

ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALÍTICA I (1027)

TEJIENDO EL ALGEBRA LINEAL

Apunte III.

Versión 2.2 – Junio del 2015

Segundo Cuatrimestre del 2015

Julio Bertúa – Marcelo Denenberg

Unidad IV: Espacios vectoriales, Subespacios, Bases y Transformaciones Lineales

IV.1. Espacios Vectoriales.

IV.1.1. Propiedades de la suma.

IV.1.2. Propiedades del producto.

IV.1.3. Algunas propiedades de los espacios vectoriales.

IV.2. Subespacios.

IV.2.1. Ejemplo de Subespacio.

IV.2.2. Vectores que generan un subespacio. Combinación lineal de vectores.

IV.3. Independencia y dependencia lineal de vectores.

IV.3.1. Método “corto” para analizar independencia y dependencia lineal.

IV.4. Ecuaciones que determinan a los elementos de un subespacio vectorial.

IV.5. Base.

IV.5.1. Coordenadas de un vector en una base.

IV.5.2. Dimensión de un espacio vectorial (o subespacio).

IV.5.3. Unicidad de las coordenadas de un vector en una base.

IV.5.4. Suma e Intersección de Subespacios.

IV.5.5. Relación entre las dimensiones de T , S , $T \cap S$ Y $S+T$.

IV.5.6. Suma Directa.

IV.6. Transformaciones Lineales.

IV.6.1. Propiedades de una Transformación Lineal.

IV.6.2. Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal.

IV.6.2.1. Otra forma de hallar la imagen.

IV.7. Clasificación de las transformaciones lineales.

IV.7.1. Monomorfismo.

IV.7.2. Epimorfismo.

IV.7.3. Isomorfismo.

IV.8. Teorema Fundamental de las transformaciones lineales.

IV.9. Matriz representativa de una Transformación Lineal.

IV.10. Rango de una matriz.

IV.11. Teorema de Rouche – Fröbenius.

IV.12 Composición de transformaciones lineales.

IV.12.1. Matriz de la composición en las bases canónicas.

IV.13. Inversa de una transformación lineal.

IV.13.1. Matriz de la transformación inversa en las bases canónicas.

IV.14. Ejercitación desarrollada –y con algunos comentarios teóricos –

Unidad IV: Espacios Vectoriales, Subespacios, Bases y Transformaciones Lineales

Resumen

Se retoman y generalizan los conceptos de espacio vectorial, subespacio, vectores linealmente independientes y se incorpora el de base y dimensión tanto para un espacio vectorial como para un subespacio.

Se vuelve sobre la cuestión de transformaciones lineales y se amplía con la incorporación del núcleo e imagen, sus dimensiones y la representación matricial de una transformación lineal.

IV.1 Espacios Vectoriales

Ya en el apunte I hemos introducido el concepto de Espacio Vectorial (II.1.3.1 Estructura de Espacio Vectorial, pag. 27).

Si se tiene un conjunto **A** con la estructura de cuerpo (como los reales) y otro **V** y definimos dos operaciones “+” y “·”, y si ambas operaciones cumplen las diez propiedades (que se detallan más abajo) se dice que **V** es un *espacio vectorial sobre A*.

A los elementos de **V** los llamaremos **vectores** y los representaremos como \vec{v} independientemente de lo que sean (matrices, polinomios, vectores, etc.) y a los elementos de **A** los llamaremos **escalares**.

O sea que el espacio vectorial consta de dos conjuntos de elementos matemáticos (uno de ellos un cuerpo) y dos operaciones (una interna en **V** y otra que utiliza elementos de **A** y de **V**).

IV.1.1. Propiedades de la suma

Simultáneamente *ejemplificaremos*¹ cada propiedad en el espacio de las **matrices** $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ y $A = \mathbb{R}$.

1) **Ley de cierre interno.** Para todo par de elementos que pertenezcan a **V** se cumple que su suma da por resultado otro elemento de **V**.

$$\forall \vec{u} \in V, \forall \vec{v} \in V \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$$

\mathcal{M} y \mathcal{N} matrices cualesquiera de $\mathbb{R}^{3 \times 2}$; $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$ y $\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \end{bmatrix}$ con m_{ij} y n_{ij} reales ($i=1,2,3; j=1,2$) se

define la suma $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \begin{bmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} \end{bmatrix}$ lo cual da otra matriz real puesto que $m_{ij} + n_{ij}$ es un número real

al ser suma de números reales.

