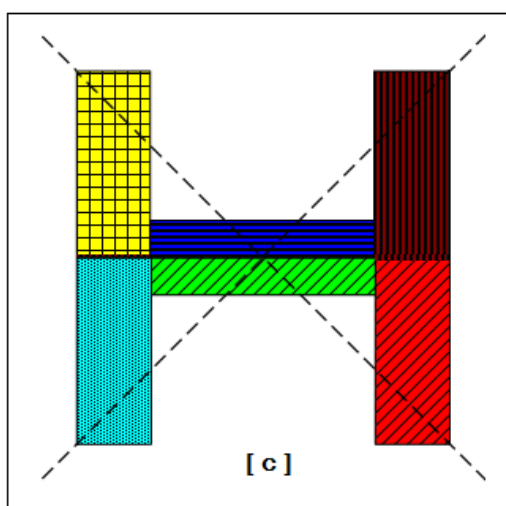
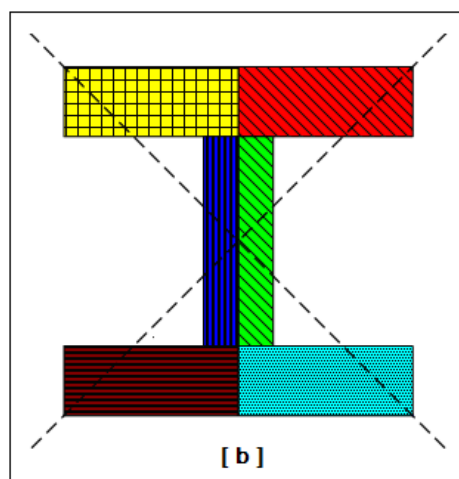
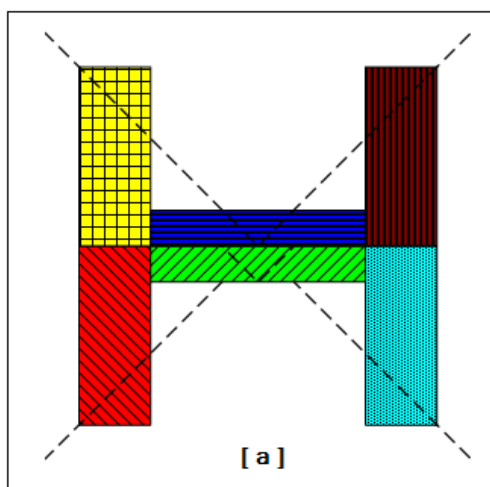
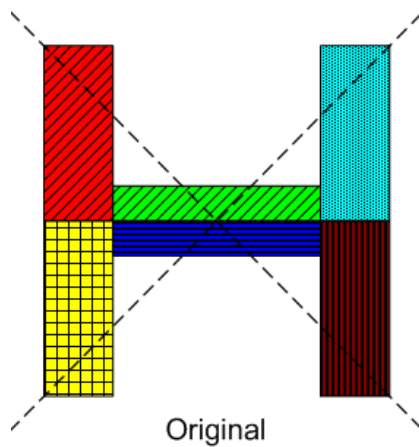
b) Realice

