

# ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALÍTICA I (1027)

## *TEJIENDO EL ALGEBRA LINEAL*

### **Apunte II**

Versión 2.2 – Septiembre del 2015

**Segundo Cuatrimestre del 2015**

**Julio Bertúa – Marcelo Denenberg**

## *Indice*

### ***Unidad III: Geometría y matrices. Los sistemas y sus aplicaciones. El determinante.***

#### III.1. El plano

III.1.1. Ecuación implícita (o general) y ecuación vectorial del plano

III.1.2. Relación entre planos.

III.1.3. Relación entre rectas y planos.

#### III.2. Dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^3$ en forma geométrica (ld – li)

III.3.1. Distancia de un punto a un plano.

III.3.2. Distancia de un punto a una recta.

III.3.3. Distancia de una recta a un plano.

III.3.4. Distancia entre rectas.

#### III.4 Las transformaciones lineales y la Geometría en el plano

III.4.1 La traslación y las coordenadas homogéneas

#### III.5. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales en la Vida Diaria, la Ciencia y la Tecnología.

III.5.1. Interpolación de una Función Polinómica.

III.5.2. Circuitos Eléctricos.

III.5.3. Balance de Ecuaciones Químicas.

III.5.4. Tráfico en la ciudad.

III.5.5. Función de Demanda.

III.5.6. Modelo de Leontief y la Economía.

III.5.7. Transmisión del Calor y Temperaturas medias en una placa metálica.

III.5.8. Los procesos de Markov.

#### III.6. Determinantes

III.6.1. Desarrollo de Laplace

III.6.2. Desarrollo por propiedades

III.6.3. Mix Laplace y Propiedades

#### III.7. La inversa de una matriz y su determinante.

III.7.1. Determinante de la matriz inversa.

III.8. Obtención de la inversa por la Adjunta.

III.9. Sistemas de ecuaciones lineales e Inversa

III.10. Apéndice.

**Resumen**

Regresamos a Geometría para estudiar los planos en el espacio, las relaciones entre éstos con las rectas y la distancia de un punto a un plano, de una recta a un plano y entre dos rectas.

Introduciremos el concepto de coordenadas homogéneas que nos permitirá incluir a las traslaciones dentro de un tratamiento matricial versátil y que es una herramienta importante en Computación Gráfica.

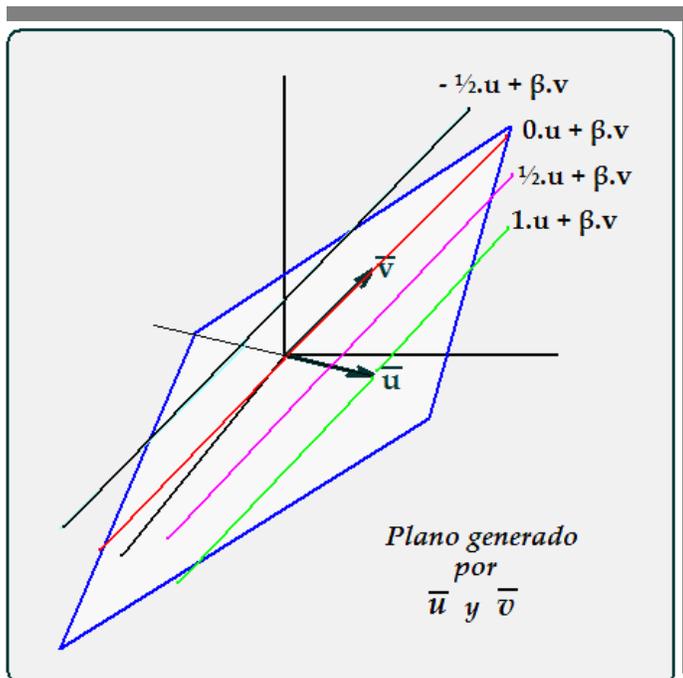
Más adelante una serie de aplicaciones de los temas abordados hasta aquí a distintas disciplinas para finalizar con el concepto de determinantes.

**III.1. El plano**

Consideremos dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no nulos en  $R^3$  y efectuemos todas las combinaciones lineales de ambos o sea obtengamos todos los vectores  $\vec{w}$  que surgen de efectuar la expresión  $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$  con  $\alpha$  y  $\beta$  cualquier par de números reales.

Si  $\alpha=0$  nos queda que  $\vec{w} = \beta \cdot \vec{v}$  y obtenemos todos los puntos de la recta que pasa por el origen y está dirigida por  $\vec{v}$ . Apoyémonos en un gráfico.

Si  $\alpha=1$  nos queda que  $\vec{w} = \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$  y alcanzamos todos los puntos de la recta que pasa por el extremo de  $\vec{u}$  (en adelante punto U) y está dirigida por  $\vec{v}$ .



Si  $\alpha=1/2$  nos queda que  $\vec{w} = 1/2\vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$  y dan todos los puntos de la recta que pasa por  $1/2U$  y está dirigida por  $\vec{v}$ .

Para  $\alpha=-1$  resulta  $\vec{w} = -\vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$  o sea la recta que pasa por  $-U$  y está dirigida por  $\vec{v}$ .

.....

Y así siguiendo se consiguen infinitas rectas paralelas orientadas por  $\vec{v}$  y que pasan por un punto de la recta  $r': (x,y,z) = \alpha \cdot \vec{u}$ .

El resultado es un plano que pasa por el origen y está generado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

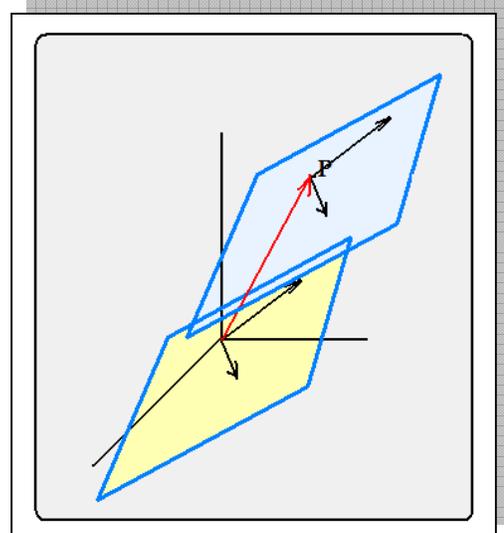
O sea  $A = (x, y, z)$  es un punto perteneciente al plano si existen algún  $\alpha$  y algún  $\beta$  reales tal que  $(x, y, z) = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

Si sumáramos a la expresión anterior un punto  $P$  geoméricamente estamos trasladando cada punto un vector  $\vec{OP}$  y todo el plano anterior se desplaza esa cantidad vectorial.

Sean  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ,  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y  $P = (p_x, p_y, p_z)$ .  
Un punto  $A = (x, y, z)$  pertenece al plano generado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y que pasa por  $P$  si existen algún  $\alpha$  y algún  $\beta$  reales tal que:

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (u_x, u_y, u_z) + \beta \cdot (v_x, v_y, v_z) + (p_x, p_y, p_z)$$

Se llama *ecuación paramétrica vectorial del plano*.



Operando e igualando componentes se tiene:

$$\begin{cases} x = \alpha u_x + \beta v_x + p_x \\ y = \alpha u_y + \beta v_y + p_y \\ z = \alpha u_z + \beta v_z + p_z \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ecuaciones paramétricas cartesianas del plano}$$

### Ejemplo 1

a) Obtener las ecuaciones vectorial y paramétricas del plano  $\Pi$  que pasa por  $P = (2, -1, 3)$  y está generada por los vectores  $\vec{u} = (0, 3, 1)$ ,  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ .

$(x, y, z) \in \Pi$  si se cumple:

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (0, 3, 1) + \beta \cdot (-1, 0, 2) + (2, -1, 3)$$

$$\Pi: \begin{cases} x = -\beta + 2 \\ y = 3\alpha - 1 \\ z = \alpha + 2\beta + 3 \end{cases}$$

• Dar tres puntos diferentes a  $P$  que se encuentren en el plano:

Si  $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$  se tiene que  $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + (2, -1, 3) = (1, -1, 5)$

Si  $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$  nos da  $(x, y, z) = (0, 3, 1) + (2, -1, 3) = (2, 2, 4)$

Si  $\alpha = 1 \wedge \beta = -1$  conseguimos  $(x, y, z) = (0, 3, 1) - (-1, 0, 2) + (2, -1, 3) = (3, 2, 2)$

• ¿Con cuál valor de  $k$  resulta que  $D = (k-6, -2k+3, k+2)$  es un punto de  $\Pi$ ?

Si  $D$  está en el plano resulta que existen  $\alpha$  y  $\beta$  tal que:

$$(k-6, -2k+3, k+2) = \alpha \cdot (0, 3, 1) + \beta \cdot (-1, 0, 2) + (2, -1, 3)$$

$$\begin{cases} k-6=-\beta+2 \\ -2k+3=3\alpha-1 \\ k+2=\alpha+2\beta+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-k+8 \\ \alpha=\frac{-2k+4}{3} \\ k+2=\alpha+2\beta+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-k+8 \\ \alpha=\frac{-2k+4}{3} \\ k+2=-\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}-2k+16+3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta=-k+8 \\ \alpha=\frac{-2k+4}{3} \\ k+\frac{2}{3}k+2k=\frac{4}{3}+16+3-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-k+8 \\ \alpha=\frac{-2k+4}{3} \\ \frac{11}{3}k=\frac{55}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-k+8 \\ \alpha=\frac{-2k+4}{3} \\ k=5 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \beta=3 \\ \alpha=-2 \\ k=5 \end{cases}}$$

El punto D resulta ser  $(-1; -7; 7)$

### Comentario

En el Apunte I, pág 35, se propuso la actividad 10 donde se pedía demostrar que  $\mathbb{R}^3$  constituye un *espacio vectorial real*.

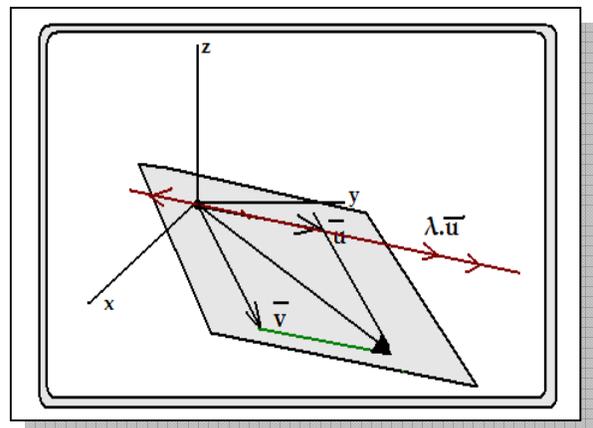
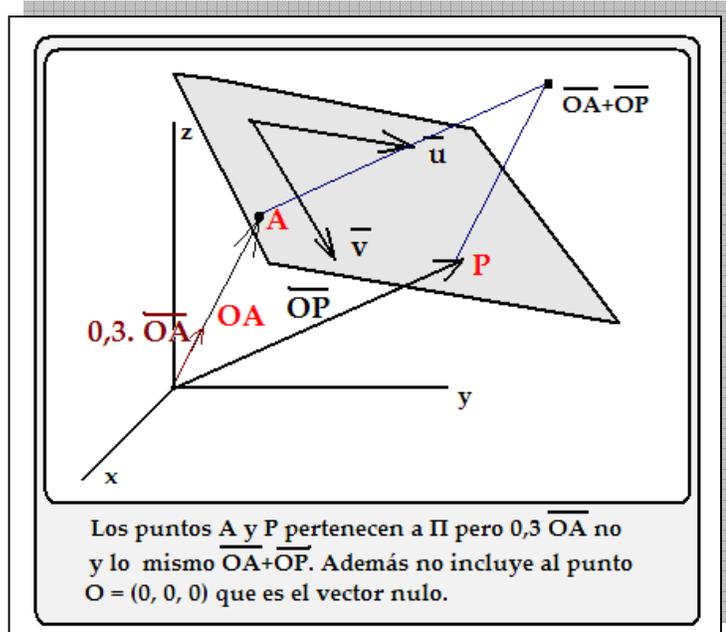
Nuestra intención es *visualizar* si los conjuntos  $\Pi_o$  y  $\Pi$  que representan a sendos planos –uno por el origen y el otro fuera del mismo– forman o no espacios vectoriales reales.

Varias propiedades las heredan de lo que ocurre en todo  $\mathbb{R}^3$  como ser la asociatividad y conmutatividad para la suma entre vectores y la asociatividad en el producto por escalares.

Por eso nos focalizaremos especialmente en tres:

I) si la suma de vectores y II) el producto por un escalar son operaciones cerradas y III) si el elemento neutro ( $\vec{0}$ ) pertenece al conjunto.

Esta última condición descarta a  $\Pi$  pero es ilustrativo observar que las otras dos tampoco se satisfacen.

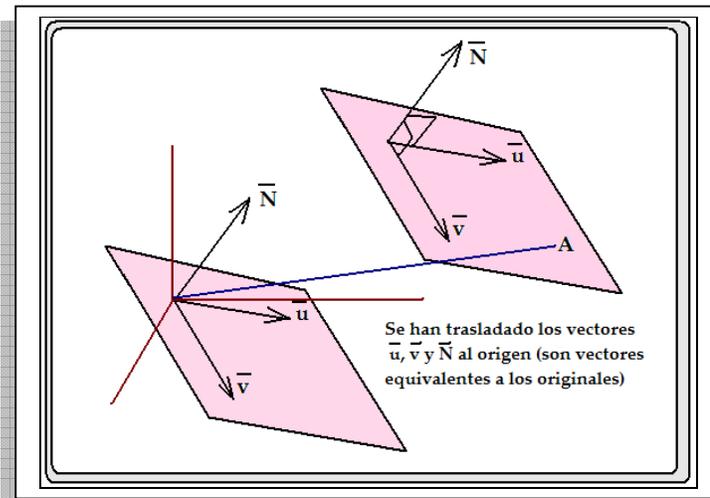


En cambio en  $\Pi_o$  el vector nulo está incluido, la suma de dos vectores del plano también pertenece al mismo y cualquier múltiplo de uno de ellos también lo hace<sup>1</sup>.

Se trata de un *subespacio vectorial*

### III.1.1. Ecuación implícita (o general) y ecuación vectorial del plano

En el esquema hemos dibujado un plano y trasladado paralelamente el mismo al origen; el vector  $\vec{N}$  se denomina *vector normal* al plano y es perpendicular tanto a  $\vec{u}$  como a  $\vec{v}$ ; por lo tanto si tuviésemos como datos a estos últimos podríamos obtener *algún* vector normal<sup>2</sup> a través del **producto vectorial**  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .



Sea **P** un punto cualquiera del plano que pasa por **A**; el vector  $\vec{AP}$  resulta perpendicular a  $\vec{N}$  y por lo tanto vale:

$$\vec{AP} \cdot \vec{N} = 0$$

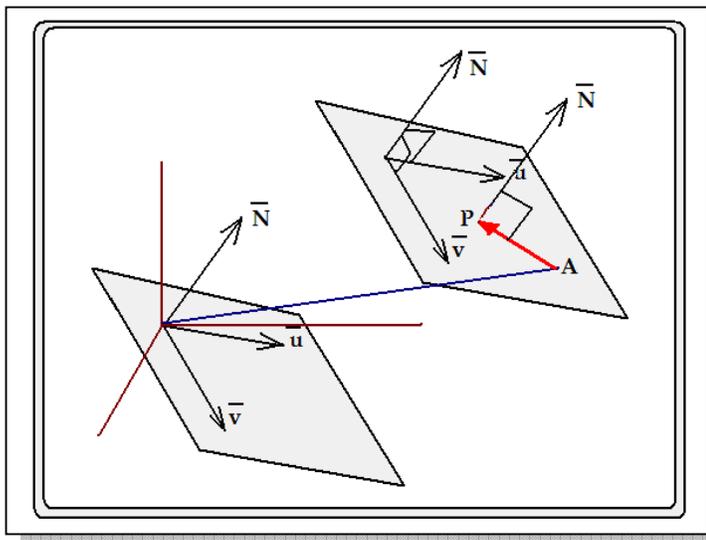
**ecuación vectorial del plano**

Como  $\vec{AP} = P - A$  se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{N} = 0 &\rightarrow (P - A) \cdot \vec{N} \\ &= P \cdot \vec{N} - A \cdot \vec{N} = 0 \end{aligned}$$

$$P \cdot \vec{N} = A \cdot \vec{N}$$

**ecuación implícita**



Si detallamos a  $P = (x, y, z)$ ,  $A = (a_x, a_y, a_z)$  y  $\vec{N} = (n_x, n_y, n_z)$  nos queda:

<sup>1</sup> Sean P y Q dos elementos en  $\Pi$ , ¿serán  $P+Q$  y  $kP$  nuevos elementos de  $\Pi$  –con k un número real?

Ya que P y Q pertenecen al plano existen escalares tal que:

$$P = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha' \cdot \vec{v} \wedge Q = \beta \cdot \vec{u} + \beta' \cdot \vec{v};$$

$P + Q = (\alpha \cdot \vec{u} + \alpha' \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{u} + \beta' \cdot \vec{v}) = (\alpha + \beta) \cdot \vec{u} + (\alpha' + \beta') \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda' \cdot \vec{v}$  –con los escalares números reales– y por ende  $P+Q$  es un elemento de  $\Pi$ .

$k \cdot P = k \cdot (\alpha \cdot \vec{u} + \alpha' \cdot \vec{v}) = k \cdot \alpha \cdot \vec{u} + k \cdot \alpha' \cdot \vec{v} = \delta \cdot \vec{u} + \delta' \cdot \vec{v}$  entonces pertenece a  $\Pi$ .

<sup>2</sup> Cualquier múltiplo no nulo de  $\vec{N}$  nos sirve; si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos no hay plano único (hágase un esquema) y  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

$$(x, y, z) \cdot (n_x, n_y, n_z) = (a_x, a_y, a_z) \cdot (n_x, n_y, n_z)$$

$$x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z = a_x \cdot n_x + a_y \cdot n_y + a_z \cdot n_z$$

Si  $a = n_x, b = n_y, c = n_z \wedge d = a_x \cdot n_x + a_y \cdot n_y + a_z \cdot n_z$  se tiene

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d} \quad \text{ecuación general del plano}^3$$

## Ejemplo 2

i) Obtener la ecuación del plano  $\Pi_1$  que tiene por normal a  $\vec{N} = (-3, 2, -4)$  y pasa por  $A = (1, 4, -2)$ .

La ecuación es  $P \cdot \vec{N} = A \cdot \vec{N}$

$$(x, y, z) \cdot (-3, 2, -4) = (1, 4, -2) \cdot (-3, 2, -4)$$

$$-3x + 2y - 4z = -3 + 8 + 8$$

$$\boxed{-3x + 2y - 4z = 13} \quad \Pi_1$$

ii) Dar las intersecciones de  $\Pi_1$  con los ejes y otros dos puntos del mismo.

\* Intersección eje x: el punto es de la forma  $(x, 0, 0)$ .

$$\rightarrow -3x = 13 \rightarrow x = -\frac{13}{3} \rightarrow \left(-\frac{13}{3}, 0, 0\right)$$

\* Intersección eje y: el punto es de la forma  $(0, y, 0)$ .

$$\rightarrow 2y = 13 \rightarrow y = \frac{13}{2} \rightarrow \left(0, \frac{13}{2}, 0\right)$$

\* Intersección eje z: el punto es de la forma  $(0, 0, z)$ .

$$\rightarrow -4z = 13 \rightarrow z = -\frac{13}{4} \rightarrow \left(0, 0, -\frac{13}{4}\right)$$

Punto C; por ejemplo  $x=1, y=0$  y despejamos z:

$$-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 4z = 13 \rightarrow -4z = 16 \rightarrow z = -4 \rightarrow C = (1, 0, -4)$$

Punto D; por ejemplo  $x=-1, z=0$  y despejamos y:

$$-3 \cdot (-1) + 2y - 4 \cdot 0 = 13 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow y = 5 \rightarrow D = (-1, 5, 0)$$

iii) Sea  $E = (h+2, -3h-3, 10+h)$  con  $h$  un número real; determinarlo para que  $E$  pertenezca a  $\Pi_1$ .

$$(-3) \cdot (h+2) + 2 \cdot (-3h-3) - 4 \cdot (10+h) = 13 \rightarrow -3h - 6 - 6h - 6 - 40 - 4h = 13$$

$$\rightarrow -13h = 65 \rightarrow \boxed{h = -5} \rightarrow \boxed{E = (-3, 12, 5)}$$

Efectivamente está en  $\Pi_1$ :  $-3 \cdot (-3) + 2 \cdot 12 - 4 \cdot 5 = 9 + 24 - 20 = 13$

iv) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de  $\Pi_1$

De  $-3x + 2y - 4z = 13$  despejamos *alguna* de las variables (la variable  $y$  parece ser la más cómoda pero *no es excluyente*).

$$y = \frac{13}{2} + \frac{3}{2}x + 2z$$

Luego  $(x, y, z) \in \Pi_1$  si  $(x, y, z) = (x, \frac{13}{2} + \frac{3}{2}x + 2z, z)$ .

<sup>3</sup> En diferentes libros aparece como cartesiana y en otros como implícita.

Podemos pensar lo obtenido como la suma de tres puntos: en el primero ubicamos toda la información sobre la variable  $x$ ; la segunda sobre la variable  $z$  y la tercera para los términos independientes –no afectados a las variables–.