¹ También se había solicitado probar que \mathbb{R}^3 era un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (pág. 39) y que $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ también era un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (pág. 65).

2) **Asociativa.** Para toda terna de elementos que pertenezcan a V la suma de los mismos puede ser asociada, o sea se puede sumar el primero con el segundo y al resultado sumarle el tercero o al primero sumarle el resultado de la suma del segundo con el tercero.

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$$

M, N y P matrices cualesquiera de $\mathbb{R}^{3 \times 2}$; debe ocurrir que $(M + N) + P = M + (N + P)$.

Tomemos un elemento ij cualquiera ($i=1,2,3; j=1,2$) y comparemos ambos miembros:

$$[(M + N) + P]_{ij} = (M + N)_{ij} + P_{ij} = M_{ij} + N_{ij} + P_{ij} = M_{ij} + (N_{ij} + P_{ij}) = M_{ij} + (N + P)_{ij} = [M + (N + P)]_{ij}$$

Como la igualdad vale para cualquier ij de todos los posibles $\rightarrow (M + N) + P = M + (N + P)$

3) **Elemento neutro.** Existe un elemento $\vec{O} \in V$ tal que para todo vector $\vec{v} \in V$ resulte que $\vec{O} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{O} = \vec{v}$.

Existe la matriz nula $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tal que para toda matriz $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$ resulta que:

$$O + M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + m_{11} & 0 + m_{12} \\ 0 + m_{21} & 0 + m_{22} \\ 0 + m_{31} & 0 + m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = M$$

De modo similar se prueba que $M + O = M$.

4) **Inverso aditivo u opuesto.** Para cada vector $\vec{v} \in V$ existe un vector -inverso aditivo u opuesto- denotado $-\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{O}$

Dada una matriz $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$ existe otra matriz $M' = \begin{bmatrix} -m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & -m_{22} \\ -m_{31} & -m_{32} \end{bmatrix}$ -que es real pues los opuestos de

números reales son números reales-, tal que $M + M' = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & -m_{22} \\ -m_{31} & -m_{32} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} m_{11} + (-m_{11}) & m_{12} + (-m_{12}) \\ m_{21} + (-m_{21}) & m_{22} + (-m_{22}) \\ m_{31} + (-m_{31}) & m_{32} + (-m_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Análogamente $M' + M = O$; además comúnmente llamamos a M' como $-M$.

5) **Conmutativa.** Para todo $\vec{v}, \vec{w} \in V$ resulta que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.

$$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \end{bmatrix} \text{ con } m_{ij} \text{ y } n_{ij} \text{ reales } (i=1,2,3; j=1,2) \text{ vale que:}$$

$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \begin{bmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} + m_{11} & n_{12} + m_{12} \\ n_{21} + m_{21} & n_{22} + m_{22} \\ n_{31} + m_{31} & n_{32} + m_{32} \end{bmatrix} = \mathcal{N} + \mathcal{M}.$$

IV.1.2. Propiedades del producto

1) **Ley de cierre externo.** El producto de cualquier escalar perteneciente a **A** por cualquier vector de **V** da por resultado otro vector de **V**.

$$\forall \alpha \in A; \forall \vec{v} \in V \rightarrow \alpha \cdot \vec{v} \in V$$

$$\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ y } k, \text{ real} \rightarrow k \cdot \mathcal{M} = k \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot m_{11} & k \cdot m_{12} \\ k \cdot m_{21} & k \cdot m_{22} \\ k \cdot m_{31} & k \cdot m_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ pues } k, m_{ij} \text{ es real al ser producto de números reales } (i=1,2,3; j=1,2).$$

2) **Asociativa mixta.** $\forall \alpha, \beta \in A \wedge \forall \vec{v} \in V$ resulta que $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$