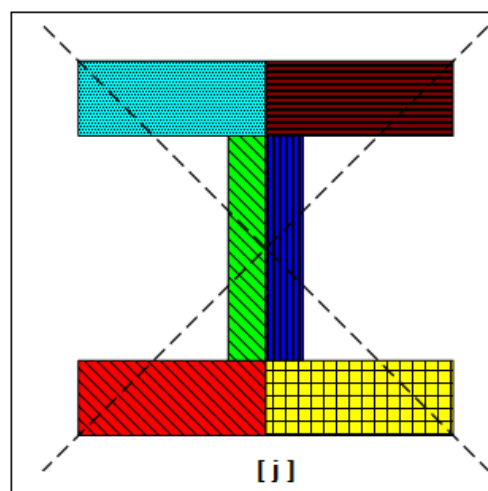
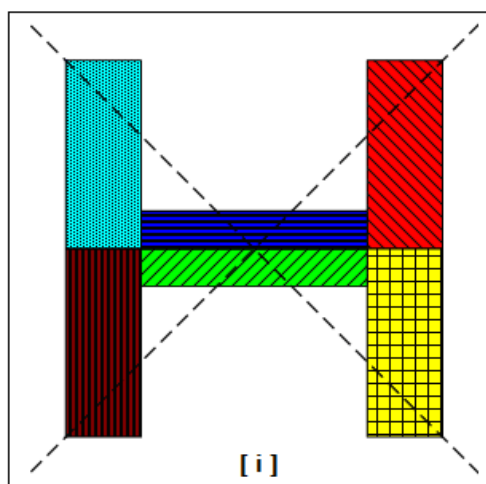
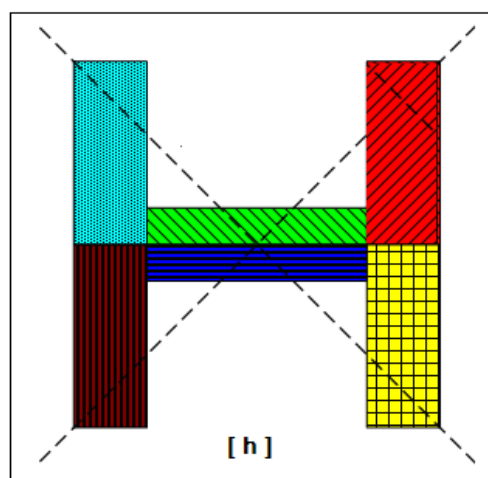
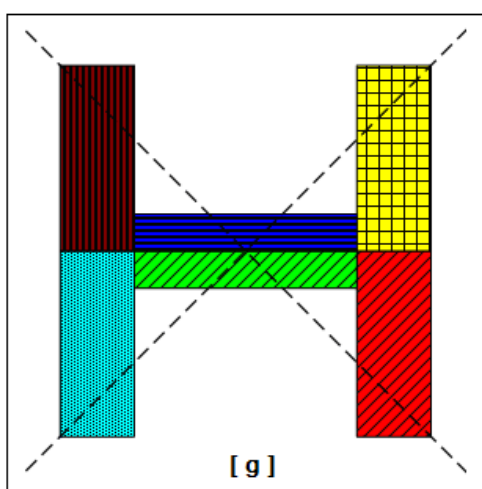
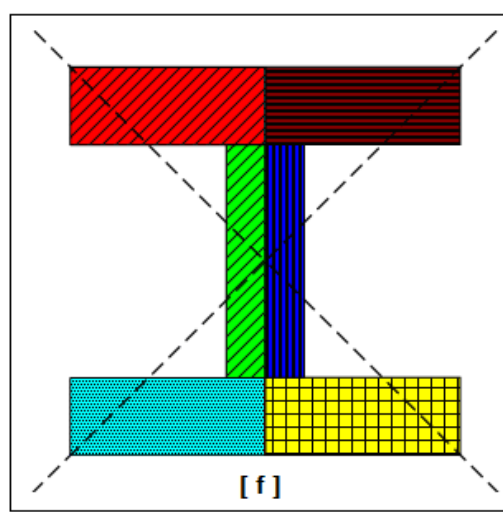
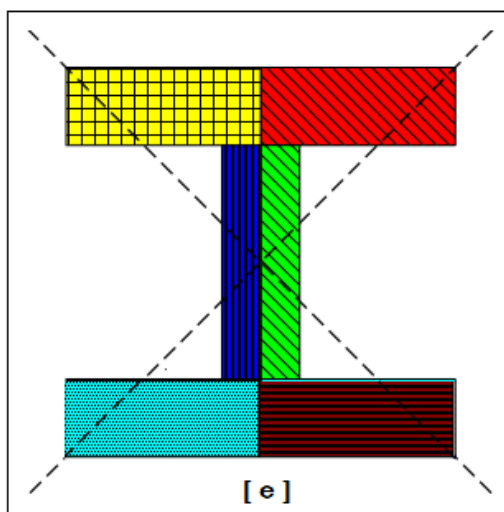
- I. Giro 90° izquierdo
- II. Giro 90° derecha
- III. Giro 45° izquierdo
- IV. Giro 45° derecha
- V. Simetría central

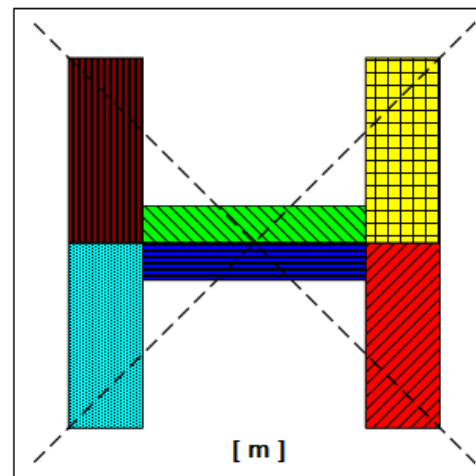
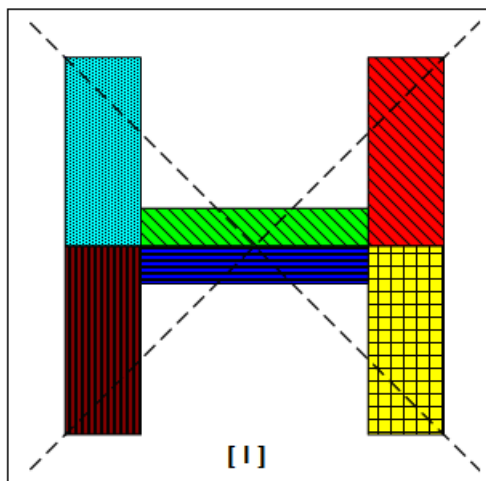
- VI. Simetría axial eje x
- VII. Simetría axial eje y
- VIII. Proyección eje x
- IX. Proyección eje y



2) A partir de la figura original, determine para cada una de las figuras siguientes si han sido obtenidas o no a partir de una de las operaciones de giro, simetría (axial o central) o proyección.







II.18.3. Mapa Actividad 1 (pág.19)