$(x, y, z) = (x, \frac{3}{2}x, 0) + (0, 2z, z) + (0, \frac{13}{2}, 0) = x \cdot (1, \frac{3}{2}, 0) + z \cdot (0, 2, 1) + (0, \frac{13}{2}, 0)$   
 con  $x$  y  $z$  números reales (hacen las veces de  $\alpha$  y  $\beta$ ).

$$(x, y, z) = x \cdot (1, \frac{3}{2}, 0) + z \cdot (0, 2, 1) + (0, \frac{13}{2}, 0)$$

La forma alcanzada nos indica que el plano está generado por los vectores  $\vec{u} = (1, \frac{3}{2}, 0)$  y  $\vec{v} = (0, 2, 1)$  y pasa por el punto  $P = (0, \frac{13}{2}, 0)$ .

b) Obtener la ecuación implícita del plano  $\Pi_2$  que está generado por la **combinación lineal** de  $\vec{u} = (-2, 6, 7)$  y  $\vec{v} = (0, -1, 4)$  y para  $A = (3, -3, 8)$

Obtengamos  $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (31, 8, 2)^4$$

Luego  $\Pi_2$

$$(x, y, z) \cdot (31, 8, 2) = (3, -3, 8) \cdot (31, 8, 2); \quad 31x + 8y + 2z = 93 - 24 + 16 \rightarrow \Pi_2: \boxed{31x + 8y + 2z = 85}$$

v) Como pasar de ecuaciones paramétricas cartesianas de un plano a su ecuación implícita

Sea el plano de ecuaciones

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) \\ y = 3 + \alpha \cdot 2 + \beta \cdot (-1) \\ z = -1 + \alpha \cdot (-3) + \beta \cdot 2 \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} . \text{ Podemos, trabajando sobre las ecuaciones llegar a}$$

$$\pi: \begin{cases} x - 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) \\ y - 3 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot (-1) \\ z + 1 = \alpha \cdot (-3) + \beta \cdot 2 \end{cases}$$

Expresando el sistema en forma matricial y resolviendo

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -3 & 2 & z+1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-3-2(x-2) \\ 0 & -1 & z+1+3(x-2) \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-2x+1 \\ 0 & -1 & z+3x-5 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-2x+1 \\ 0 & 0 & z+y+x-4 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \qquad F_3 \rightarrow F_3 + F_2$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1$$

Los puntos  $P(x, y, z)$  que pertenecen al plano son aquellos para los que el sistema anterior es compatible, por lo que el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz

---

<sup>4</sup> Para comprobar su corrección –o casi– conviene multiplicar escalarmente lo obtenido tanto por  $\vec{u}$  como por  $\vec{v}$  y confirmar que da cero:  $(31, 8, 2) \cdot (-2, 6, 7) = -62 + 48 + 14 = 0 \quad \wedge \quad (31, 8, 2) \cdot (0, -1, 4) = -8 + 8 = 0.$

ampliada,  $r(A) = r(A') = 2$  y eso se cumple para aquellos puntos en los que  $z + y + x - 4 = 0$  que es la ecuación implícita o general del plano.

### Actividad 1

a) Dar dos normales para cada uno de los siguientes planos:

$$\Pi_a: -x + 5y + z = 8; \quad \Pi_b: y = -3; \quad \Pi_c: \frac{4}{3}x - \frac{5}{7}z = \frac{3}{4};$$

$$\Pi_a: (x, y, z) = \beta \cdot (5, -4, 2) + \lambda \cdot (0, -1, 3) + (2, 3, -6)$$

b) Obtenga la ecuación de los planos que cumplen lo requerido en cada caso:

i) vector normal paralelo al eje  $y$  y pasa por el  $(2, -3, 3)$ ;

ii) vector normal paralelo al del plano  $-x + 4y = 7$  y pasa por el origen;

iii) generado por los vectores  $\vec{u} = (1, -5, 2)$  y  $\vec{v} = (-3, -2, -1)$  y contiene a algún punto de la recta

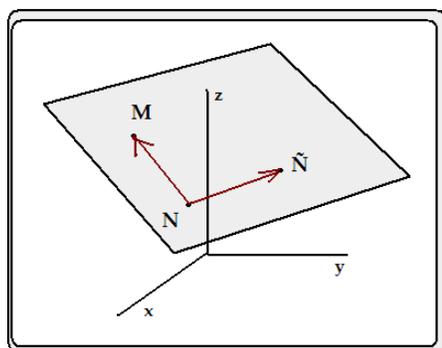
$$r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ x + y + 3z = -5 \end{cases}; \text{ dar la ecuación implícita.}$$

iv) es perpendicular en su punto medio al segmento determinado por los puntos  $P = (5, -2, 4)$  y  $Q = (5, 4, -2)$ .

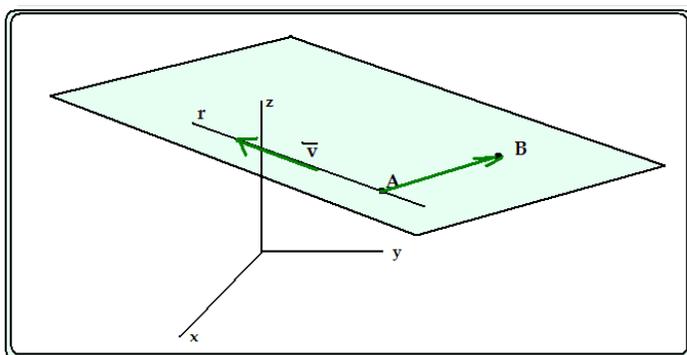
c) Consiga la ecuación implícita del plano que contiene a  $M = (1, 0, 3)$ ,  $N = (-2, 1, 0)$  y  $\tilde{N} = (-1, -1, 2)$ .

Ayúdese con el esquema anexo.

Compruebe que el plano obtenido incluye a los tres puntos indicados y señale otros dos.



d) Hallar la ecuación vectorial del plano que contiene a la recta  $r: (x, y, z) = \beta (1, -3, 4) + (2, 3, -6)$  y pasa por el punto  $B = (-7, 2, 4)$ .



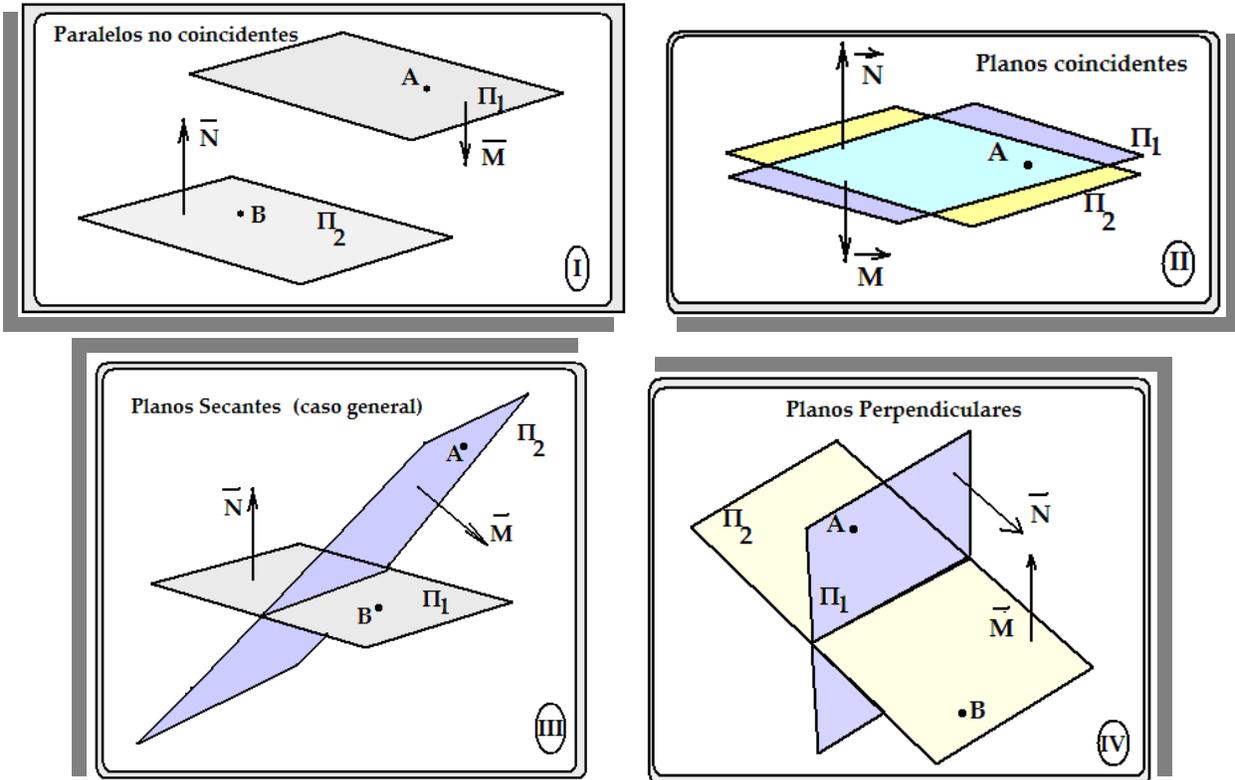
¿El grafico representa la situación real? ¿Qué ocurre si el punto esta en la recta?

### III.1.2. Relación entre planos

Sean  $\Pi_1: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d_1$  y  $\Pi_2: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d_2$  con normales  $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$  y  $\vec{M} = (m_1, m_2, m_3)$ .

Buscamos **determinar condiciones** para que  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  sean paralelos (y analizar cuándo son coincidentes y cuándo no lo son), cuándo son secantes –y como caso particular cuándo son perpendiculares entre si–.

Los siguientes esquemas nos sirven de apoyo:



Para plano paralelos (coincidentes o no) los vectores  $\vec{M}$  y  $\vec{N}$  son paralelos (en el primer caso un punto cualquiera de  $\Pi_1$  también pertenece a  $\Pi_2$ ; en el otro caso ningún punto del primero plano pertenece al segundo).

O sea:

$$\vec{M} = \lambda \vec{N} \text{ con } \lambda \text{ real no nulo}$$

$$\rightarrow (m_1, m_2, m_3) = \lambda \cdot (n_1, n_2, n_3) \rightarrow m_1 = \lambda \cdot n_1; m_2 = \lambda \cdot n_2; m_3 = \lambda \cdot n_3$$

La ecuación de  $\Pi_2$  se transforma en :

$$\lambda \cdot n_1 \cdot x + \lambda \cdot n_2 \cdot y + \lambda \cdot n_3 \cdot z = d_2 \rightarrow \lambda \cdot [n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z] = d_2 \rightarrow n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = \frac{d_2}{\lambda}$$

Si la comparamos con la de  $\Pi_1$  vemos que:

$$\text{Si } d_1 = \frac{d_2}{\lambda} \text{ los planos son } \underline{\text{coincidentes}}, \text{ si } d_1 \neq \frac{d_2}{\lambda} \text{ los planos son } \underline{\text{paralelos no coincidentes}}.$$

### Ejemplo 3

Dados los planos  $\Pi_1: (x,y,z) = (2, 1, -4) + \alpha \cdot (1, 0, -2) + \beta \cdot (-3, 2, 1)$  y  $\Pi_2: 2x + 5/2y + z = 5/2$  establecer si los planos son paralelos.

Busquemos  $\vec{N}$  normal de  $\Pi_1$ .

$$\vec{N} = (1, 0, -2) \wedge (-3, 2, 1) = (4, 5, 2) \quad [¡Verificarlo!]$$

$$\vec{N} = (4, 5, 2) = 2 \cdot (2, 5/2, 1) \text{ que es la normal de } \Pi_2 \rightarrow \text{los planos son paralelos}$$

Para ver la coincidencia (o no) tomemos un punto de alguno de los dos y veamos si está en el otro.

Por ejemplo (2,1,-4) en  $\Pi_1$ . Reemplazamos en la ecuación de  $\Pi_2$ :  
 $2 \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot 1 + (-4) = 4 + \frac{5}{2} - 4 = \frac{5}{2} \rightarrow$  el punto está en ambos planos.

**Los planos son coincidentes.**

.....

Aún no respondimos a las cuestiones de:

¿Cuándo dos planos son secantes? ¿Y perpendiculares?

Observando el esquema III vemos que si  $\vec{M}$  y  $\vec{N}$  no son paralelos los planos siempre se van a intersectar en una recta; y serán perpendiculares si  $\boxed{\vec{M} \perp \vec{N}}$ <sup>5</sup>

**Ejemplo 4**

Dado  $\Pi_1: x - y = 3$  y  $\Pi_2: 2x + 3y - 4z = 6$ .

a) Obtener  $\Pi_3$  que sea perpendicular a ambos planos y que pase por el punto (1, 1, -1).

Sean  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  y  $\vec{N}_3$  las tres normales; al ser ortogonal a ambos planos debe suceder que  $\vec{N}_3 \perp \vec{N}_1$  y  $\vec{N}_3 \perp \vec{N}_2$ .

Una manera sencilla de conseguir alguna normal  $\vec{N}_3$  es efectuar el producto vectorial  
 $\vec{N}_3 = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = (1, -1, 0) \wedge (2, 3, -4) = (4, 4, 5)$ .

$$\Pi_3: (4, 4, 5) \cdot (x, y, z) = (4, 4, 5) \cdot (1, 1, -1) \rightarrow 4x + 4y + 5z = 4 + 4 - 5 \rightarrow \boxed{\Pi_3: 4x + 4y + 5z = 3}$$

b) Hallar la intersección entre  $\Pi_3$  y  $\Pi_4: (x, y, z) = (0, 1, 1) + \alpha \cdot (3, 1, 0) + \beta \cdot (0, -1, 2)$

Tomemos un punto genérico de  $\Pi_4$ : 
$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 1 + \alpha - \beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$$

y como también debe pertenecer al plano  $\Pi_3$  reemplazamos lo obtenido en su ecuación:

$$4x + 4y + 5z = 3$$

$$4 \cdot (3\alpha) + 4 \cdot (1 + \alpha - \beta) + 5 \cdot (1 + 2\beta) = 3 \rightarrow 12\alpha + 4 + 4\alpha - 4\beta + 5 + 10\beta = 3$$

$$16\alpha + 6\beta = -6 \rightarrow \beta = -1 - \frac{16}{6}\alpha = -1 - \frac{8}{3}\alpha$$

<sup>5</sup> Sean  $\Pi_1: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d_1$  y  $\Pi_2: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d_2$  las ecuaciones de los dos planos secantes (y por ende no paralelos).

Hallar la intersección entre ambos es resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz ampliada es la siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & d_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & d_2 \end{array} \right)$$

Si triangulamos no se nos anulará la segunda fila de la matriz del sistema (sin ampliar) pues los vectores  $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$  y  $\vec{M} = (m_1, m_2, m_3)$  no son paralelos. Por lo tanto el rango de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada M es 2 por lo cual hay solución al sistema. Además como  $rg(A) < n = 3$  tenemos infinitas soluciones. Queda una variable libre por lo que la solución de la intersección **es una recta**.

En  $\Pi_4$ :  $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \alpha \cdot (3, 1, 0) + \beta \cdot (0, -1, 2)$  suplantamos éste valor de  $\beta$  y obtenemos:

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + \alpha \cdot (3, 1, 0) + \left[-1 - \frac{8}{3}\alpha\right] \cdot (0, -1, 2) =$$

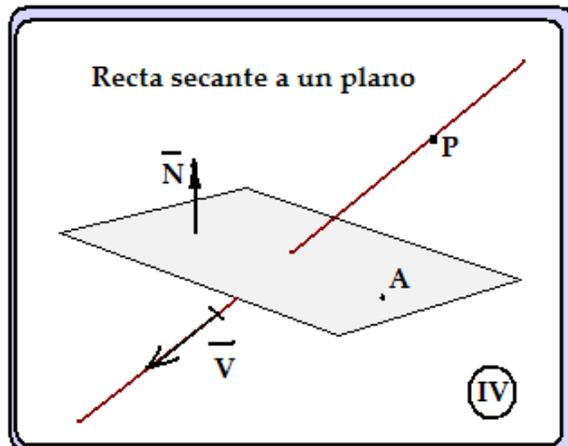
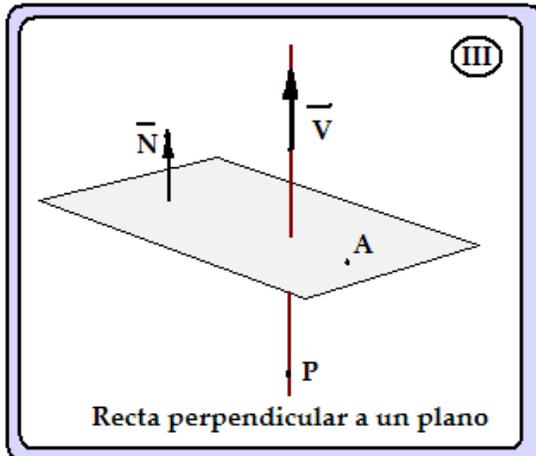
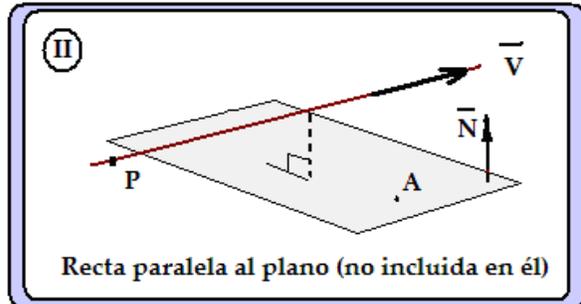
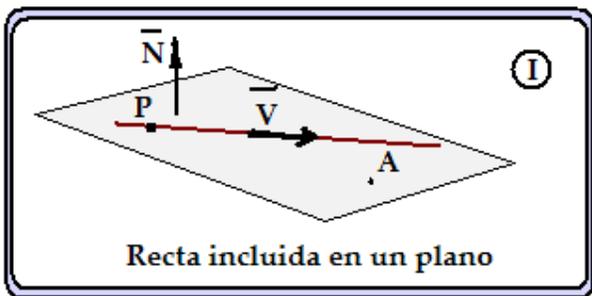
$$(0, 1, 1) + \alpha \cdot (3, 1, 0) + (0, 1, -2) - \frac{8}{3}\alpha \cdot (0, -1, 2) = (0, 2, -1) + \alpha \cdot \left[(3, 1, 0) - \frac{8}{3} \cdot (0, -1, 2)\right] =$$

$$(x, y, z) = (0, 2, -1) + \alpha \cdot \left(3, \frac{11}{3}, -\frac{16}{3}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

que es la ecuación de una recta en  $\mathbb{R}^3$ . Dé un vector director y un punto de la misma.

### III.1.3. Relación entre rectas y planos

Veamos los esquemas para analizar tanto la intersección entre una recta y un plano así como la perpendicularidad entre ambos; luego **conteste** las cuestiones señaladas.



a) ¿Cómo son las normales respecto a los vectores directores de la recta cuando ésta está incluida en el plano y cuando no lo corta nunca (paralela sin intersección)?

En estos casos (I y II), si tomamos un punto cualquiera de la recta ¿qué ocurre con su pertenencia al plano?

b) ¿Cómo son las normales cuando la recta es perpendicular al plano? ¿Y si fuera secante pero no ortogonal?

¿Qué obtenemos por intersección en estas situaciones (III y IV)?

### Actividad 2

i) ¿Cómo se hallan ubicados en  $R^3$  el plano  $\pi : 5x - 3y - z - 6 = 0$  y la recta  $r : (x, y, z) = (3, 2, 3) + \lambda(2, 3, 1)$ ?

¿Y para  $r' : (x, y, z) = (2, 1, 4) + \lambda(3, -1, 6)$  y  $\Pi' : x - 3y - 6z = 35$ ?

ii) Indicar la posición de la recta  $\frac{x-2}{7} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-3}$  con respecto al plano que pasa por los puntos  $A = (3; 1; 1)$ ,  $B = (1; 0; 1)$  y  $C = (0; 1; 2)$ .

iii) Obtener la ecuación de un plano perpendicular a la recta  $r : \begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ y + z = 2 \end{cases}$  y que pasa por el punto  $(1, 1, -2)$ ; halle la intersección entre ambos.

iv) ¿Qué plano es paralelo a la recta  $r_1 : (x, y, z) = \lambda(1, 0, 0) + (1, 1, 1)$ , contiene a  $A = (3, 0, 2)$  y es perpendicular al plano  $\Pi : 3y - 2z + 2 = 0$ .

### Actividad 3

i) Indicar en cada caso si los siguientes pares de planos son paralelos (coincidentes o no) o tienen una recta en común. En este último caso escribir la ecuación de la recta intersección.

a)  $\pi_1 : x - y + z = 3$  y  $\pi_2 : -3x + 3y - 3z - 5 = 0$ .

b)  $\pi_1 : 3x - 6y + 7z = 6$ ;  $\pi_2 : -2x + 4y + 2z = 16$ .

c)  $\pi_1 : x - y + z - 2 = 0$  y  $\pi_2 : 2x - 3y + 4z = 7$ .

ii) Si  $\Pi : 3x - y - 6 = 0$  y  $\Pi'$  el plano que contiene a  $A = (1; 1; 0)$ ,  $B = (1; 0; 2)$  y  $C = (0; 1; -1)$ .

a) Hallar la recta intersección entre ellos.

b) Obtener un plano que contenga a dicha recta y que sea perpendicular al plano  $y = 0$ .

### Actividad 4

En cada situación ayúdese con un esquema.