$\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \alpha, \beta \text{ reales} \rightarrow$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathcal{M}) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} \beta \cdot m_{11} & \beta \cdot m_{12} \\ \beta \cdot m_{21} & \beta \cdot m_{22} \\ \beta \cdot m_{31} & \beta \cdot m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot m_{11}) & \alpha \cdot (\beta \cdot m_{12}) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot m_{21}) & \alpha \cdot (\beta \cdot m_{22}) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot m_{31}) & \alpha \cdot (\beta \cdot m_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{11} & (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{12} \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{21} & (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{22} \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{31} & (\alpha \cdot \beta) \cdot m_{32} \end{bmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathcal{M}$$

3) **Distributiva del producto respecto a la suma de escalares**

$$\forall \alpha, \beta \in A \wedge \forall \vec{v} \in V \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$$

$$\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \alpha, \beta \text{ reales} \rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \mathcal{M} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) \cdot m_{11} & (\alpha + \beta) \cdot m_{12} \\ (\alpha + \beta) \cdot m_{21} & (\alpha + \beta) \cdot m_{22} \\ (\alpha + \beta) \cdot m_{31} & (\alpha + \beta) \cdot m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot m_{11} + \beta \cdot m_{11} & \alpha \cdot m_{12} + \beta \cdot m_{12} \\ \alpha \cdot m_{21} + \beta \cdot m_{21} & \alpha \cdot m_{22} + \beta \cdot m_{22} \\ \alpha \cdot m_{31} + \beta \cdot m_{31} & \alpha \cdot m_{32} + \beta \cdot m_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot m_{11} & \alpha \cdot m_{12} \\ \alpha \cdot m_{21} & \alpha \cdot m_{22} \\ \alpha \cdot m_{31} & \alpha \cdot m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot m_{11} & \beta \cdot m_{12} \\ \beta \cdot m_{21} & \beta \cdot m_{22} \\ \beta \cdot m_{31} & \beta \cdot m_{32} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \mathcal{M} + \beta \cdot \mathcal{M}$$

4) **Distributiva del producto respecto a la suma de vectores.**

$$\forall \alpha \in A \wedge \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$$

$$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \end{bmatrix} \text{ con } m_{ij} \text{ y } n_{ij} \text{ reales (} i=1,2,3; j=1,2 \text{), } \alpha \text{ real vale que:}$$

$$\alpha(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \alpha \begin{bmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(m_{11} + n_{11}) & \alpha(m_{12} + n_{12}) \\ \alpha(m_{21} + n_{21}) & \alpha(m_{22} + n_{22}) \\ \alpha(m_{31} + n_{31}) & \alpha(m_{32} + n_{32}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha.m_{11} + \alpha.n_{11} & \alpha.m_{12} + \alpha.n_{12} \\ \alpha.m_{21} + \alpha.n_{21} & \alpha.m_{22} + \alpha.n_{22} \\ \alpha.m_{31} + \alpha.n_{31} & \alpha.m_{32} + \alpha.n_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha.m_{11} & \alpha.m_{12} \\ \alpha.m_{21} & \alpha.m_{22} \\ \alpha.m_{31} & \alpha.m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha.n_{11} & \alpha.n_{12} \\ \alpha.n_{21} & \alpha.n_{22} \\ \alpha.n_{31} & \alpha.n_{32} \end{bmatrix} = \alpha.\mathcal{M} + \alpha.\mathcal{N}$$

5) Unidad del cuerpo de escalares o elemento neutro para este producto.

$$\exists 1 \in A / \forall \vec{v} \in V \rightarrow 1.\vec{v} = \vec{v}$$

$$\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow 1.\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1.m_{11} & 1.m_{12} \\ 1.m_{21} & 1.m_{22} \\ 1.m_{31} & 1.m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = \mathcal{M}$$

Luego el conjunto de la matrices reales de 3x2 $-\mathbb{R}^{3 \times 2}-$ es un *espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, R*.

Observación

La demostración de que un conjunto con dos operaciones definidas sobre un cuerpo es un espacio vectorial es un trabajo a menudo tedioso y que como hemos indicado en el ejemplo precedente hay que efectuarlo teniendo en cuenta las definiciones de las operaciones y donde se está operando.

IV.1.3. Algunas propiedades de los Espacios Vectoriales

Algo importante al trabajar con espacios vectoriales es que en ellos encontramos propiedades que se cumplen en forma general, independientemente de cuales sean los objetos matemáticos en cuestión (vectores, matrices, polinomios, funciones, etc.).