Hallar la ecuación del plano tal que:

i) Pasa por  $P = (3, 5, -2)$  y es paralelo al plano coordenado  $xy$ .

ii) Es perpendicular a  $\pi : 3x - 5y + 2 = 0 \wedge \pi' : -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{3}z = -1$  y contiene al punto  $R = (4, -3, 0)$ .

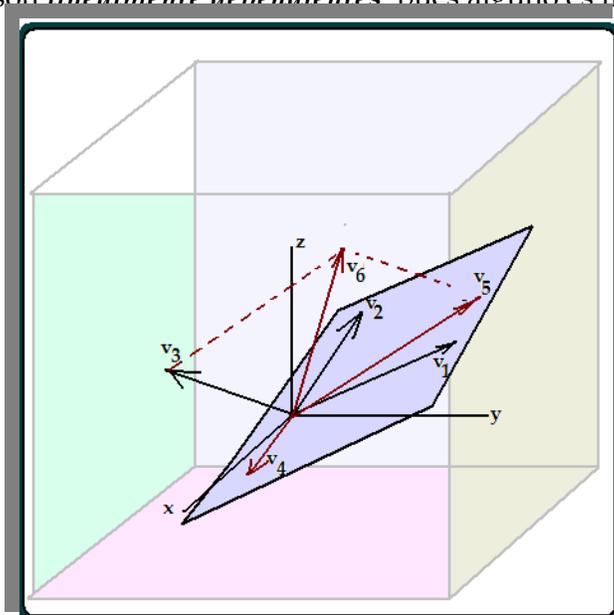
iii) Contiene a los puntos  $A = (1, 1, -1)$  y  $B = (4, -2, 5)$  y es perpendicular a  $\Pi = \begin{cases} x = 2 - \alpha + 3\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$

iv) Incluye a las rectas dadas en cada caso:

a)  $r_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-1$      $r_2 : x+1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$     b)  $r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-5}$      $r_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-5}$

### III.2. Dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^3$ en forma geométrica (ld – li)

(I) Observemos en el esquema al vector  $\vec{v}_4$  que está en la recta que genera  $\vec{v}_2$  :  $\vec{v}_4 = -0,5 \cdot \vec{v}_2$   
 Decimos que  $\vec{v}_4$  y  $\vec{v}_2$  son *linealmente dependientes* pues alguno es múltiplo del otro<sup>6</sup>.



(II) De manera similar  $\vec{v}_5 = \vec{v}_1 + 0,5 \cdot \vec{v}_2$  –o en forma equivalente  $\vec{v}_1 + 0,5 \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_5 = \vec{0}$ –.  
 Vemos que  $\vec{v}_5$  se encuentra en el plano generado por  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .

La *combinación lineal* de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  y  $\vec{v}_5$  da el vector nulo *pero alguno* (en este caso los tres) escalares son distintos de cero.

Así *debe ocurrir* para vectores *linealmente dependientes*: **alguna combinación lineal de ellos que dé por resultado el vector  $\vec{0}$  tiene algún escalar distinto de 0.**

(III) En cambio  $\vec{v}_6$  no pertenece al plano determinado por  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ ; o sea que *no sucede* que  $\vec{v}_6$  sea combinación lineal de ambos vectores ó equivalentemente:

**La única combinación lineal de  $\vec{v}_6, \vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  que da por resultado al vector nulo es aquella donde los escalares son todos ceros.** Los tres vectores son *linealmente independientes*.

(IV) También son l.i. los vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .

(V) ¿Qué sucederá entre  $\vec{v}_3, \vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ ? ¿Y  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  y  $\vec{v}_4$ ? ¿ $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_3$ ? ¿ $\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_6$ ?

Volveremos sobre este concepto más profundamente en la unidad IV.

<sup>6</sup> Aquí ambos pueden ser múltiplo del otro pero  $\vec{0}$  y  $\vec{v}_2$  son *ld* aunque  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_2$  aunque no ocurre que  $\vec{v}_2 = k \cdot \vec{0}$

### III.3.1. Distancia de un punto a un plano.

La distancia de un punto  $P$  a un plano  $\pi$  es la distancia de  $P$  a  $Q$  donde  $Q$  es el punto del plano que está más cerca de  $P$  y coincide con el pie de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P$ .

¿Cómo hallarla?

Nuestros datos son  $P$  y  $\pi$ ; de este último tomamos alguna de sus normales  $\vec{n}$ .

Utilizando como ayuda el esquema inferimos el procedimiento a desarrollar:

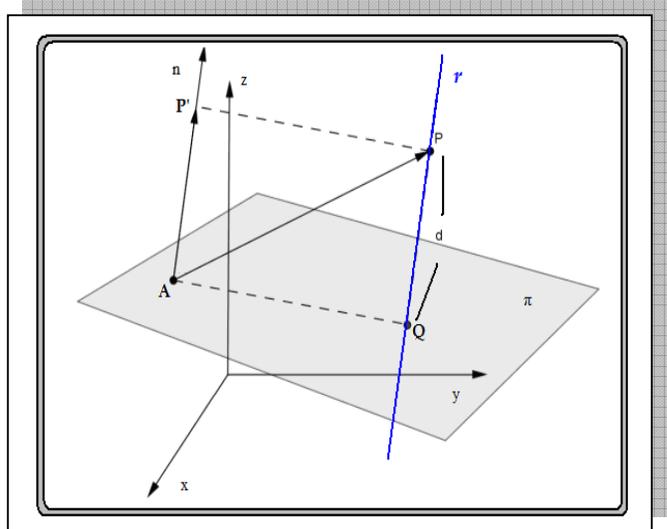
a) Determinamos  $r$  recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P$ .

$$r: (x, y, z) = P + \lambda \cdot \vec{n}$$

b) Calculamos la intersección  $r \cap \pi = \{Q\}$

c) A partir de  $Q$  se obtiene la distancia:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, Q)$$



#### Ejemplo 5

Obtener la distancia del punto  $P = (7, -7, 4)$  al plano  $\Pi: 2x - 2y + z = 5$ .

a) La recta  $r$  perpendicular al plano y que pasa por  $P$  es:

$$(x, y, z) = (7, -7, 4) + \lambda \cdot (2, -2, 1) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

b) La intersección con  $\Pi$  se obtiene reemplazando en su ecuación:

$$2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (-7 - 2\lambda) + 4 + \lambda = 5 \rightarrow 14 + 4\lambda + 14 + 4\lambda + 4 + \lambda = 5$$

$$\rightarrow 32 + 9\lambda = 5 \rightarrow 9\lambda = -27 \rightarrow \lambda = -3$$

$$Q = \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot (-3) \\ y = -7 - 2 \cdot (-3) \\ z = 4 + (-3) \end{cases} \rightarrow Q = (1, -1, 1)$$

$$c) \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{QP}\| = \|(6, -6, 3)\| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$$

• Encontramos una **expresión alternativa** para hallar la distancia (pero **no** obtendremos  $Q$ ).

La distancia  $\overline{PQ}$  coincide con  $\overline{P'A}$  donde  $A$  es cualquier punto del plano  $\pi$ .

Pero  $\overline{P'A}$  es el *valor absoluto de la proyección escalar* de  $\overrightarrow{AP}$  en la dirección de la normal (ver II.6.3, pág. 44 del apunte I).

$\text{dist}(P, \pi) = |\overrightarrow{AP} \cdot \hat{n}|$  donde  $\hat{n}$  es un *versor normal* o sea de tamaño unidad.

$$\text{Como } |\overrightarrow{AP} \cdot \hat{n}| = \left| (P - A) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| = \frac{|(P - A) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|P \cdot \vec{n} - A \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Si  $\pi: a.x + b.y + c.z = d$  podemos tomar a  $\vec{n} = (a, b, c)$ ; además ya que A pertenece al plano

$$A \bullet \vec{n} = d \rightarrow [a \cdot a_x + b \cdot a_y + c \cdot a_z = d]$$

Asimismo  $P \bullet \vec{n} = p_x \cdot a + p_y \cdot b + p_z \cdot c$  es equivalente a reemplazar las coordenadas de P en el lado izquierdo de la ecuación de  $\pi$ .

Entonces

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|p_x \cdot a + p_y \cdot b + p_z \cdot c - d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|p_x \cdot a + p_y \cdot b + p_z \cdot c - d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|p_x \cdot a + p_y \cdot b + p_z \cdot c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|p_x \cdot a + p_y \cdot b + p_z \cdot c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si lo aplicamos a  $\Pi: 2x - 2y + z = 5$  tenemos que  $\vec{n} = (2, -2, 1)$  y  $P = (7, -7, 4)$ . Luego:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 7 - 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|27|}{\sqrt{9}} = 9 \text{ que coincide con lo ya obtenido.}$$

### Ejemplo 6

Sea  $\Pi: x + 4y - 2z = 7$ .

a) ¿Cuáles son los puntos de  $R^3$  que distan de  $\Pi$  un valor  $3\sqrt{21}$ ?

¿Cómo se interpreta geoméricamente?

Un punto  $(x, y, z)$  está a una distancia  $3\sqrt{21}$  de  $\Pi$  si cumple con la condición:

$$\text{dist}(P, \Pi) = \frac{|x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}} = 3\sqrt{21} \rightarrow |x + 4y - 2z - 7| = 3\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}$$

$$|x + 4y - 2z - 7| = 63 \rightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z - 7 = 63 \\ \text{ó} \\ x + 4y - 2z - 7 = -63 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z = 70 \\ \text{ó} \\ x + 4y - 2z = -56 \end{cases}$$

O sea que los puntos que cumplen con la condición dada corresponden a dos planos ( $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ ) paralelos a  $\Pi$  (tienen idéntica normal). Cada plano está a un lado diferente de  $\Pi$ .

b) ¿Cuáles son los puntos de  $R^3$  que equidistan de  $\Pi$  y de  $\Pi': 4x - 2y - z = -3$ ?

¿Cómo se interpreta geoméricamente?

Planteamos  $\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, \Pi')$

$$\frac{|x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|4x - 2y - z + 3|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \rightarrow \frac{|x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{21}} = \frac{|4x - 2y - z + 3|}{\sqrt{21}} \rightarrow$$

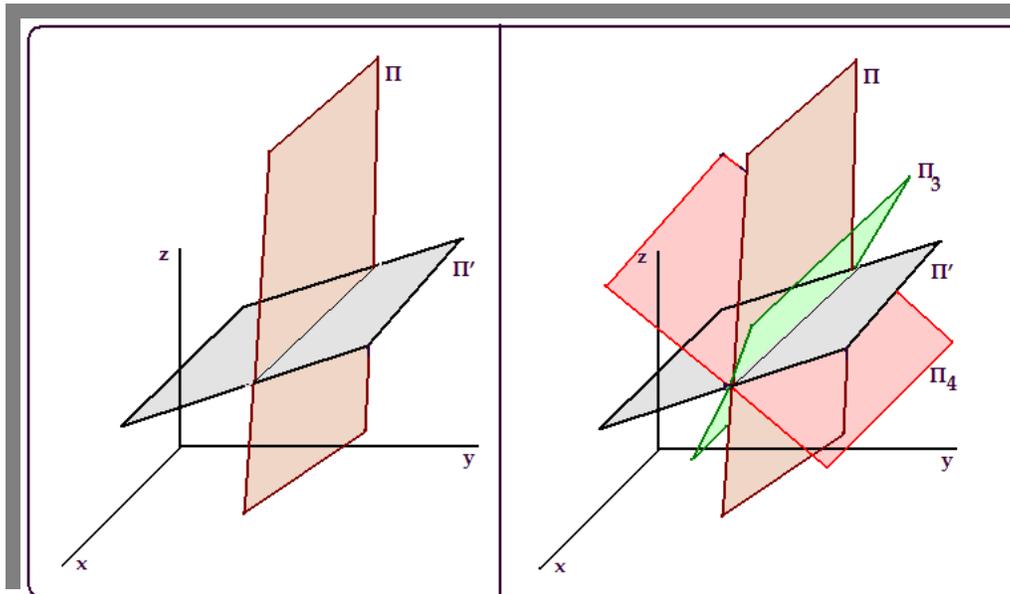
$$|x + 4y - 2z - 7| = |4x - 2y - z + 3| \rightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z - 7 = 4x - 2y - z + 3 \\ \text{ó} \\ x + 4y - 2z - 7 = -[4x - 2y - z + 3] \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -3x + 6y - z = 10 \\ \text{ó} \\ 5x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad \text{lo cual nos vuelve a dar dos planos } \Pi_3 \text{ y } \Pi_4.$$

Notar que ambos planos son perpendiculares pues sus normales lo son:

$$(-3, 6, -1) \bullet (5, 2, -3) = -15 + 12 + 3 = 0$$

El gráfico siguiente nos da una idea visual (los planos no son los ejemplificados).



### III.3.2. Distancia de un punto a una recta

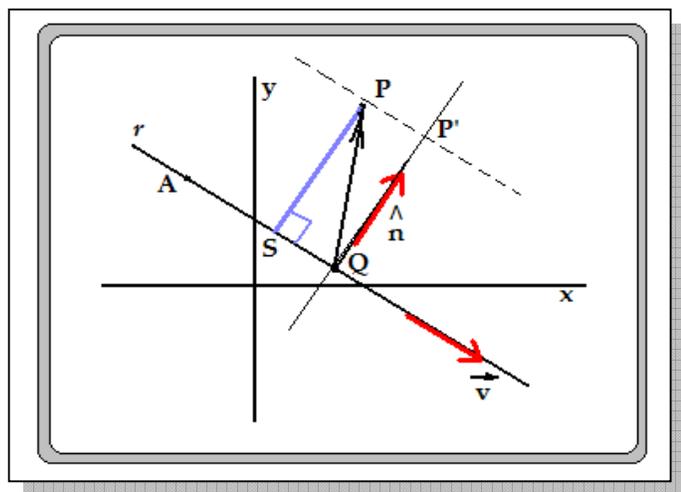
a) En el plano.

Sea la recta  $r: (x, y) = \lambda \cdot \vec{v} + A$  y  $P$  un punto del plano (no incluido en  $r$  sino la distancia a determinar es cero).

Ayudados por el esquema veamos cómo calcular la distancia.

Sea  $S$  la proyección ortogonal de  $P$  sobre  $r$  (o el pie de la recta perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ ) y  $\hat{n}$  un versor perpendicular a  $\vec{v}$ ; además  $Q$  es un punto *cualquiera* que elijamos de  $r$ .

La proyección escalar de  $\vec{QP}$  sobre  $\hat{n}$  nos da el segmento  $\overline{QP'}$  (a lo sumo con signo opuesto) que es congruente con  $\overline{SP} = \text{dist}(P, r)$ .



O sea que

$$\text{dist}(P, r) = \left| \text{proy.escalar}_n \vec{QP} \right| = \left| \vec{QP} \bullet \hat{n} \right|$$

### Ejemplo 7

Dada la recta  $r: 3x - 2y = 6$  y  $P = (1, 2)$  obtener la distancia de  $r$  a  $P$ .

Primero vemos que  $P$  no pertenece a  $r$ :  $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 6$

Si  $r$  está dada en forma implícita los coeficientes  $3$  y  $-2$  que acompañan a  $x$  y  $y$  dan las coordenadas de un vector perpendicular al vector director. ¡Analicémoslo!

$r'$ :  $3x - 2y = 0$  es una recta paralela a  $r$  que pasa por el origen. Un punto  $(x, y)$  pertenece a dicha recta si cumple con la ecuación dada que puede escribirse como  $(3, -2) \cdot (x, y) = 0$

O sea que todo  $(x, y)$  de  $r'$  es ortogonal al vector  $(3, -2)$  que resulta ser un vector normal tanto de  $r'$  como de  $r$  (eran paralelas).

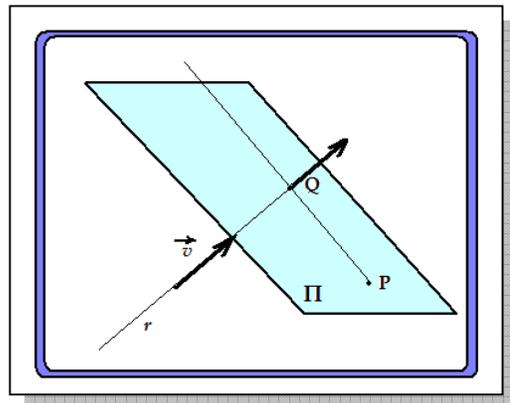
Calculemos  $\hat{n} = \frac{(3, -2)}{\sqrt{9+4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (3, -2)$  y elijamos  $Q = (2, 0)$  como punto de  $r \rightarrow$

$$\vec{QP} = P - Q = (1, 2) - (2, 0) = (-1, 2)$$

$$\rightarrow \text{dist}(P, r) = |\vec{QP} \cdot \hat{n}| = \left| (-1, 2) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{13}} (3, -2) \right] \right| =$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (-1, 2) \cdot (3, -2) \right|$$

$$\text{dist}(P, r) = \left| \frac{-7}{\sqrt{13}} \right| = \frac{7}{\sqrt{13}}$$



### b) En el espacio

Vemos dos maneras de obtenerla. La primera es constructiva; la segunda nos llevará a obtener una fórmula pero no es tan evidente.

b1) La distancia del punto  $P$  a la recta  $r$  es la norma del vector  $\vec{QP}$  donde  $Q$  es el punto de  $r$  más

cercano a  $P$  y por ende el vector  $\vec{QP}$  es perpendicular a dicha recta.

Podemos construir el plano  $\Pi$  que tenga por normal a  $\vec{v}$  vector director de  $r$  y que pase por  $P$  (así nos garantizamos que plano y recta sean ortogonales).

Obtenido  $\Pi$  calculamos  $Q = r \cap \Pi$ ; por último se consigue la distancia como  $\|\vec{QP}\|$ .

### Ejemplo 8

Encuentre la distancia de  $P = (4, -5, 3)$  a la recta  $r: (x, y, z) = \lambda \cdot (1, -4, -5) + (-3, 11, 14)$ .

Armamos el plano  $\Pi$ :

$$(x, y, z) \cdot (1, -4, -5) = (4, -5, 3) \cdot (1, -4, -5) \rightarrow x - 4y - 5z = 4 + 20 - 15 \rightarrow \boxed{\Pi: x - 4y - 5z = 9}$$

Obtenemos  $Q = \Pi \cap r$ .

Un punto de  $r$  satisface las siguientes paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda - 3 \\ y = -4\lambda + 11 \\ z = -5\lambda + 14 \end{cases} \text{ y las reemplazamos en la ecuación del plano:}$$

$$\lambda - 3 - 4(-4\lambda + 11) - 5(-5\lambda + 14) = 9 \rightarrow 42\lambda - 117 = 9 \rightarrow 42\lambda = 126 \rightarrow \lambda = 3 \rightarrow$$

$$Q: \begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = -4 \cdot 3 + 11 = -1 \rightarrow Q = (0, -1, -1) \rightarrow \text{dist}(P, r) = \|\overrightarrow{QP}\| = \|(4, -5, 3) - (0, -1, -1)\| = \\ z = -5 \cdot 3 + 14 = -1 \end{cases}$$

$$\|(4, -4, 4)\| = \|4 \cdot (1, -1, 1)\| \rightarrow \text{dist}(P, r) = 4 \cdot \sqrt{3}$$

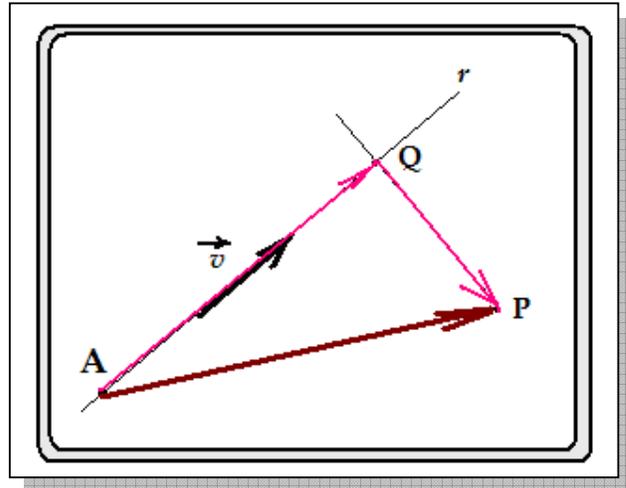
b2) Sea A un punto cualquiera de la recta.  
 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$  o sea que estamos descomponiendo a  $\overrightarrow{AP}$  en dos direcciones: la de la recta  $r$  y otra perpendicular a ella; nuestro objetivo es obtener  $\|\overrightarrow{QP}\|$ .

Recordando que  $\overrightarrow{AQ}$  es la proyección de  $\overrightarrow{AP}$  sobre el vector  $\hat{v}$  (debemos normalizarlo) tenemos:

$$\overrightarrow{AP} = \text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QP} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{AP} - \text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QP}$$

$$\text{dist}(P, r) = \left\| \overrightarrow{AP} - \text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP} \right\|$$



Comprobemos la respuesta del ejemplo 8 de esta forma:

Tomando  $\lambda=0$  obtenemos  $A = (-3, 11, 14)$ ;  $P = (4, -5, 3)$ .

$$\overrightarrow{AP} = (4, -5, 3) - (-3, 11, 14) = (7, -16, -11)$$

$$\hat{v} = \frac{(1, -4, -5)}{\sqrt{1+16+25}} = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot (1, -4, -5)$$

$$\text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AP} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{v} = \left[ (7, -16, -11) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot (1, -4, -5) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot (1, -4, -5) =$$

$$\left[ (7, -16, -11) \cdot (1, -4, -5) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot (1, -4, -5) = [7 + 64 + 55] \cdot \frac{1}{42} \cdot (1, -4, -5) = 126 \cdot \frac{1}{42} \cdot (1, -4, -5)$$

$$\text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP} = 3 \cdot (1, -4, -5) = (3, -12, -15)$$

$\text{dist}(P, r) = \|\overrightarrow{AP} - \text{proy}_{\hat{v}} \overrightarrow{AP}\| = \|(7, -16, -11) - (3, -12, -15)\| = \|(4, -4, 4)\| = 4 \cdot \sqrt{3}$  que coincide con lo conseguido antes.

### III.3.3. Distancia de una recta a un plano

(I) Si la recta **no** es paralela al plano resulta que la interseca y por lo tanto la distancia es cero.

(II) Si la recta **es paralela todos** los puntos están a la misma distancia y por lo tanto tomamos cualquier punto de ella –como ser A– y sucede que  $\text{dist}(r; \Pi) = \text{dist}(A; \Pi)$ .

### Ejemplo 9

Obtener la distancia de  $r: \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$  al plano  $\Pi: (x, y, z) = \alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (0, 2, 1) + (0, 1, 1)$

a) Obtengamos el vector director  $\vec{v}$  de la recta  $r$ ; al estar determinada por dos ecuaciones (cada una representa a un plano) a  $\vec{v}$  lo podemos alcanzar a través del producto vectorial de las normales a cada plano.

$$\vec{v} = (1; 1; -2) \wedge (0; 3; -1) = (5; 1; 3)$$

b) ¿Será  $r$  paralela a  $\Pi$ ?

Para eso  $\vec{v}$  tendría que ser *perpendicular* a  $\vec{n}$  (normal al plano  $\Pi$ ).

$$\vec{n} = (1; -1; 0) \wedge (0; 2; 1) = (-1; -1; 2)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (-1; -1; 2) \cdot (5; 1; 3) = -5 - 1 + 6 = 0.$$

Los vectores son perpendiculares

c) La distancia de  $r$  a  $\Pi$  es la de cualquier punto de la recta al plano.

Tomemos un punto  $A$  de  $r$ :

Si  $y=0$ , de la segunda ecuación se obtiene  $z=-3$ ; de la primera sale  $x+6=6$  y por ende  $x=0$ .

$$A = (0; 0; -3)$$

Un punto  $P$  del plano es  $(0; 1; 1)$ .

La distancia es el valor absoluto de la proyección del vector  $\overrightarrow{AP}$  sobre  $\vec{n}$ .

$$\overrightarrow{AP} = (0; 1; 1) - (0; 0; -3) = (0; 1; 4).$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \hat{n} = (0; 1; 4) \cdot \frac{(-1; -1; 2)}{\|(-1; -1; 2)\|} = \frac{7}{\sqrt{6}} \rightarrow \text{dist}(r; \Pi) = \left| \frac{7}{\sqrt{6}} \right| = \frac{7}{\sqrt{6}}$$

#### III.3.4. Distancia entre rectas

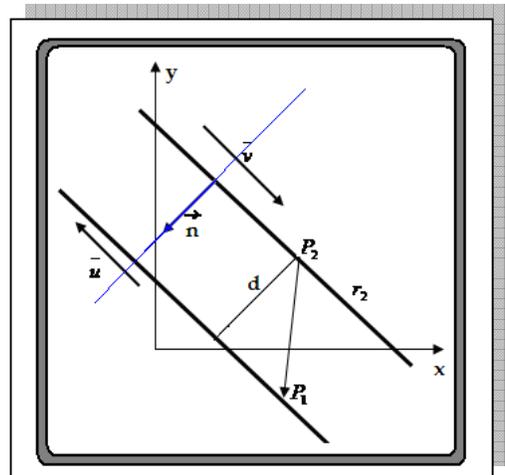
a) *En el plano*

Si las rectas son *secantes* la distancia es cero pues hay un punto donde se cortan.

Si son *paralelas* veamos el esquema.

Sean  $P_1$  y  $P_2$  puntos de  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. Como vemos la distancia es la proyección de  $\overrightarrow{P_2P_1}$  en la dirección de la perpendicular a ambas rectas;  $\vec{n}$  es un vector normal a cualquiera de los dos vectores directores de las rectas que utilizemos, ya que al ser paralelos nos es equivalente su uso.

$$\text{Entonces } \boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{P_2P_1} \cdot \hat{n} \right|}$$



#### Ejemplo 10

Si  $r: (x, y) = \lambda \cdot (1, -1) + (3, -4)$  y  $r': x + y = 5$ .

a) Comprobar que  $r$  y  $r'$  son paralelas no coincidentes.

b) Hallar la distancia entre ambas.

a) Como  $r': x + y = 5$ ,  $y = 5 - x \rightarrow (x, y) = (x, 5 - x) = (x, -x) + (0, 5) = x \cdot (1, -1) + (0, 5)$ .

Obtuvimos idéntico vector director (nos servía con que fueran paralelos).

Además  $(3, -4)$  perteneciente a  $r$  no satisface con  $x + y = 5$  [ $3 + (-4) = -1 \neq 5$ ]

b)  $P_1 = (3, -4)$  y  $P_2 = (0, 5) \rightarrow \overrightarrow{P_2P_1} = (3, -9)$ ; además un vector perpendicular al  $(1, -1)$  es  $\vec{n} = (1, 1)$

$$\rightarrow \text{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \hat{n} \right| = \left| (3, -9) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

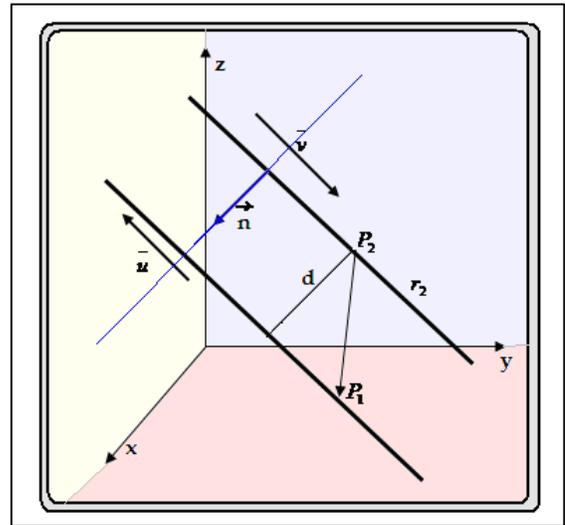
### b) En el espacio

b1) Si son paralelas el razonamiento es similar al del plano y  $\boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \hat{n} \right|}$

El *inconveniente* es cómo conseguir a  $\vec{n}$ .

Si efectuamos  $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}$  obtenemos un vector perpendicular al plano que contiene a ambas rectas. El vector  $\vec{n}$  del esquema es tanto perpendicular a  $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}$  como a  $\vec{v}$  por lo cual podemos efectuar un producto vectorial entre ambos.

$$\rightarrow \boxed{\vec{n} = \left[ \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v} \right] \wedge \vec{v}}$$



b2) Sean  $r_1$  y  $r_2$  alabeadas o sea que no exista un plano que las contenga a ambas.

Nuevamente la distancia será la proyección de  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sobre una dirección perpendicular tanto a la de  $r_1$  como la de  $r_2$ .

O sea que  $\boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \hat{n} \right|}$

donde  $\vec{n}$  lo podemos obtener por el producto vectorial entre los vectores directores de ambas rectas (y luego normalizarlo). O sea  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

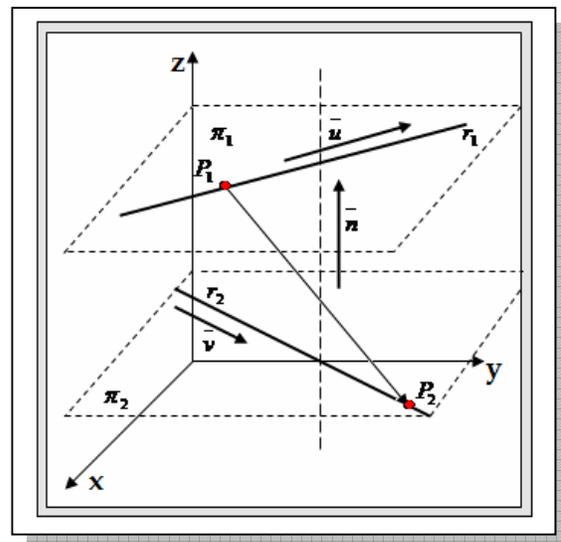
### Ejemplo 11

Calcular la distancia entre las rectas

$$r: \begin{cases} x = -4 + 2\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad r': \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}$$

Los vectores de las rectas son  $\vec{v} = (2, -1, -2)$  y  $\vec{v}' = (4, -3, -5)$  que claramente no son paralelos.

De allí  $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{v}' = (2, -1, -2) \wedge (4, -3, -5) \rightarrow \vec{n} = (-1, 2, -2)$



Tomemos  $P_1 = (-4, 4, -1)$  y  $P_2 = (-5, 5, 5) \rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 1, 6)$

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \hat{n} \right| = \left| (-1, 1, 6) \cdot \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} \right| = \left| \frac{-9}{3} \right| = 3$$

Nosotros no verificamos que hubieran sido alabeadas, ¿pero qué resultado hubiéramos obtenido si fueran secantes?

### Actividad 5

Obtenga las distancias de:

a)  $M = (-4, 2, 3)$  a  $\Pi: (x, y, z) = \alpha \cdot (1, -2, 0) + \beta \cdot (3, 2, -2) + (0, 2, -1)$ .

b)  $P = (5, -2, 1)$  a la recta  $r: (x, y, z) = \mu \cdot (2, 1, -2) + (3, 2, 2)$ .

c) Entre  $c_1$   $r: \frac{x-2}{2} = -y-1 = \frac{z}{3}$   $\wedge$   $r': \frac{x+1}{2} = -y = \frac{z+2}{3}$ ;  $c_2$   $r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \wedge r': \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 \\ z = 2\beta \end{cases}$ .

d)  $r: (x, y, z) = \mu \cdot (-2, 1, -5) + (1, 6, -2)$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $-3x - y + z = 8$ .

e) Encuentre qué condición (o condiciones) tienen todos los  $P = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya  $d(P, \pi) = \frac{5}{\sqrt{86}}$

con  $\pi: -x + 7y + 6z = 3$ . ¿Qué determinan gráficamente?

### Actividad 6: Ejercitación integradora

1) Halle el plano  $\Pi_1$  que contiene a las rectas  $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$   $\wedge$   $L_2: \lambda (0, 1, -1) + (1, 1, 0)$ .

Si  $\Pi_2: 5x + 2y - 2 = 0$ , determine la intersección de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ .

¿Cuánto vale la distancia de  $P = (1, 0, 2)$  a  $\Pi_2$ ?

2) Hallar la intersección entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ . Si no la hubiera establecer si las rectas son paralelas ó alabeadas y calcular la distancia que las separa.

$$L_1: (x, y, z) = \beta \cdot (1, 0, -1) + (2, 0, 1); \quad L_2: \begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha + 3 \end{cases}$$

3) Obtener la intersección entre las rectas  $r$  y  $r'$ ; determinar la ecuación del plano que las contiene.

$r: \begin{cases} z = 1 \\ 2 - x = y \end{cases}$ ;  $r'$  perpendicular a  $\vec{w} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$   $\wedge$   $\vec{v} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$  y contiene a  $P = (0, 2, -1)$

4) Sean el plano  $\Pi: ax - 2by + z = 2 + b$  y la recta  $L: x = -y + 1 = 2z - 3$ .

Determinar  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$  tales que: i)  $L // \Pi$       ii)  $L \perp \Pi$       iii)  $L \subset \Pi$

5)  $\Pi$  es el plano que contiene a  $(1, 3, 2)$  y al eje  $x$ .

Determinar los planos  $\Pi$  y  $\Pi'$  si  $\Pi \cap \Pi'$  es  $(x, y, z) = \lambda (3, 6, 4)$  y además  $(1, 0, -1) \in \Pi'$ .

6) Sean el plano  $\Pi: x - y + 2z = 5$ ;  $A = (3, 2, 1)$ ;  $r$  la recta que pasa por  $(1, -1, 2)$  y  $(1, 2, -1)$ ;

$r': (x, y, z) = \beta \cdot (1, 2, 3) + (0, -1, -2)$ .

Obtener  $B \in r \wedge C \in r'$  tal que el plano que contiene a A, B y C sea paralelo a  $\Pi$

7)  $r': (x,y,z) = \beta \cdot (-1, 2, 0) + (1, 1, 1)$ ;  $r$  es la recta que contiene a  $(3, -5, 0)$  y  $(1, -1, 0)$ .

a) Hallar, si existe, un plano que contenga a ambas rectas.

b) Calcular la distancia de  $(1,1,1)$  a  $r$ .

8) Si  $\Pi: 2x + 3y - z = 2 \wedge r: (x, y, z) = \beta \cdot (0, 1, 2) + (0, 0, 1)$ .

Hallar la recta  $r'$  perpendicular a  $\Pi$  y que pasa por  $\Pi \cap r$ .

9) Dada la recta  $L: \frac{x+1}{2} = 1 - y = 3 + z$

a) Obtener el punto donde  $L$  corta al plano coordenado  $XZ$  y calcular la distancia entre dicho punto y el plano  $\Pi: x - 3y + z = 0$

b) Indicar la posición relativa de la recta  $L$  con respecto al plano  $\pi$ . Justificar.

### III.4 Las transformaciones lineales y la Geometría en el plano<sup>7</sup>

Hemos trabajado en la unidad I con una serie de transformaciones en el plano. En esta etapa las vincularemos con los contenidos de sistemas de ecuaciones, matrices y transformaciones lineales. Como bonus algunas situaciones aún no abordadas.

La simetría central estaba dada por  $P = (x; y) \longrightarrow P_o = (-x; -y)$

Para facilitar nuestro trabajo sea  $X = (x_1, x_2)$  el punto original del plano e  $Y = (y_1, y_2)$  su transformado; o sea que  $Y = S(X)$ .

Podemos anotar lo anterior del siguiente modo:  $\begin{cases} y_1 = -x_1 = -x_1 + 0 \cdot x_2 \\ y_2 = -x_2 = 0 \cdot x_1 - x_2 \end{cases}$  que matricialmente

$$\text{es: } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ o } Y = A_S \cdot X.$$

Esta representación matricial permite demostrar fácilmente que la simetría central es una **transformación lineal** del plano en sí.

Análogamente las simetrías según el eje  $x_1$ , eje  $x_2$ , proyección sobre el eje  $x_1$  y proyección sobre el eje  $x_2$  producen las matrices:

$$S_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_{x_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ¿Qué representa la transformación  $P = (x; y) \longrightarrow P_o = (y; x)$ ?
- Halle la matriz de la transformación.

También se ha visto la rotación en un ángulo  $\theta$  y se obtuvo:

$R_\theta((x, y)) = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta, x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta)$  que podemos adaptar como

$(y_1, y_2) = R_\theta((x_1, x_2)) = (x_1 \cdot \cos\theta - x_2 \cdot \text{sen}\theta, x_1 \cdot \text{sen}\theta + x_2 \cdot \cos\theta)$

<sup>7</sup> Adaptado del excelente texto LINEAR ALGEBRA, W. W. L. CHEN, 1982, 2008, Chapter 2, MATRICES. Disponible en <http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlafolder/lnla.html>

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

• Sea  $k \neq 0$  y analizá los *efectos geométricos* que producen las siguientes transformaciones:

$$T_1: \begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \end{cases}, \quad T_2: \begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}, \quad T_3: \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = kx_2 \end{cases}, \quad T_4: \begin{cases} y_1 = x_1 + kx_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}, \quad T_5: \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = kx_1 + x_2 \end{cases}$$

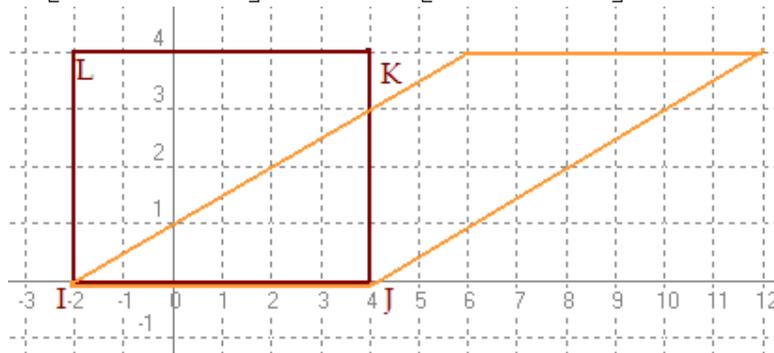
Para eso te sugerimos:

a) Utilizá  $k=2$  en los cinco casos y testea lo que produce cada una sobre el rectángulo IJKL con  $I = (-2; 0)$ ,  $J = (4; 0)$ ,  $K = (4; 4)$  y  $L = (-2; 4)$ .

b) Obtené los transformados usando lo aprendido sobre transformaciones en la Unidad I. Luego graficá.

Por ejemplo para  $T_4$  sería  $[I' J' K' L'] = A_4 \cdot [I J K L]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [IJKL] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad [I'J'K'L'] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Al graficar se tiene:}$$



Lo cual parece ser un desplazamiento lateral (o cizalladura<sup>8</sup>).

Analicemos la expresión de la transformación:

$$T_4: \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

Para empezar *la altura* del punto original *se conserva* mientras que el valor horizontal se incrementa en un valor que es el doble de la altura del punto. Esto implica que los puntos sobre el eje  $x$  no se desplazan pero los que están a igual altura lo hacen un mismo valor (por eso el perfil del rectángulo se mantiene recto).

• ¿Qué ocurriría si la base del rectángulo hubiera estado en puntos del tercer y cuarto cuadrante?

Efectúe un ejemplo y corrobore su hipótesis.

<sup>8</sup> **cizalladura**

*f.* MECÁN. Deformación en la que solo intervienen fuerzas tangenciales. Es un corrimiento de las superficies donde están aplicadas las fuerzas. En <http://es.thefreedictionary.com/cizalladura>

En nuestra respuesta hemos supuesto que los segmentos se transforman en segmentos (al fin y al cabo sólo transformamos los vértices del rectángulo; ¿qué hay de los puntos intermedios?).

Pero, ¿será siempre así?

### Proposición

Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal, A su representación matricial con A *invertible*<sup>9</sup>. Entonces la imagen bajo T de:

- una recta (o segmento) es otra recta (o segmento);
- una recta que pasa por el origen es otra recta por el origen;
- rectas paralelas serán rectas paralelas.

### Demostración

Sea  $(y_1, y_2) = T(x_1, x_2)$  y usando notación matricial  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

De  $Y = A \cdot X$  se sigue que  $A^{-1} \cdot Y = A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = I \cdot X = X$ . O sea  $X = A^{-1} \cdot Y$

Una recta en  $\mathbb{R}^2$  la podemos expresar como  $s \cdot x_1 + t \cdot x_2 + q = 0$  con s y t no simultáneamente nulos. La misma se reescribe como  $\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -q$

Pero como  $X = A^{-1} \cdot Y$  resulta

$$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot Y = (\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot A^{-1}) \cdot Y = \begin{bmatrix} s' & t' \end{bmatrix} \cdot Y = s' \cdot y_1 + t' \cdot y_2 = -q$$

→  $s' \cdot y_1 + t' \cdot y_2 + q = 0$  que es la ecuación de otra recta para los puntos transformados.

$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot A^{-1}$  es el producto de matrices de  $1 \times 2$  y  $2 \times 2$  que da una nueva matriz de  $1 \times 2$ ,  $\begin{bmatrix} s' & t' \end{bmatrix}$

Si la recta pasa por el origen (0,0) vale que  $q = 0$  pues  $s \cdot 0 + t \cdot 0 + q = 0$ . Y entonces la ecuación para  $(y_1, y_2)$  corresponde a una recta por el origen.

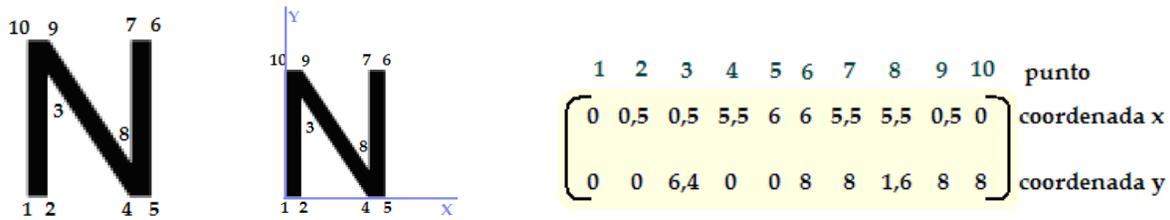
Si se mantiene s y t fijos pero se modifica q se obtienen un haz de rectas paralelas. Al calcular  $\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} s' & t' \end{bmatrix}$  se mantiene siempre constante y sólo se modifica q' lo que significa que se obtiene otro haz de rectas paralelas.

### Actividad 7

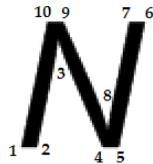
a) Al triángulo WQK con  $W = (-4; -6)$ ,  $Q = (-4; -2)$  y  $K = (-6; -4)$  aplicarle  $A_s, S_{x_1}, S_{x_2}, P_{x_1}, P_{x_2}, T_1, T_2, T_3, T_4$  y  $T_5$  con  $k = 1/2$ .

b) En el apunte I página 17 hemos presentado (I.3.4) el "Tratamiento digital de Imágenes". Allí se presentó una letra N en un sistema de coordenadas.

<sup>9</sup> Tener en cuenta que no todas las transformaciones geométricas son invertibles (una proyección no lo es). El resultado vale bajo la condición de **biyectividad**.



A través de la matriz de datos y multiplicando por  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  corrobore el efecto que permite obtener a:



¿Cómo invertir a la N original respecto al eje x? ¿Y al eje y?  
 ¿Y amplificarla verticalmente al doble? ¿Y horizontalmente?  
**¡Hacerlo!**

### III.4.1 La traslación y las coordenadas homogéneas

En la unidad 1 se trabajó con las traslaciones y se corroboró que éstas no cumplen con las dos condiciones para ser una transformación lineal (pp. 3 y 4). A continuación vamos a mostrar una manera de poder efectuar traslaciones a partir de matrices.

A cada  $P = (x_1, x_2)$  le asignamos un  $P' = (y_1, y_2) = (x_1, x_2) + (a_1, a_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ ; vectorialmente  $P' = P + A$ .

Matricialmente  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  con  $(x_1, x_2), (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  y  $(a_1, a_2)$  fijo.

Para poder salvar el hecho de que **no es** una transformación lineal y permitir un tratamiento matricial cómodo se definen las **coordenadas homogéneas**.

A cada punto  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  se lo *identifica* con un nuevo punto de 3 coordenadas  $(x_1, x_2, 1)$  –

o sea de  $\mathbb{R}^3$  – y la traslación puede obtenerse con  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Verifique que  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Al estar la transformación representada por una matriz resulta ser lineal y todos los efectos geométricos que recién vimos pueden asimilarse a estas nuevas coordenadas.

Por ejemplo para  $T_4: \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$  se obtuvo una matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y en coordenadas

homogéneas ésta se reemplaza por  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Asimismo pensemos la siguiente sucesión de transformaciones geométricas:

$$\begin{matrix} P & \rightarrow & P' & \rightarrow & P'' & \rightarrow & P''' \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

que se consiguen con matrices  $M_1, M_2$  y  $M_3$  (del tipo  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  o  $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ )

Así se tiene  $P' = M_1 \cdot P$

$$P'' = M_2 \cdot P' = M_2 \cdot (M_1 \cdot P) = (M_2 \cdot M_1) \cdot P$$

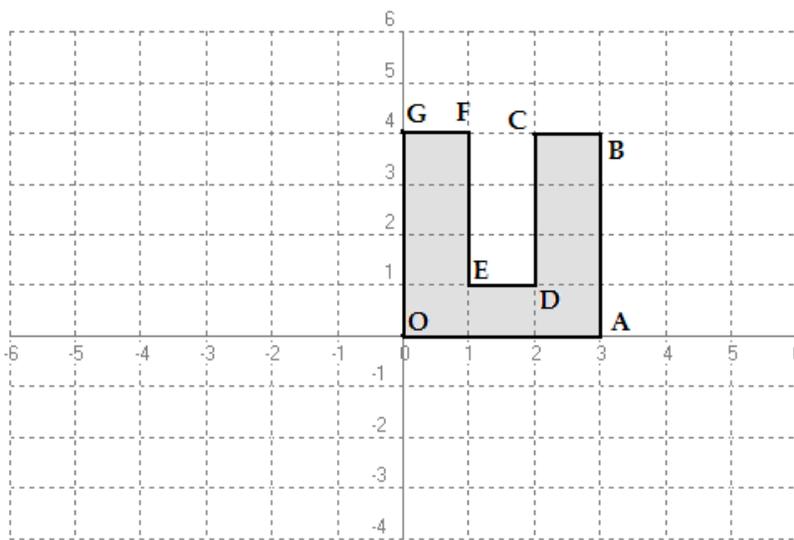
$$P''' = M_3 \cdot P'' = M_3 \cdot [(M_2 \cdot M_1) \cdot P] = [M_3 \cdot (M_2 \cdot M_1)] \cdot P$$

$$\boxed{P''' = [M_3 \cdot M_2 \cdot M_1] \cdot P}$$

*O sea que la aplicación sucesivas de transformaciones lineales (llamada composición) nos dio una nueva transformación cuya matriz se obtiene por el producto de matrices en el orden contrario a la secuencia de aplicación (la última transformación va al principio).*

### Actividad 8

- Dada la U anexa dar las coordenadas de O, A, B, C, D, E, F y G. Armar una matriz de datos D en coordenadas homogéneas de  $3 \times 8$ . Graficar cada una de las etapas que se suceden.



- Producir la simetría axial según el eje y. Indicar la matriz  $M_1$  para la transformación.
- Seguir con una cizalladura horizontal con  $k = -2$  (matriz  $M_2$ ).
- Trasladarla figura obtenida por medio del vector  $\vec{v} = (3; -2)$ . Mostrar  $M_3$ .
- Si  $M = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$ . Obtener la figura resultante efectuando  $M \cdot D$ ; comprobar la coincidencia geométrica y algebraica.

### III.5. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales en la Vida Diaria, la Ciencia y la Tecnología<sup>10</sup>

#### III.5.1. Interpolación de una Función Polinómica

En distintas áreas de la ciencia se presenta la necesidad de obtener la ecuación de la curva teórica que describe un fenómeno conociendo como datos los alcanzados por una serie de mediciones. Uno de los casos más típicos es modelizar con un *polinomio de grado menor o igual que  $n$*  a partir de  $n+1$  datos.

Ejemplificaremos la obtención de una función cuadrática partiendo de tres mediciones.

#### Ejemplo 12

La variable dependiente  $V$  es función de la variable  $U$  a través de un modelo cuadrático. Obtener la relación funcional sabiendo que la gráfica de dichas variables pasa por los puntos  $(1, -7)$ ,  $(2, -12)$  y  $(-1, -15)$ , donde la primer componente es  $U$  y la segunda  $V$ .

$$V = a \cdot U^2 + b \cdot U + c$$

Reemplazamos los puntos en la expresión dada y llegamos al siguiente sistema:

$$S: \begin{cases} -7 = a + b + c \\ -12 = 4a + 2b + c \\ -15 = a - b + c \end{cases}$$

Si restamos la primera y tercera ecuación obtenemos  $8 = 2b \rightarrow b = 4$ ; restando la primera y segunda da  $5 = -3a - b \rightarrow 5 + 4 = -3a \rightarrow a = -3$ ; en la primera se tiene  $-7 = -3 + 4 + c \rightarrow c = -8$ .

$$\boxed{V = -3U^2 + 4U - 8}$$

Verifique el lector que efectivamente la gráfica pasa por los tres puntos requeridos.

#### Actividad 9

Encuentre la ecuación del polinomio de 2<sup>do</sup> grado cuya gráfica pasa por los puntos  $(-1, 8)$ ,  $(2, -1)$  y  $(3, 4)$ .

$$R: y = 1 - 5x + 2x^2$$

<sup>10</sup> Para este apartado hemos adaptado material de los siguientes libros:

Williams, Gareth (2002): "Algebra Lineal con aplicaciones", Mc Graw-Hill, Interamericana Edit., 4<sup>ta</sup> ed., México.

Poole, David (2007): "Algebra Lineal. Una introducción moderna", Cengage Learning, 2<sup>da</sup> ed., México.

Chen, W. (1982; 2008): "Linear Algebra", <http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlafolder/lnla.html>.

Nakos, George & Joyner, D. (1999): "Algebra Lineal con Aplicaciones", International Thomson Editores, México.

Boldrini, José Luis et al (1980): "Algebra Linear", Tercera Edição, Harper & Row do Brasil, São Paulo.

### III.5.2. Circuitos Eléctricos.

No nos resulta extraño el contacto con circuitos eléctricos como el de la instalación domiciliaria o el de una pequeña radio. El más elemental de ellos constará de fuentes de tensión o alimentación (baterías) y dispositivos que reciben energía de esas fuentes y la convierten –por ejemplo– en luz (bombillas, eléctricas) o movimiento (motores).

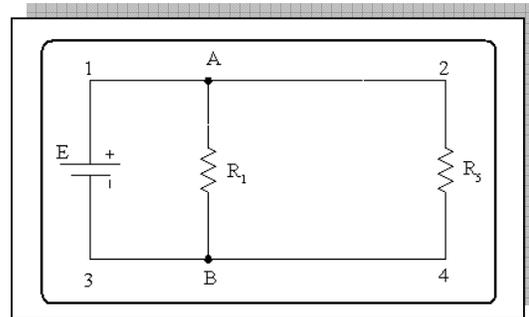
La fuente de tensión moviliza a los electrones en una corriente que se desplaza por conductores (por ejemplo cables de cobre) y los obliga a pasar por los dispositivos. Para que los electrones se pongan en movimiento es necesario que exista una “diferencia de potencial” (tal cual se necesita una diferencia de nivel para que se movilice el agua de un río. El pasaje por el dispositivo ofrece una resistencia (al igual que un objeto que impida el pasaje del agua en un río) cuya magnitud se cuantifica por cuán intensa es la corriente –o sea la cantidad de electrones que pasan por un área específica en la unidad de tiempo-. En los circuitos eléctricos la “diferencia de potencial”  $E$  (medida en volts, V) las brindan las fuentes de potencia y las resistencias ( $R$ , medida en ohms,  $\Omega$ ) se deben a los dispositivos (la intensidad de la corriente  $i$  se mide en amperios o amperes, A). Además suelen utilizarse los siguientes símbolos:



En todo circuito se deben cumplir las siguientes leyes:

#### Ley de Ohm

La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un dispositivo es directamente proporcional a la diferencia de potencial e inversamente proporcional a la resistencia del mismo. O sea que cuanto mayor sea la diferencia de potencial mas energía proporcionará a los electrones y cuanto mayor sea la resistencia del dispositivo a que éstos circulen, más los retardará.



Matemáticamente

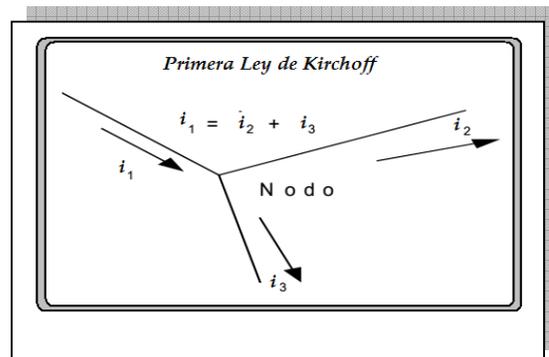
$$i = \frac{E}{R}$$

También puede interpretarse que al pasar una corriente  $i$  por un dispositivo de resistencia  $R$ , provoca una caída de potencial  $E$ . O sea  $E = R \cdot i$

#### Leyes de Kirchoff

Llamamos nodo de un circuito a un punto en el que confluyen tres o más conductores eléctricos (A y B en el esquema).

Un camino cerrado es un recorrido desde un punto del circuito hasta sí mismo; por ejemplo 1AB31, 12431 y A24BA (no hay ninguno más en este circuito).



(I) *Primera ley de Kirchoff*

La suma de todas las corrientes que llegan a un nodo es igual a la suma de todas las corrientes que salen del mismo (si así no ocurriera se produciría una acumulación o un vacío de electrones en el nodo).

Generalmente se utiliza de la siguiente manera que es equivalente:

*La suma algebraica de las corrientes de un nodo es cero utilizando la convención de asignarle signo positivo (+) si entra al nodo y negativo (-) si sale del mismo.*

(II) *Segunda ley de Kirchoff*

La suma algebraica de todas las diferencias de potenciales que se producen en un camino cerrado es cero.

O equivalentemente:

*la diferencia de potencial proporcionada por las fuentes de tensión se compensan con las caídas de diferencia de potencial que ocurren en cada dispositivo.*

Para esto debe utilizarse la siguiente convención: cuando recorremos un camino cerrado en un sentido (generalmente elegiremos positivo o sea sentido antihorario) y nos encontramos con una fuente de tensión (como ser una pila) y

“entramos” por el terminal negativo y “salimos” por el positivo le asignamos un valor positivo al potencial (de + a - será negativo).

Si recorremos un circuito y el sentido elegido para la corriente sobre una resistencia es coincidente con el de nuestro recorrido le asignamos a su caída de potencial un valor positivo (si son opuestos será negativo).

En el esquema hay una sola corriente  $i$  pues existe un único camino cerrado que recorremos en sentido positivo; la orientación de la corriente es arbitraria y si obtenemos un valor numérico negativo debe entenderse que en realidad la corriente circula en el sentido contrario al asignado; a la pila de 12V le tenemos que asociar un valor positivo y a la de 8V uno negativo. La segunda ley aplicada a este camino toma la forma:

$$-R_5 \cdot i - R_1 \cdot i = 12 - 8 \rightarrow -12i - 8i = 4 \rightarrow -20i = 4$$

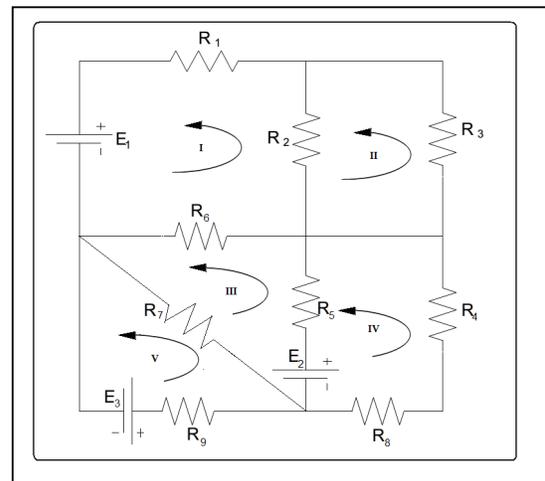
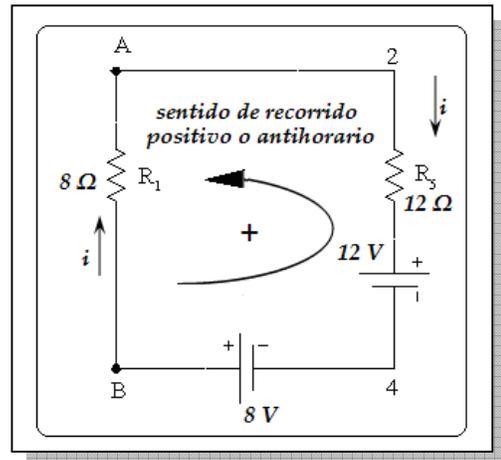
$\rightarrow i = -0,2$  (A, por amperes)  
El menos indica que la corriente circula en sentido contrario al señalado y las caídas de tensión sobre cada resistencia será:

$$R_5 \cdot i = 12 \cdot (-0,2) = -2,4 \text{ (V, por volts)}$$

$$R_1 \cdot i = 8 \cdot (-0,2) = -1,6 \text{ (V) -serán positivos si recorremos el circuito en el sentido real de la corriente-}$$

Comentario

Si tuviésemos una situación como la esquematizada habría una cantidad enorme de



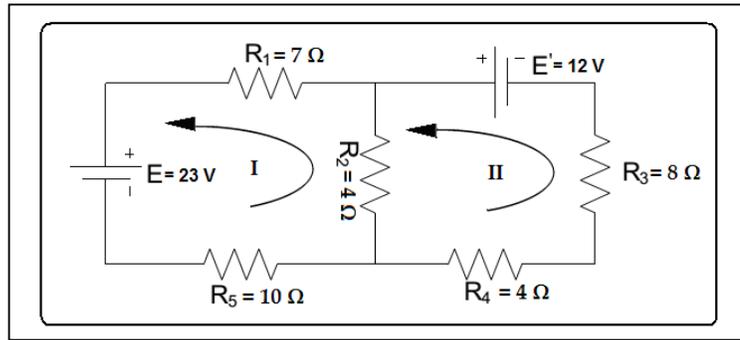
caminos cerrados. Al plantear todas las ecuaciones muchas serían *redundantes* (linealmente dependientes).

Se prueba que “ *cubriendo*” todas las “*celdas*” llegamos a un sistema con un *mínimo de ecuaciones independientes* por resolver –para facilitar el control de lo hecho se recorre cada celda en sentido antihorario–.

Además sin hay *n* nodos se plantearán *n-1* ecuaciones de conservación de corriente (1ª ley de Kirchoff). Aclarado todo pasamos a efectuar un ejemplo.

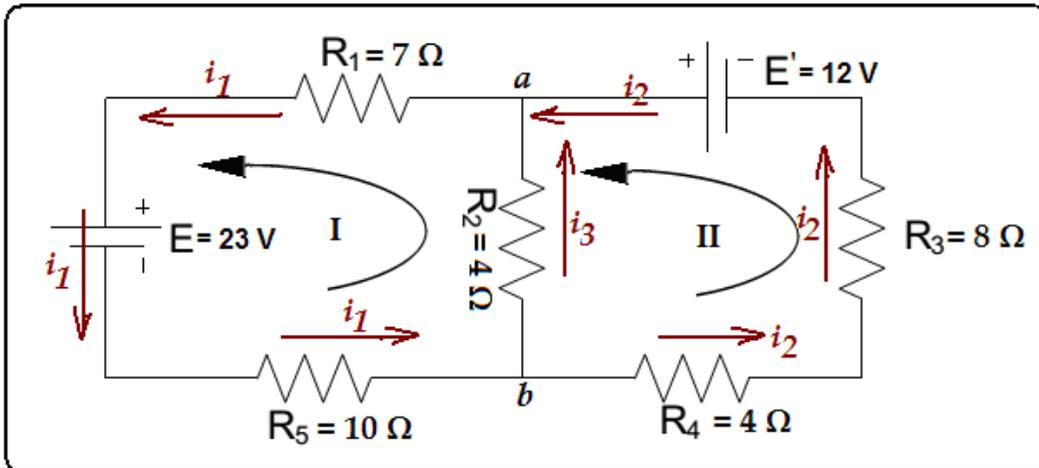
### Ejemplo 13

Hallar las corrientes sobre cada resistencia y las caídas de potencial sobre ellas.



Resolución

Indiquemos las corrientes sobre cada *rama* (recorrido de un nodo a otro siguiente).



Al existir 2 nodos precisamos una única ecuación de corriente (por ejemplo, elegimos el nodo *a*):

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{ó} \quad \boxed{i_1 - i_2 - i_3 = 0}$$

En las dos celdas interiores planteamos la segunda ley:

Sobre el camino I:  $R_1 \cdot i_1 + R_5 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_3 = -23$

(los signos para las caídas en las dos resistencias son positivos pues coinciden sentido de corriente asignado y sentido de recorrido del camino cerrado; el “menos” en el 23 es por “circular” del terminal positivo al negativo).

$$7 \cdot i_1 + 10 \cdot i_1 + 4 \cdot i_3 = -23 \quad \rightarrow \quad \boxed{17 \cdot i_1 + 4 \cdot i_3 = -23}$$

Sobre el II:

$$R_4 \cdot i_2 + R_3 \cdot i_2 - R_2 \cdot i_3 = +12$$

(los signos en las resistencias 3 y 4 son positivos; sobre  $R_2$  es negativo pues la corriente supuesta es contraria al sentido de circulación del camino cerrado; la diferencia de potencial sobre la pila es positiva pues vamos del terminal negativo al positivo).

$$8 \cdot i_2 + 4 \cdot i_2 - 4 \cdot i_3 = 12 \rightarrow \boxed{12 \cdot i_2 - 4 \cdot i_3 = 12}$$

Tenemos el siguiente sistema: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 17 & 0 & 4 & -23 \\ 0 & 12 & -4 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 17 & 21 & -23 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -17f_1 + f_2 \rightarrow \\ f_3 \div 12 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 17 & 21 & -23 \end{array} \right) f_2 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & -40 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -17f_2 + f_3 \end{array} \rightarrow \boxed{i_3 = -1,5A};$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

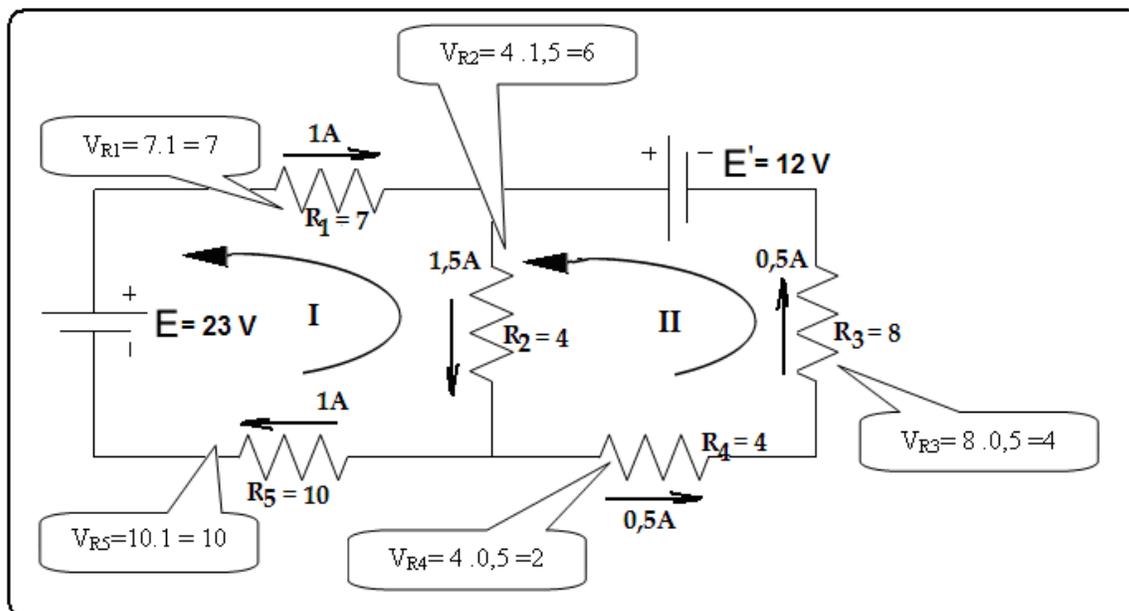
$$i_2 - \frac{1}{3}(-1,5) = 1 \rightarrow i_2 + 0,5 = 1 \rightarrow \boxed{i_2 = 0,5A};$$

Y luego en la primera:

$$i_1 - 0,5 + 1,5 = 0 \rightarrow \boxed{i_1 = -1A}$$

El signo negativo en  $i_1$  e  $i_3$  significa que el sentido de la corriente es contrario al supuesto.

En el siguiente esquema mostraremos los sentidos efectivos, las caídas de tensión en cada resistencia ( $R_i$ ) y analizaremos las dos leyes de Kirchoff en forma exhaustiva sobre los resultados.



Al recorrer la malla izquierda en sentido antihorario se tiene:

$$-V_{R1} - V_{R2} - V_{R5} = -7V - 6V - 10V = -23V = -E;$$

Para la malla derecha resulta en sentido antihorario:

$$V_{R2} + V_{R4} + V_{R3} = 6V + 2V + 4V = 12V = E'$$

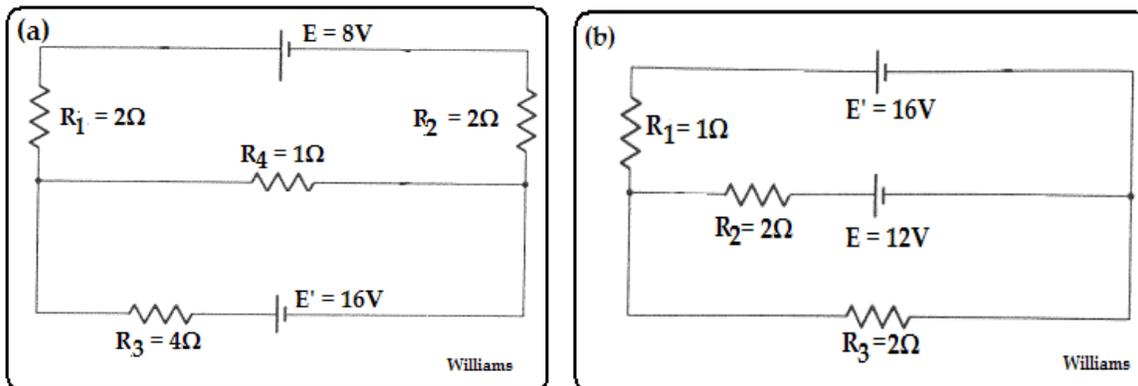
Si quisiéramos corroborarlo para el camino “periférico” recorrido en sentido antihorario debiera ser que:

$$-V_{R1} - V_{R5} + V_{R4} + V_{R3} = E' - E ; \text{efectivamente } -7 - 10 + 2 + 4 = 12 - 23 \rightarrow -11V = -11V$$

### Actividad 10

Para cada circuito, hallar la corriente y la caída de potencial en cada resistencia.

Al finalizar, y si fuera necesario, rehaga el esquema con las corrientes con el sentido correcto y compruebe la validez de las dos leyes de Kirchoff (sólo en los circuitos interiores).



R: (a) 1A, 4A y 3A; (b) 5, 1/2 y 11/2A.

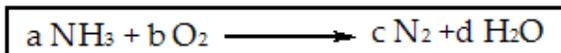
### III.5.3. Balance de Ecuaciones Químicas

En una reacción química ciertas moléculas (reactivos) se combinan para formar otras nuevas (productos). Una *ecuación química balanceada* es una ecuación algebraica que proporciona los números relativos de reactivos y de productos que intervienen en la ecuación con la condición que debe existir idéntica cantidad de átomos de un mismo elemento químico tanto a la izquierda como a la derecha de la misma. Se conviene indicar a la izquierda los reactivos y a la derecha los productos.

#### Ejemplo 14

la combustión del amoníaco ( $NH_3$ ) en oxígeno ( $O_2$ ) produce nitrógeno ( $N_2$ ) y agua ( $H_2O$ ).

Pretendemos equilibrar la ecuación.



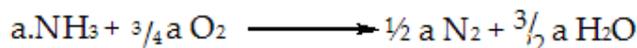
Planteamos las ecuaciones de conservación para cada elemento:

$$N: a = 2c \rightarrow c = \frac{1}{2} a$$

$$H: 3a = 2d \rightarrow d = \frac{3}{2} a$$

$$O: 2b = d \rightarrow b = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a = \frac{3}{4} a \rightarrow b = \frac{3}{4} a$$

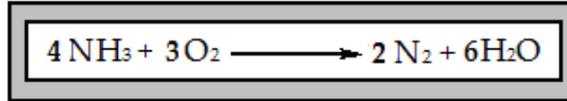
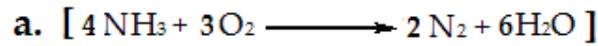
Reemplazando queda



Y si multiplicamos por 4 para que no queden fracciones (es múltiplo de 2 y 4):



Y extrayendo factor común a queda un múltiplo de una ecuación mínima:

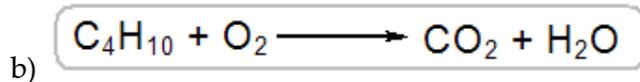
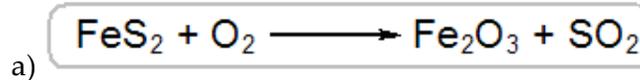


Se comprueba que la ecuación está equilibrada.

Nota: para acortar camino basta elegir un valor de "a" que permita conseguir que todas las incógnitas sean números naturales. En el ejemplo si a fuera 4 nos da que  $b = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ ,  $c = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$  y  $d = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ .

### Actividad 11

p) Equilibrar las siguientes reacciones químicas:



R: (a) 4, 11, 2, 8; (b) 2, 13 y 8 y 10

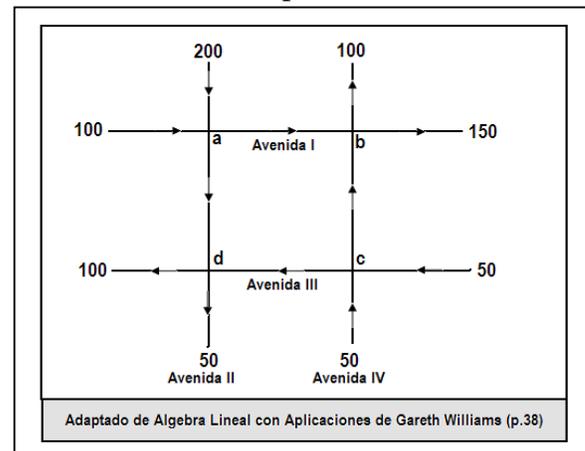
### III.5.4. Tráfico en la ciudad

El análisis que se ha efectuado para redes eléctricas fue adaptado para otros campos científico-tecnológicos como las comunicaciones o los sistemas de transporte. Veamos una situación sobre esto último.

#### Ejemplo 15

El esquema corresponde a un modelo de tráfico vehicular, muy simplificado por cierto y muestra la cantidad de autos por hora que ingresan o salen de un "microcentro" de cuatro cuadras determinado por cuatro Avenidas. El tránsito está medido en vehículos por hora -vph-.

Tener en cuenta que todo el tránsito que llega a una esquina debe salir de la misma.

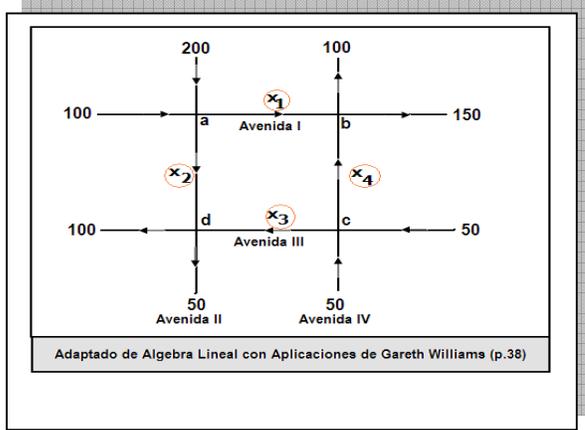


Se pide:

- Interpretar detenidamente el esquema y plantear un modelo que permita obtener la cantidad de autos por hora que circularán por cada Avenida.
- Si existiera una única solución obtenerla; si hubieran infinitas dar su expresión y las condiciones de limitación que existirían; si fuera incompatible reconocer cuáles datos la hacen contradictoria.

#### Solución

Definimos cuatro incógnitas que dan la cantidad de vehículos por hora que circulan por los tramos ab, cb, cd y ad donde la situación establece que el tránsito es en un único



sentido (podría tenerlo en ambos y debiéramos habilitar dos variables para ese mismo trayecto).

El sistema es 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 + x_4 = 250 \\ x_2 + x_3 = 150 \\ x_3 + x_4 = 100 \end{cases}$$
 y matricialmente 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array} \right);$$

resolviendo por Gauss llegamos a 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array} \right).$$

Como  $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 3 < n = 4$  (3 ecuaciones independientes y 4 incógnitas) tenemos un sistema compatible indeterminado.

Esta es: 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 - x_4 \\ 50 + x_4 \\ 100 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \text{ o } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 50 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Debido a que **todos los flujos vehiculares deben ser positivos** se tienen las siguientes limitaciones:

- (i)  $0 \leq x_4$  (flujo en el tramo bc)
- (ii)  $x_4 \leq 250$  (sino  $x_1$  daría negativo)
- (iii)  $x_4 \leq 100$  (sino  $x_3$  da negativo)

Las condiciones finales son:

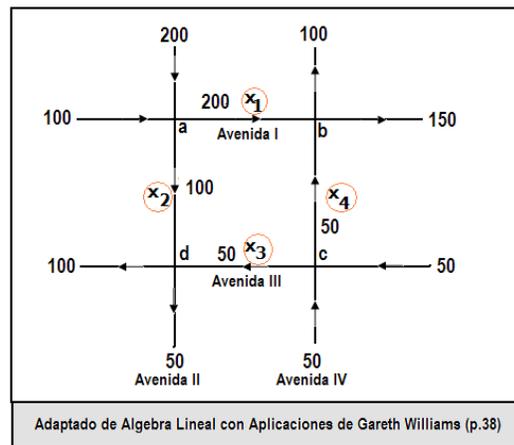
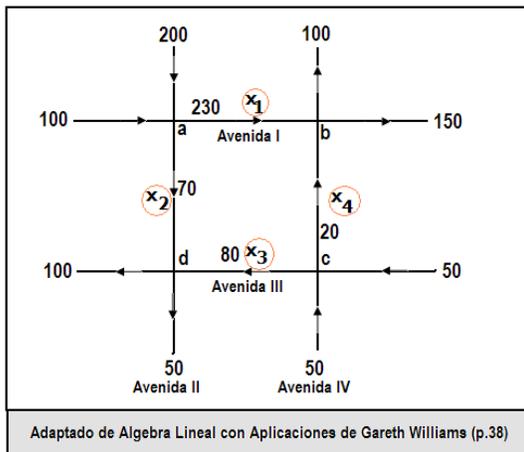
$$0 \leq x_4 \leq 100, x_2 \geq 50, x_1 \leq 250 \text{ y } x_3 \leq 100$$

Contestemos las siguientes cuestiones:

- Dar 2 posibles soluciones dentro de todas las encontradas y dibujarlas en el esquema de las Avenidas controlando que los resultados sean coherentes.

Si  $x_4 = 20$ ;

y  $x_4 = 50$



En el primer esquema el flujo es a es:  $200 + 100 = 230 + 70$  y así siguiendo (controlar todos los nodos en los dos casos).

- ¿Cuál es la circulación en cada calle si la Avenida III tiene su máximo valor posible?

Si  $x_3=100$  se llega a:

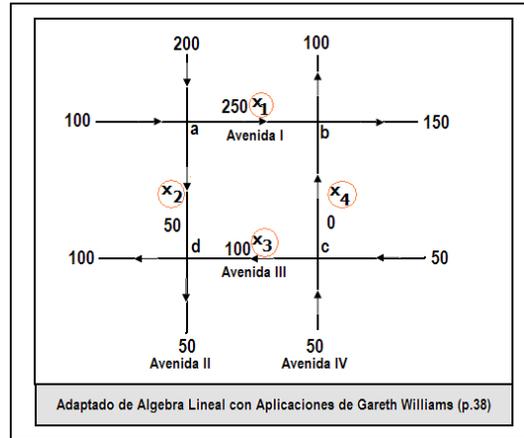
- ¿Es lógica la relación entre los flujos vehiculares de ingreso y salida a la zona de Avenidas que se está estudiando?

Sí. El ingreso de vehículos debe coincidir con el egreso sino habría acumulación de autos o aparición de los mismos, lo cual viola el modelo.

Así entran al “microcentro” por hora  $100+200+50+50= 400$  y salen  $100+150+100+50=400$

- ¿Cuáles son las limitaciones del modelo?

- 1- Las calles elegidas son de una sola mano. Habría que generalizarlo para dos (basta agregar una nueva variable en el sentido opuesto).
- 2- No hay autos que permanezcan acumulándose en el microcentro (que se queden estacionados por la necesidad de compras, por ejemplo).
- 3- Los valores de ingreso y egreso son “en promedio” y seguramente para cierta hora y día. No es un modelo dinámico.
- 4- No tiene en cuenta limitaciones propias del tránsito vehicular como semáforos, personas cruzando, atascamiento, etc.



### Actividad 12

(W) Para el esquema se pide:

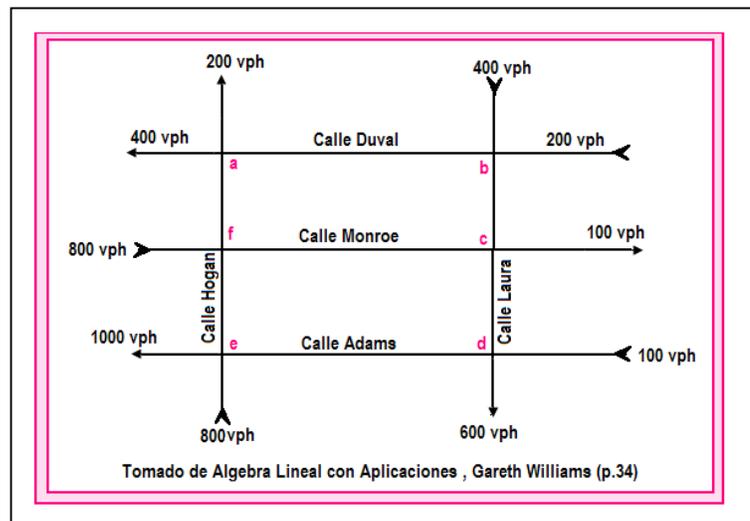
- Plantear el modelo del flujo vehicular y dar las variables en juego.
- Resolverlo.

¿Qué diferencias acerca de las soluciones se tiene aquí respecto a lo recién ejemplificado?

c) Dar las limitaciones en los valores de circulación por las calles, si las hay.

d) ¿Cuál es la menor afluencia que puede existir en la calle Adams sin provocar congestionamiento?

e) ¿Hay alguna posibilidad de que el flujo vehicular por la calle Laura disminuya a la mitad al pasar por la esquina de Monroe?



### III.5.5. Función de Demanda

Una de las funciones más importantes en la manufactura, que concierne a fabricantes, economistas y especialistas de mercado es la función de demanda **D** que representa la

cantidad de piezas de cierto artículo que se vende y *depende* del precio **P** del artículo, del ingreso **I** de los consumidores y del precio **C** de un artículo alternativo suministrado por la competencia.

### Ejemplo 16

Una empresa desea fabricar un artículo deportivo e investiga en el mercado la función de demanda. Estudios realizados indican que si el artículo cuesta \$20 con una área de ingreso promedio de 20000\$ se venderían 660 unidades siendo el precio de la competencia de \$20. Si se mantiene el precio pero la competencia reduce el suyo a \$10 entonces se venderían 1130 unidades en un área de \$30000 de ingreso promedio. Por último, si el precio es de \$15 y el de la competencia de \$20 se venden 1010 artículos en un área de \$25000 de ingreso.

Determine la función de demanda, si la relación es lineal con las tres variables independientes.

La relación es del tipo  $D = a.P + b.I + c.C$  donde es necesario obtener  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Tomemos para facilitar las cuentas como unidad del ingreso a “miles de pesos”.

La información suministrada determina las siguientes tres ecuaciones:

$$(I) a.20 + b.20 + c.20 = 660$$

$$(II) a.20 + b.30 + c.10 = 1130$$

$$(III) a.15 + b.25 + c.20 = 1010$$

Dividamos por 20, 10 y 5 respectivamente y armemos la matriz ampliada de coeficientes para triangular.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 33 \\ 2 & 3 & 1 & | & 113 \\ 3 & 5 & 4 & | & 202 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 33 \\ 0 & 1 & -1 & | & 47 \\ 0 & 2 & 1 & | & 103 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2f_1 + f_2 \\ -3f_1 + f_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 33 \\ 0 & 1 & -1 & | & 47 \\ 0 & 0 & 3 & | & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2f_2 + f_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 33 \\ 0 & 1 & -1 & | & 47 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 \div 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 30 \\ 0 & 1 & 0 & | & 50 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f_3 + f_1 \\ f_3 + f_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -20 \\ 0 & 1 & 0 & | & 50 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f_2 + f_1 \end{matrix}$$

Luego  $a = -20$ ,  $b = 50$  y  $c = 3$  donde **P** y **C** deben estar dados en pesos e **I** en miles de pesos; es razonable que  $a$  sea negativo pues a mayor precio del artículo menos demanda; si la competencia aumenta el precio nuestra demanda va a aumentar en desmedro de los otros y si el nivel de ingreso de la población sube tenemos mayor posibilidad de vender más.

Nos queda entonces que  $D = -20.P + 50.I + 3.C$

Podemos corroborar nuestras respuestas:

$$D((20, 20, 20)) = -20.20 + 50.20 + 3.20 = -400 + 1000 + 60 = 660 \quad \checkmark$$

$$D((20, 30, 10)) = -20.20 + 50.30 + 3.10 = -400 + 1500 + 30 = 1130 \quad \checkmark$$

$$D((15, 25, 20)) = -20.15 + 50.25 + 3.20 = -300 + 1250 + 60 = 1010 \quad \checkmark$$

¿Cuál sería la demanda para un precio de \$17 con precio de la competencia \$19 y en un rango de ingresos de \$15.000?

$$D((17, 15, 19)) = -20.17 + 50.15 + 3.19 = -340 + 750 + 57 = 467$$

### Actividad 13

Obtener la función lineal que relaciona la demanda artículo en función el precio  $P$ , del precio  $C$  de un bien sustituto y del nivel de ingreso de la población.

Se sabe que para  $P=\$10$ , un ingreso de  $\$15000$  y un precio de la competencia de  $\$20$  la demanda es 530 unidades; si  $P= \$20$ ,  $C= \$15$  y el ingreso de  $\$40000$  es  $D= 1360$ ; por último para  $P= \$15$ ,  $C= \$15$  e ingreso  $\$25000$  se compran 835 artículos.

Cuál es la demanda para  $P= \$22$ ,  $C= \$18$  e ingreso  $\$24000$ .

$$R: D = -15.P + 40.I + 4.C; D((22, 24, 18)) = 702$$

### III.5.6. Modelo de Leontief y la Economía

Abordemos un **modelo de intercambio económico** simple debido al economista Wassily Leontief. Se divide a la economía en sectores y se conoce la producción total para cada sector como la manera de intercambio monetario entre los sectores.

El valor de la producción total de un sector dado se conoce como el *precio de la salida*.

Leontief ha demostrado que **existen precios de equilibrio** que pueden ser asignados a la salida total de cada sector de tal manera que **los ingresos para cada sector sea exactamente igual al de sus gastos**.

Explicaremos una simplificación del modelo a través de un ejemplo (adaptado de Chen).

### Ejemplo 17

La muestra una economía con tres sectores  $A, B, C$  que intercambian bienes entre sí:

	Proporción de la producción del sector		
Adquirido por el sector	A	B	C
A	0,2	0,6	0,1
B	0,4	0,1	0,5
C	0,4	0,3	0,4

La misma se interpreta del siguiente modo:

a) La industria A utiliza el 20% de su valor monetario de producción en autosostenerse (es un insumo de ella misma), el 40% es demandado por la industria B y el otro 40% por la C (análisis de la columna 1).

b) La industria C tiene por proveedores a la industria A en un 40% del valor monetario de ésta, un 30% de la B y un 40% de ella misma (análisis de la fila 3).

Sean  $p_A, p_B$  y  $p_C$  el valor monetario de la producción total para cada sector (A, B, C).

En la búsqueda de precios de equilibrio, el gasto de cada sector debe coincidir con su nivel de ingreso tenemos algebraicamente que:

$$0,2p_A + 0,6p_B + 0,1p_C = p_A \text{ (I)}$$

$$0,4p_A + 0,1p_B + 0,5p_C = p_B \text{ (II)}$$

$$0,4p_A + 0,3p_B + 0,4p_C = p_C \text{ (III)}$$

La primera ecuación la interpretamos así:

Lo producido monetariamente por la industria A ( $p_A$ ) es neutralizado (o absorbido) por el gasto que le demanda la propia producción; en este caso el 20%, 60% y 10% de lo producido por A, B y C.

El sistema de ecuaciones es equivalente a:

$$-0,8p_A + 0,6p_B + 0,1p_C = 0 \text{ (I)}$$

$$0,4p_A - 0,9p_B + 0,5p_C = 0 \text{ (II)}$$

$$0,4p_A + 0,3p_B - 0,6p_C = 0 \text{ (III)}$$

Al ser un sistema homogéneo es compatible. Trabajemos con la matriz ampliada del sistema.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -0,8 & 0,6 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & -0,9 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & -0,6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -8 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 10.f_1 \\ 10.f_2 \\ 10.f_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -6 & 0 \\ 4 & -9 & 5 & 0 \\ -8 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 \leftrightarrow f_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & 11 & 0 \\ 0 & 12 & -11 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -f_1 + f_2 \\ 2f_1 + f_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -f_1 + f_2 \\ -f_2 + f_3 \end{array}$$

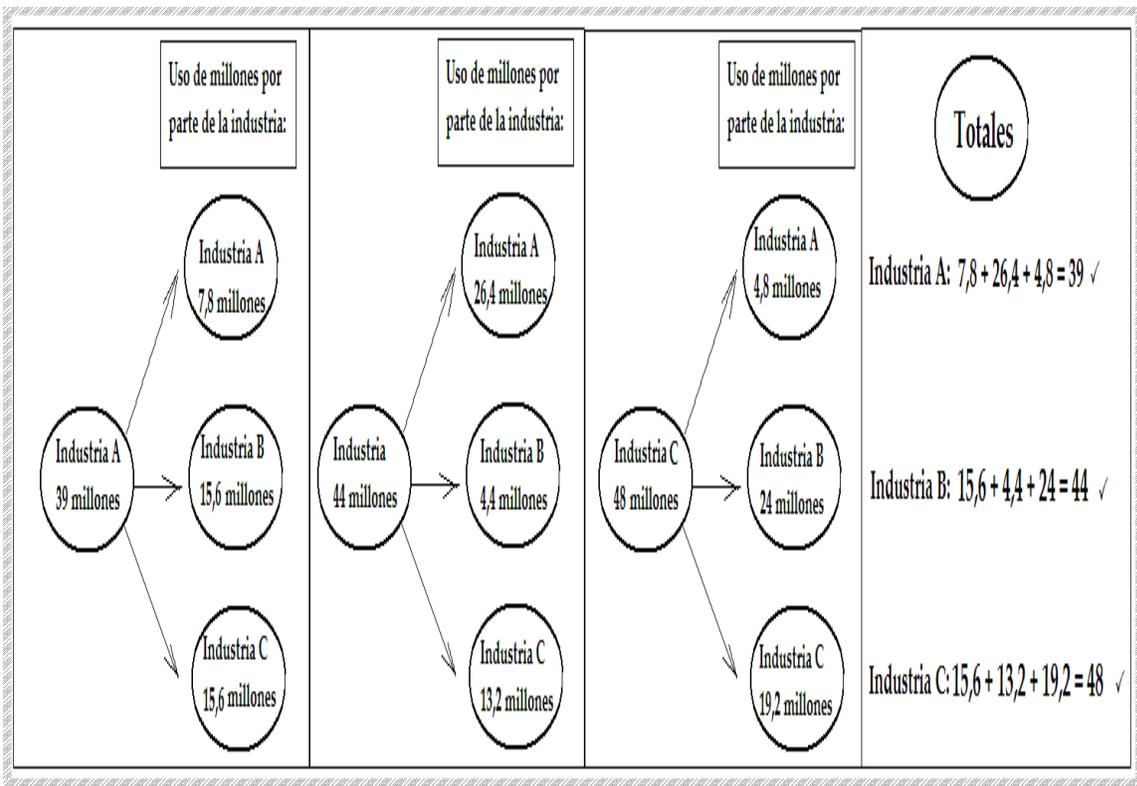
$$12p_B = 11p_C \rightarrow p_B = \frac{11}{12} p_C; \quad 4p_A + 3p_B - 6p_C = 0 \rightarrow 4p_A + 3 \cdot \frac{11}{12} p_C - 6p_C = 0 \rightarrow 4p_A = \frac{39}{12} p_C$$

$$p_A = \frac{13}{16} p_C; \quad \text{la solución } (p_A, p_B, p_C) = \left( \frac{13}{16} p_C, \frac{11}{12} p_C, p_C \right) = p_C \cdot \left( \frac{13}{16}, \frac{11}{12}, 1 \right) = \frac{p_C}{48} \cdot (39, 44, 48)$$

$$(p_A, p_B, p_C) = \alpha \cdot (39, 44, 48)$$

Por ejemplo la situación de equilibrio para  $\alpha = \$10^6$  (un millón de pesos) ocurre cuando la industria A produce 39 millones de pesos, la B 44 millones y la C 48 millones.

El siguiente esquema nos ayudará a comprender al modelo.



**Actividad 14**

(Ch) (i) Tres industrias A, B, C consumen parte de sus propias salidas y se compran entre sí de acuerdo con la tabla:

	Proporción de la producción del sector		
Adquirido por el sector	A	B	C
A	0,35	0,5	0,3
B	0,25	0,2	0,3
C	0,4	0,3	0,4

Utilice el modelo de Leontief para determinar los precios de equilibrio que pueden cobrar entre sí para que cada empresa termine hecha (sin pérdidas ni ganancias).

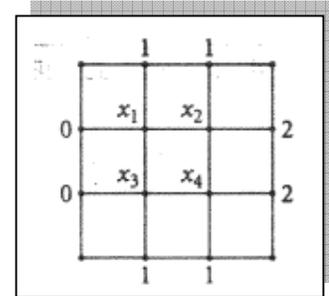
(ii) (Ch) Existe un acuerdo por tres consultoras A, B, C que trabajan para sí mismos y unos a otros regulando su actividad de acuerdo con la siguiente tabla:

	Porcentaje de tiempo dedicado por		
Trabajando para el consultor	A	B	C
A	50	40	10
B	10	20	60
C	40	40	30

Por medio del modelo de Leontief determine las facturaciones de equilibrio que pueden cobrar para que cada consultora termine con balance cero su gestión económica.

**III.5.7. Transmisión del Calor y Temperaturas medias en una placa metálica<sup>11</sup>**

Supongamos que tenemos una placa rectangular delgada cuyos bordes se mantienen a temperatura fijas cada uno de ellos; por ejemplo la izquierda a 0°C, la derecha a 2°C, la superior a 1°C y la inferior también a 1°C (ver esquema).



Queremos *estimar* las temperatura en el interior de la placa.

Para ello cubrimos la placa con redes cada vez más finas.

La intersección de las líneas del retículo se denomina *nodo*. Estos pueden ser de *frontera* o del *interior*, según estén en el borde o adentro. Cada nodo será un elemento térmico pues influirá sobre los nodos adyacentes. Si se conocen las temperaturas de los puntos frontera podemos calcular los valores en los nodos interiores. Cuanto más fino sea el retículo mejor funcionará la estimación que se basa en la siguiente propiedad:

**La temperatura en cualquier nodo interior es el promedio de las temperaturas de los nodos adyacentes.**

<sup>11</sup> Tomado de Nakos, p. 43 y siguientes.

Para simplificar tomemos sólo cuatro puntos interiores de la placa cuyas temperaturas desconocidas serán  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ ; en la frontera hay 12 nodos (que no les hemos dado nombre por simplificación y cuya temperatura se conoce).

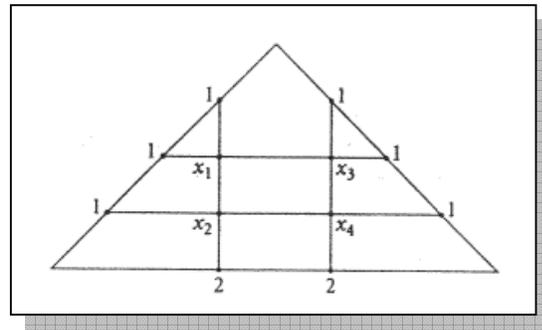
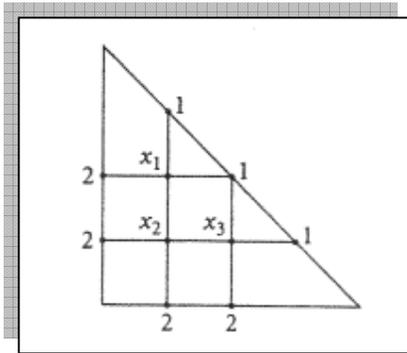
Las ecuaciones son:

$$x_1 = \frac{1}{4} \cdot (x_2 + x_3 + 0 + 1) \quad x_2 = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_4 + 1 + 2) \quad x_3 = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_4 + 0 + 1) \quad x_4 = \frac{1}{4} \cdot (x_2 + x_3 + 2 + 1)$$

Resolviendo por Gauss se llega a  $x_1 = \frac{3}{4}^\circ C, x_2 = \frac{5}{4}^\circ C, x_3 = \frac{3}{4}^\circ C, x_4 = \frac{5}{4}^\circ C$ .

### Actividad 15

N) Calcular las temperaturas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  en las placas metálicas de los siguientes dos esquemas utilizando la propiedad de la temperatura media.



### III.5.8. Los procesos de Markov<sup>12</sup>

Muchos de los procesos que ocurren en la naturaleza y en la sociedad pueden ser modelizados con la suposición de que el fenómeno se va desarrollando en una sucesión de etapas a partir de un estado inicial y donde la transición de un estado al siguiente ocurre con cierta probabilidad<sup>13</sup>.

Esta probabilidad de *transición* puede tener diferentes características pero si es despreciable la influencia de la etapa en la que se encuentra o en la que le va a seguir, o sea que *sólo depende de su estado anterior* el proceso se denomina *proceso de Markov* y la sucesión de estados se denomina *cadena de Markov* (ya hemos trabajado un poco en Apunte I, II.8.3.III, pag 64).

No debemos olvidar que se trata de una simplificación y en algunos casos puede ser demasiado restrictiva y tal vez inapropiada –las probabilidades podrían modificarse con el tiempo–.

Ilustraremos su uso desde la **Meteorología**.

<sup>12</sup> Adaptado de Boldrini pp. 14-26.

<sup>13</sup> Por ejemplo al tirar *una vez* un dado regular (no cargado) la probabilidad de obtener un 6 es de  $\frac{1}{6}$ ; el de conseguir un número mayor a 2 es de  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ; a cada evento o situación *elemental* se le asigna un número –llamada probabilidad– que está entre 0 y 1; la probabilidad del evento seguro tiene que ser 1 y produce una limitación adicional. Al tirar un dado la suma de las probabilidades de sacar un uno ó un dos ó un tres ó un cuatro ó un cinco ó un seis sumadas debe ser uno (efectivamente  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ ).

### Ejemplo 18

En una región las lluvias son bastante recurrentes; se ha estudiado la secuencia de años *lluviosos* y *secos* y se llegó a los siguientes resultados:

- A un año lluvioso la probabilidad de que en el próximo llueva mucho es de  $\frac{1}{4}$  (mientras de que sea un año “seco” es  $\frac{3}{4}$ );
- Si es un año seco, la probabilidad de que se repita es  $\frac{1}{2}$  (y el otro 50% queda para la posibilidad de ser lluvioso).

Tenemos una secuencia de estados lluvioso (Ll) y secos (S) que anotaremos matricialmente

como  $\begin{pmatrix} Ll_K \\ S_K \end{pmatrix}$  con  $K=0, 1, 2, \dots, n, \dots$  etc., donde  $K=0$  corresponde a la situación inicial;  $Ll_k$  y

$S_k$  representan las probabilidades de año lluvioso y seco respectivamente luego de  $K$  años (o etapas según el caso).

Armamos el modelo:

$$Ll_1 = \frac{1}{4} Ll_0 + \frac{1}{2} S_0$$

(la probabilidad de lluvia en el año siguiente hereda en un 25% lo acaecido en una año anterior si fue lluvioso y un 50% si hubiera sido seco)

$$S_1 = \frac{3}{4} Ll_0 + \frac{1}{2} S_0$$

(la probabilidad de *año seco* el año siguiente hereda en un 75% lo acaecido en una año anterior si fue lluvioso y un 50% si hubiera sido seco).

La situación puede representarse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} Ll_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ll_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

A la matriz  $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  se la denomina *matriz de probabilidades de transición* y

$\begin{pmatrix} Ll_K \\ S_K \end{pmatrix}$  es el  $K$ -ésimo *vector de probabilidades*.

Los elementos de  $T$  deben ser no negativos ( $\geq 0$ ) y los elementos de cada columna deben sumar 1. Una matriz cuadrada con dicha característica se denomina *estocástica*.

Al ser  $T$  una matriz con elementos constantes ocurre que:

$$\boxed{\begin{pmatrix} Ll_{K+1} \\ S_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ll_K \\ S_K \end{pmatrix} \text{ con } k=0, 1, 2, \dots, n, \dots}$$

y también

$$\begin{pmatrix} Ll_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} Ll_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \text{ con } k=0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

Por ende el comportamiento de la región a largo plazo (o sea cuando K es grande) podrá ser previsto si los elementos de la matriz  $T^k$  –calculables a partir de los elementos de T– se aproximasen a los de una matriz  $T^\infty$ ; si fuera el caso la probabilidad de año lluvioso versus año seco estará dado por:

$$\begin{pmatrix} Ll_\infty \\ S_\infty \end{pmatrix} = T^\infty \cdot \begin{pmatrix} Ll_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

y estará completamente determinada sin importar el K mientras éste sea grande.

Para que esto ocurra la matriz de probabilidades de transición T debe cumplir que sea regular: aquí significa que *alguna de sus potencias* tiene a todos sus elementos *diferentes de cero* (la T ejemplificada los tiene sin necesidad de buscar alguna potencia).

Si  $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es una matriz de probabilidad de transición regular resulta que:

a) existe  $T^\infty$  que además tiene todas sus columnas iguales;

b) y que éstas coinciden con el vector columna de probabilidad “en el infinito” –  $\begin{pmatrix} Ll_\infty \\ S_\infty \end{pmatrix}$  en

nuestro caso– que llamaremos  $p^\infty = \begin{pmatrix} p_1^\infty \\ p_2^\infty \\ \vdots \\ p_r^\infty \end{pmatrix}$ ;

c) y dicho vector  $p^\infty$  es el único no nulo que satisface  $p^\infty = T \cdot p^\infty$ ;

d) y para cualquier estado inicial con vector de probabilidad  $p$ , a largo plazo la situación se estabiliza hacia el vector de probabilidad  $p^\infty$ .

En nuestro ejemplo tendríamos:

$$Ll_0 = \frac{1}{4} Ll_0 + \frac{1}{2} S_0 \rightarrow \frac{3}{4} Ll_0 = \frac{1}{2} S_0 \rightarrow \frac{3}{2} Ll_0 = S_0$$

$$S_0 = \frac{3}{4} Ll_0 + \frac{1}{2} S_0 \rightarrow \frac{1}{2} S_0 = \frac{3}{4} Ll_0 \rightarrow S_0 = \frac{3}{2} Ll_0$$

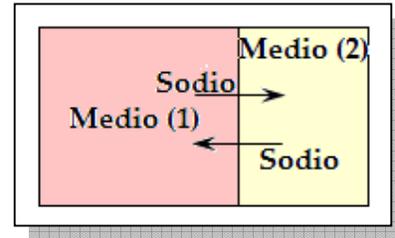
Como  $S_0$  y  $Ll_0$  son probabilidades sucede que  $S_0 + Ll_0 = 1 \rightarrow \frac{3}{2} Ll_0 + Ll_0 = 1 \rightarrow \frac{5}{2} Ll_0 = 1 \rightarrow$

$$Ll_0 = \frac{2}{5} \text{ y } S_0 = \frac{3}{5} \rightarrow \begin{pmatrix} Ll_\infty \\ S_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Esto significa que sin importar la situación de partida resulta que a largo plazo la probabilidad de un año lluvioso es del 40% y de un año seco es del 60%.

**Actividad 16**

(i) (B) Dos sustancias diferentes están en contacto e intercambian iones entre sí. Se conoce experimentalmente que un ión de sodio del medio (1) tiene una probabilidad 0,7 de pasar al medio (2) mientras que un ión del medio (2) tiene una probabilidad de 0,1 de pasar al medio (1). Se colocan inicialmente 2 moles de sodio en el medio (1) y nada en el (2). Se pide:



a) Modelizar la situación que nos otorgue las cantidades de iones de sodio  $U_k$  y  $D_k$  de los medio uno y dos respectivamente luego de  $k$  etapas ( $k= 0, 1, 2, \dots$ ).

b) ¿Cuál será la existencia de sodio en cada medio luego de 1, 2 y 3 etapas?

c) ¿Cuál es la previsión de concentración a largo plazo?

d) ¿Cuánto vale  $T^\infty$  en esta situación?

(ii) w) Construya un modelo de movimiento de población entre áreas metropolitanas y rurales si sus poblaciones en el año 2000 fueron de 200 y 60 millones respectivamente; el 99% de los habitantes de la ciudad optan por permanecer en ella mientras que el 98% de los rurales prefieren proseguir en su zona. Predecir las poblaciones desde los años 2001 al 2005.

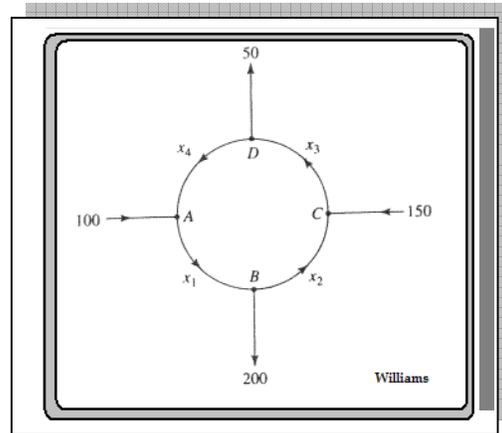
**Actividad 17: Ejercicios de refuerzo**

1w) El gráfico representa el tránsito que entra y sale en las uniones de una glorieta.

Construya un modelo matemático que describa el flujo de tráfico a lo largo de los distintos ramales.

¿Cuál es la mínima afluencia teórica posible a lo largo del ramal BC?

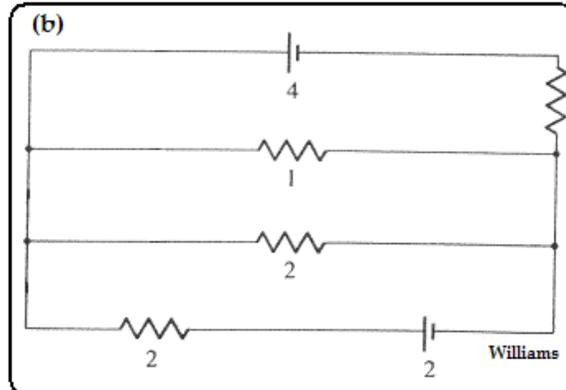
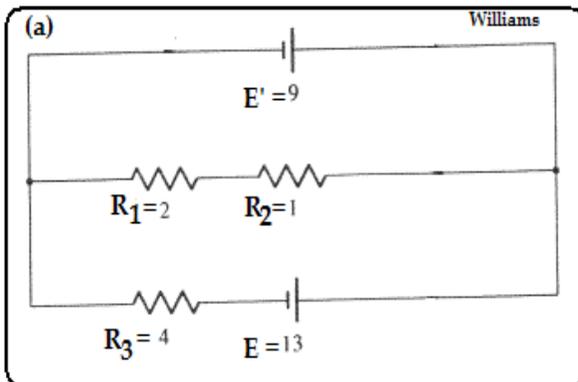
¿Es posible que se dé en la práctica?



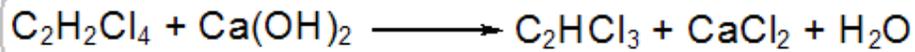
$R: y = -3 + x - 2x^2 + x^3$

2w) ¿Cuál es el polinomio de grado 3 cuya gráfica pasa por los puntos (1,-3), (2,-1), (3, 9) y (4, 33)?

3) Encuentre la corriente y la caída de potencial en cada resistencia para las situaciones dadas.



(4P) Equilibrar las siguientes reacciones químicas:



i)



(ii)

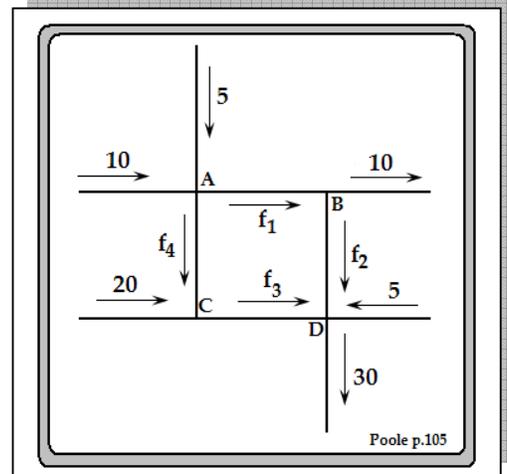
5P) Describa los flujos posibles a través de la red de tuberías de agua si el flujo se mide en litros por minuto.

R:  $f_1 = 15 - t$ ,  $f_2 = 5 - t$ ,  $f_3 = 20 + t$ ,  $f_4 = t$ ;  $10 \leq f_1 \leq 15$ ,  $0 \leq f_2 \leq 5$ ,  $20 \leq f_3 \leq 25$ ,  $0 \leq f_4 \leq 5$ .

6) c) Tres agricultores A, B y C producen plátanos, naranjas y manzanas, respectivamente, e intercambian la producción entre ellos.

El productor A compra el 50% de las naranjas y 20% de las manzanas; el B compra 30% de los plátanos y 40% de las manzanas, mientras que el C adquiere el 50% de los plátanos y 20% de las naranjas.

Utilice el modelo de intercambio simple de Leontief para determinar los precios de equilibrio que pueden cobrar entre sí para que el dinero no cambie de manos.

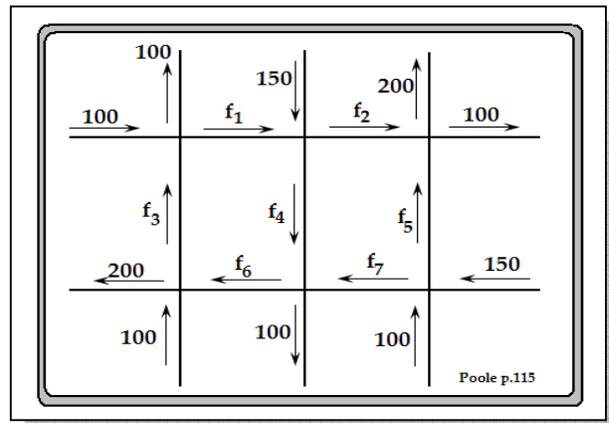


7) Para la siguiente red de tránsito vehicular determinar los flujos posibles.

- ¿Podrá ser  $f_1 = 100$  y  $f_6 = 150$ ?
- Si  $f_4 = 0$ , ¿cuál será la amplitud de flujo en cada una de las otras ramas?

8W) La siguiente es una matriz estocástica de transiciones ocupacionales:

(generación inicial)			
profesional	no profesional	profesional	no profesional (generación final)
1	0.2		
0	0.8		



- Si el padre es un trabajador no profesional, ¿cuál es la probabilidad que el hijo sea profesional?
- Si hay 10000 personas profesionales y 20000 no profesionales, ¿cuál será la distribución en la generación siguiente?

### III.6. Determinantes<sup>14</sup>

No obstante ser el concepto de determinantes uno de los primeros en surgir en el Álgebra Lineal lo abordaremos instrumentalmente pues su uso se relaciona con la inversa de una

<sup>14</sup> Agradecemos el aporte en el desarrollo del tema a nuestro colega Ing. Javier Enrique Rodríguez.

matriz, la solución única de un sistema de ecuaciones lineales de  $n \times n$ , la independencia y dependencia lineal de vectores y a la obtención de autovalores (tema que queda más allá de nuestro curso por cuestiones de tiempo).

El determinante se define para **matrices cuadradas de orden  $n$  y  $n$**  y su resultado será un número que en nuestro caso será real pues sólo trabajaremos con matrices a coeficientes reales.

Es conocida la expresión para matrices  $2 \times 2$ ; si  $A$  es la matriz  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  su determinante se define como  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Deténgase un instante sobre la notación: o antecedemos “**det**” a la matriz o le colocamos unas barras –tipo valor absoluto- a la matriz en vez del corchete –o paréntesis usual.

### Ejemplo 19

$$a) \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4) - (-7) \cdot 3 = 20 + 21 = 41.$$

$$b) \det \begin{bmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (t-2) - 2 \cdot 5t = 6t - 12 - 10t = -4t - 12$$

La obtención del valor de un determinante lo haremos de **tres maneras diferentes**:

1. A través del *desarrollo de Laplace*.
2. Por aplicación de *propiedades*.
3. Un *mix* de propiedades y el desarrollo de Laplace según nos sea más conveniente.

### III.6.1. Desarrollo de Laplace

#### Definición 6.1.a.

Dada  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , definimos **menor complementario**  $M_{ij}$  de un elemento  $a_{ij}$  de  $A$  como el determinante que se obtiene al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  donde se encuentra dicho elemento  $a_{ij}$ .

### Ejemplo 20

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ obtengamos los nueve menores complementarios:}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \text{ ya que hemos suprimido la fila 1 y la columna 1 como muestra el esquema:}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$ ,  $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 35 = 35$  pues se ha eliminado respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 14 = -10$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 0 = -24 \text{ y } M_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 0 = 20.$$

Si  $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 & -2 \\ 11 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & -0,4 & 6 \\ 7 & -1 & -9 & 1 \end{bmatrix}$  hay 16 menores complementarios;  $M_{23}$  sería  $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} -$

que por ahora no tenemos su resultado; (1)-.

### Definición 6.1.b.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define el **adjunto o cofactor** de un elemento  $a_{ij}$  de A como el número real  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Para nuestra matriz A tendríamos:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 10 = 10;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot (-24) = 24,$$

y así con los otros 7 cofactores.

### Comentarios

- El cofactor le "antepone" "**un uno**" o "**un menos uno**" al menor complementario de acuerdo a cual posición ocupa en la matriz.
- El resultado puede ser positivo, negativo o cero. Que los ejemplificados fueran positivos es una coincidencia.

### Definición 6.1.c.

Si A es una matriz cuadrada A de orden n, se define su **determinante** como la suma del producto de cada uno de los elementos de una línea cualquiera elegida de la matriz por su correspondiente adjunto. La línea puede ser una **fila** ó una **columna**.

Si  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  y, por ejemplo, desarrollamos por la columna 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$  y prosiguiendo llegaríamos a que el

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

fórmula que **no** debemos aprender de memoria.

### Ejemplo 21

Regresemos a nuestra matriz  $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  y hallemos su

determinante primero por la fila 2 y luego por la columna 3 para visualizar la coincidencia de ambos resultados y analizar si en alguno de los dos casos tuvimos alguna ventaja operativa.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 - 5 \cdot (-4 + 14) - 6 \cdot (4 - 14) = -50 + 60 = 10.$$

Usando la tercera columna:

$$|A| = -2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \cdot 35 - 6 \cdot (-10) + 1 \cdot 20 = -70 + 60 + 20 = 10.$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Comentarios

1) Si una columna –o fila– tiene algún o algunos ceros es más sencillo desarrollar por allí pues el término correspondiente se anula sin importar el valor del cofactor.

2) En la página 151 –(1)– debíamos el valor  $M_{23}$  que era  $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$  y que como hemos

visto vale 10.

3) Si tenemos una matriz de orden 4 el determinante se consigue a través de cuatro sumandos que involucran determinantes de orden 3 que como hemos visto podemos obtener.

Para una matriz de 5x5 se precisiarían hallar 5 determinantes de 4x4 que por lo antedicho puede alcanzarse –a pesar de lo engorroso de las cuentas- y así siguiendo para cualquier matriz de orden n.

4) Si una matriz cuadrada es triangular superior, triangular inferior o diagonal su determinante resulta tener una expresión muy sencilla.

Obtenerla si  $T_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ ,  $T_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

5) No se admitirá utilizar la regla de Sarrus pues la misma es válida solamente para determinantes de orden 3 (si no la conoce mejor, menos *ruido pedagógico*).

6) Cuando se enseñó el producto vectorial (apunte I, II.6.7. pág 55) se utilizó un desarrollo por la primera fila de un determinante aunque los elementos de ésta en este caso son vectores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ; el signo menos antepuesto al  $\hat{j}$  está reemplazando al  $(-1)^{1+2}$  que le correspondería a esa posición.

Por ejemplo

$$(1, -4, 0) \wedge (-2, 1, 5) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \hat{i} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1, -4, 0) \wedge (-2, 1, 5) = \hat{i} \cdot (-20) - \hat{j} \cdot 5 + \hat{k} \cdot (-7) = -20\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$$

### Actividad 18

Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

### III.6.2. Desarrollo por propiedades

Como podemos ver de las definiciones anteriores, el determinante de una matriz cuadrada real es una operación que involucra a todos los elementos de la matriz y que da por resultado un número real.

Si A es una matriz que pertenece a  $R^{n \times n}$ , definimos como determinante de orden n a una aplicación  $D: R^{n \times n} \rightarrow R$ , que cumple con *ciertas propiedades*. Obviamente puede haber muchas aplicaciones que operando sobre una matriz cuadrada den por resultado un número. Pero además el determinante cumple con las siguientes propiedades que están expresadas sobre las filas, pero se mantienen si las definimos sobre las columnas.

a) Si una matriz tiene una fila de ceros el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdot & \cdot & a_{N,N} \end{vmatrix} = 0$$

b) Si una matriz tiene una fila de la cual se puede extraer un número que es factor común de todos los elementos de la fila, el determinante de dicha matriz es igual al producto de dicho factor común por el determinante de la matriz en la cual la fila anterior está simplificada extrayéndole dicho factor común.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha \cdot a_{i,1} & \alpha \cdot a_{i,2} & \cdot & \cdot & \alpha \cdot a_{i,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdot & \cdot & a_{N,N} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdot & \cdot & a_{i,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdot & \cdot & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

Lógicamente esto puede ocurrir con todas las filas que pueden tener factores comunes diferentes. Luego se extraen todos, se simplifican las filas y el determinante es el producto de todos los factores por el determinante de la matriz simplificada.

### Ejemplo 22

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 15\sqrt{2} \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25 & 10 & 15 \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix} \text{ pues } \dots\dots\dots$$

$$\det(A) = -5\sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} \text{ ya que } \dots\dots\dots$$

$$\det(A) = -5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -25\sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} \text{ pues } \dots\dots\dots$$

$$\det(A) = -25\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -50\sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} \text{ debido a que } \dots\dots\dots$$

$$\det(A) = -50\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -150\sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix} \text{ pues } \dots\dots\dots$$

Queda para el lector resolver por Laplace el  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix}$  y completar el  $\det(A)$ .

Observar que si todas las filas de la matriz tienen el mismo factor común, entonces el determinante es igual a ese factor común multiplicado n veces por sí mismo (o sea elevado a la n) por el determinante de la matriz simplificada. O sea  $\det(k.A) = k^n \cdot \det A$

Utilice esta propiedad para recalcular el  $\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .

c) Si en una fila de una matriz, sus elementos pueden ser expresados como suma de otros dos números, el determinante de la matriz resulta igual a la suma de los determinantes de dos matrices. En ambas todas las filas son iguales, salvo aquella cuyos elementos pueden expresarse como suma de otros dos números. En la primera matriz se escribe uno de los conjuntos de números que forman esa fila especial y en la segunda se escribe el otro conjunto.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} + b_{i,1} & a_{i,2} + b_{i,2} & \dots & a_{i,N} + b_{i,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \dots & b_{i,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

Aplicarlo para obtener  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 - \pi & -1 + 2\pi & 2 + \pi \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

d) Si una matriz B se obtiene a partir de una matriz A intercambiando dos de sus filas, se tiene  $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ , o sea los determinantes son números opuestos.

Compruebe que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

e) Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es cero.

Calcule  $\begin{vmatrix} 3a & b & -a \\ 3d & e & -d \\ 3g & h & -g \end{vmatrix}$

f) Si B se obtiene a partir de A sumándole a una fila de A un múltiplo de otra fila de A el determinante no cambia.

g) El determinante de una matriz triangular superior, inferior o diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal.

h)  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$ ; el determinante de la transpuesta de A es igual al determinante de A.

i)  $|A.B| = |A||B|$ ; el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes individuales.

*Algunas de las propiedades de esta lista son redundantes porque pueden ser demostradas a partir de otras de la misma lista, pero lo que hemos tratado de hacer es resumir todas las propiedades que cumplen los determinantes que hacen además que la definición de los mismos sea única.*

**Ejemplo 23**

Veamos cómo podemos usufructuar de las propiedades para obtener el determinante sin utilizar Laplace.

Supongamos que queremos hallar  $\det(T) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

Si hacemos  $f_1 \cdot (-3) + f_2 \rightarrow f_2$  y  $f_1 + f_3 \rightarrow f_3$ , resulta  $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

Si intercambiamos  $f_4$  y  $f_2$  para obtener un 1 en la posición  $t_{22}$  cambia el determinante:

$\det(T) = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$  y efectuando  $f_2 \cdot (-3) + f_3 \rightarrow f_3$  y  $f_2 \cdot 6 + f_4 \rightarrow f_4$

$\det(T) = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 13 \end{bmatrix}$ ; si realizamos  $f_3 \cdot \frac{11}{4} + f_4 \rightarrow f_4$  resulta

$- \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{4} \end{bmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{19}{4} = 19$  pues hemos obtenido una matriz triangular superior.

**III.6.3. Mix Laplace y Propiedades**

Podemos ir alternando el uso de las dos herramientas ya abordadas.

Recalculemos el determinante anterior para mostrar la técnica.

$\det(T) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$  y desarrollando por la columna 1:

$$\det(T) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \text{ con } t_{31}=1 \text{ y a trav\u00e9s de columnas vamos a obtener dos ceros}$$

adicionales.

$$C_1 \cdot (-1) + C_2 \rightarrow C_2, C_1 \cdot (-2) + C_3 \rightarrow C_3: \det(T) = \begin{vmatrix} -6 & 11 & 13 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la tercera fila

$$\det(T) = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = (-33 + 52) = 19$$

### Actividad 19

$$(I) \text{ Obtener a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{ c) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ d) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ f) } \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(II) Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$$

(III) Si A es una matriz cuadrada de orden 4 y  $|A| = 2$ , calcular  $|3 \cdot (A^t)^5|$ .

(IV) Si A tiene cuatro filas  $F_1, F_2, F_3, F_4$  y  $|A| = 2$ .

$$\text{Calcular } \det(B) \text{ si } B = \begin{bmatrix} F_1 + 3F_2 \\ F_3 \\ -F_2 \\ 3F_4 \end{bmatrix}$$

### III.7. La inversa de una matriz y su determinante

Las operaciones por filas que utilizamos para llegar a una matriz triangular superior y posteriormente obtener el determinante son an\u00e1logas a las usadas para conseguir la *inversa de una matriz*.

Si al hacerlo llegáramos a tener dos filas iguales o (al menos) una fila totalmente nula, sabíamos que dicha matriz no tenía inversa. Los determinantes de esas matrices finales son nulos (propiedad a ó e).

Podemos así enunciar el siguiente resultado:

**Una matriz A tiene inversa si y solo si su determinante es diferente de cero**

### III.7.1. Determinante de la matriz inversa

Usando las propiedades vamos a probar que si una matriz A tiene inversa –y por ende su determinante es distinto de cero– vale la fórmula:

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

Si A tiene inversa, entonces cumple  $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I|$

Por la propiedad del determinante de un producto de matrices:  $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$

El determinante de la identidad  $|I|$  es uno pues se trata de una matriz diagonal con todos unos.

Luego  $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ , lo cual nos indica que el determinante de una matriz y el de su inversa son inversos multiplicativos (ninguno de esos determinantes puede ser nulo).

Por lo tanto  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

### Actividad 20

a) Sea A y B matrices cuadradas de orden 4 tal que  $\det(A) = \frac{1}{3}$  y  $\det(B) = -4$ . Obtener:

- $\det(A \cdot B^T)$
- $\det(2 \cdot A^{-1})$
- $\det((2 \cdot A)^{-1})$
- $\det(B^{-2} \cdot A^{-1})$
- $\det((2A)^3)$

b) Determinar los valores de k para que  $B = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 5 & k & 2 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix}$  tenga inversa.

c) Encontrar los valores de a y b para que  $C = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$  **no** tenga inversa

### III.8. Obtención de la inversa por la Adjunta

Dada una matriz  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , llamemos  $M_{ij}$  a la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Podemos hallar el determinante de  $M_{ij}$ , dado que es una matriz cuadrada; dicho determinante se lo llama **menor** de  $a_{ij}$ .

Se llama cofactor  $A_{ij}$  de  $a_{ij}$  a la siguiente expresión  $= (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$  (o sea el producto del menor por  $(-1)$  elevado a la suma de los índices de la fila y la columna eliminadas)

Se denomina **matriz de cofactores** a la matriz calculada por la siguiente expresión:

$$C_A = \left[ (-1)^{i+j} |M_{ij}| \right]_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$$

La adjunta de una matriz cuadrada A es la matriz de cofactores transpuesta.

$$\boxed{\text{Adj}(A) = (C_A)^t}$$

La adjunta nos habilita a conseguir la matriz inversa de una matriz A pues:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

**Ejemplo 24**

Afiancemos todo lo visto para  $U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

La matriz de cofactores es  $C_U = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$  y la  $\text{Adj}(U) = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(U) = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-10+2) = 8$$

$$U^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}; \text{ puede comprobarse que } U \cdot U^{-1} = I.$$

**Actividad 21**

Usando la adjunta obtenga las inversas de  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**III.9. Sistemas de ecuaciones lineales e Inversa**

Supongamos tener un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas lo cual puede representarse matricialmente por la ecuación  $A \cdot X = B$  con  $A \in R^{n \times n}$ ,  $X \in R^{n \times 1}$  y  $B \in R^{n \times 1}$ .

Si A fuera inversible –que ocurre solamente si  $\det(A) \neq 0$ – tendríamos:

$$A^{-1} \cdot [A \cdot X] = A^{-1} \cdot B \rightarrow [A^{-1} \cdot A] \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$
 que nos indica la solución.

Queremos remarcar el hecho que el valor del determinante nos divide nuestro sistema “cuadrado” en dos clases:

Si  $\det(A) \neq 0$  el sistema será compatible determinado sin importar quien sea B.

Si  $\det(A) = 0$  el sistema podrá ser incompatible o compatible indeterminado y habrá que estudiar cada situación.

**Ejemplo 25**

Dado el sistema  $\begin{cases} -x + ay + z = 1 \\ (2+a)x - y - ax = 2 - a \\ ax - ay - z = b \end{cases}$  determinar los valores de  $a$  y  $b$  reales para que el sistema

resulte compatible determinado (SCD), compatible indeterminado (SCI) e incompatible (SI) según corresponda.

La matriz del sistema es  $A = \begin{bmatrix} -1 & a & 1 \\ 2+a & -1 & -a \\ a & -a & -1 \end{bmatrix}$  y busquemos cuándo su  $\det(A) = 0$ .

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 2+a & -1 & -a \\ a & -a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 2 & a^2 - 1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} a \cdot f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \end{array}$$

fila tenemos:  $\det(A) = (-1)^4 \cdot (a-1) \cdot [-(a^2-1)] = -(a-1) \cdot (a+1) \cdot (a-1) = -(a-1)^2 \cdot (a+1)$

El determinante sólo se anula si  $a = 1$  ó  $a = 0$  y allí debemos hacer un estudio específico para discernir si estamos frente a un SCI o un SI.

Mientras tanto podemos garantizar que si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$  con  $b$  cualquier número real tenemos un SCD.

Pasamos a estudiar los casos  $a=1$  (luego  $a=-1$ )

Utilizamos la matriz ampliada  $M$  del sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right] \begin{array}{l} 3f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \end{array}$$

Hemos llegado a una matriz triangular superior y si  $b \neq 0$  resulta un sistema incompatible; si  $b = 0$  tenemos  $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(M) < n=3$  entonces el sistema es compatible indeterminado.

Para  $a = -1$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \end{array}$$

Nuevamente tenemos una matriz triangular superior y si  $b+1 \neq 0$  (o sea  $b \neq -1$ ) resulta un sistema incompatible; si  $b = -1$  tenemos  $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(M) < n=3$  entonces el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

$$\begin{array}{l} a \neq 1 \text{ y } a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R} \rightarrow \text{SCD} \\ a = 1 \wedge b = 0 \rightarrow \text{SCI} \\ a = 1 \wedge b \neq 0 \rightarrow \text{SI} \\ a = -1 \wedge b = -1 \rightarrow \text{SCI} \\ a = -1 \wedge b \neq -1 \rightarrow \text{SI} \end{array}$$

## Actividad 22

a) Clasificar el sistema de acuerdo a los posibles valores de  $a$  y  $b$  si su matriz ampliada es:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -a & -1 \\ a & -a & -1 & b \end{array} \right]$$

b) Resolver el sistema para todos los valores de  $b$ .

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + 2x_3 - x_4 = b + 2 \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3bx_2 + 2x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

c) Si  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ q & r & s \end{vmatrix} = -5$  obtener el valor de los siguientes determinantes (justificar):

i)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+m & 3b+n & 3c+p \\ -2q & -2r & -2s \end{vmatrix}$

ii)  $\begin{vmatrix} -a & q & 4m \\ -b & r & 4n \\ -c & s & 4p \end{vmatrix}$

iii)  $\begin{vmatrix} 2m-a & 2n-b & 2p-c \\ 50q & 50r & 50s \\ 2a-4m & 2b-4n & 2c-4p \end{vmatrix}$

### III.10. Apéndice

#### Actividad 5 (p. 111)

a)  $\frac{8}{\sqrt{21}}$     b)  $\frac{\sqrt{1665}}{9}$     c1)  $\frac{27}{\sqrt{378}}$     c2) 3    d)  $\frac{19}{\sqrt{11}}$

e)  $-x + 7y + 6z = 8$  ó  $-x + 7y + 6z = -2$ . Son dos planos paralelos al dado.

#### Material de apoyo actividad 8

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -8 & -7 & -1 & 0 & -6 & -5 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tener cuidado que las escalas han sido modificadas.