Vamos a detallar algunas de ellas (sobreentendiendo por simplicidad que trabajamos sobre el cuerpo de los reales).

i) El elemento neutro de un espacio vectorial es único.

Para demostrar que el elemento neutro es único supondremos que no lo es o sea que existe otro que cumple las mismas propiedades.

Sean ambos $\vec{0}$ y $\vec{0}' \in V$ elementos neutros de V.

$$\text{Vale } \forall \vec{v} \in V \rightarrow \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}, \vec{0}' + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0}' = \vec{v}.$$

Ya que las igualdades suceden para todo vector de V, en particular es cierta para cada uno de ellos, o sea:

$\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}'$ –de la primera– \wedge $\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}$ –de la última– pero de ambas igualdades resulta que $\vec{0} = \vec{0}'$; por ende ambos neutros son idénticos.

ii) Sea V un espacio vectorial y $0 \in R \rightarrow \forall \vec{v} \in V$ vale que $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Hacemos $0 \cdot \vec{v} = (0 + 0) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$ [al cero lo expresamos como $0 + 0$; aplicamos la propiedad distributiva respecto a la suma de escalares].

Dado el elemento $0 \cdot \vec{v}$ existe su opuesto $(-0 \cdot \vec{v})$ y lo sumamos en la igualdad:

$$0 \cdot \vec{v} + (-0 \cdot \vec{v}) = (0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}) + (-0 \cdot \vec{v})$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} + [0 \cdot \vec{v} + (-0 \cdot \vec{v})] \text{ por elemento opuesto y propiedad asociativa}$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} + \vec{0} \text{ elemento opuesto}$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \text{ elemento neutro}$$

iii) El producto de cualquier escalar por el vector nulo de V da como resultado el vector nulo de V .

$$\alpha \cdot \vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0}$$

Por unicidad del elemento neutro vale que $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in R$

iii) El inverso aditivo de un vector (u opuesto) es igual a $(-1) \cdot \vec{v}$

Sea $\vec{v} \in V \rightarrow (-1) \cdot \vec{v} + \vec{v} = (-1 + 1) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Luego $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

IV.2. Subespacios

Proseguiremos nuestro estudio planteándonos la siguiente cuestión:

¿existen subconjuntos de un espacio vectorial que en sí mismo cumplen con todas las propiedades de un espacio vectorial?

Veremos que sí, se denominan *subespacios* y para facilitar su introducción regresaremos al $V = R^{3 \times 2}$ del apartado anterior.

Sea $S = \{M \in R^{3 \times 2} \text{ tal que } m_{11} = 0\}$ o sea que una matriz cualquiera de S es $M_S = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$.

Testeamos si las propiedades de un espacio vectorial son satisfechas por S .

¿Valdrá la ley de cierre interno?

Sean M y N pertenecientes a S ;

$$M + N = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} + n_{12} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} \end{bmatrix} \text{ que es un elemento de } S \text{ pues}$$

componente $(M+N)_{11} = 0$.

La asociatividad la cumple pues vale para toda matriz de $R^{3 \times 2}$ y en particular para las de S ; lo mismo para la conmutatividad: ambas son propiedades heredadas por S de V .

¿Tiene S elemento neutro?

Sí; la matriz nula tiene el valor O_{11} igual a cero.

Dejemos por un momento la propiedad del elemento opuesto y analicemos la ley de cierre externo.

Sea M en S y k real; luego $k.M = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k.m_{12} \\ k.m_{21} & k.m_{22} \\ k.m_{31} & k.m_{32} \end{bmatrix}$ que también está en S .

En partir si tomamos $k = -1$ vemos que cada elemento M_s tiene su opuesto: $-M_s$.

La asociatividad mixta, la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares y del producto respecto a la suma de vectores y el elemento neutro para el cuerpo de escalares vale para toda matriz de $R^{3 \times 2}$ y en particular para toda M_s .

Luego S es un espacio vectorial “subsumido” en otro espacio vectorial y por esto último alcanza con probar sólo tres propiedades: como lo adelantamos se denomina un **subespacio vectorial**.

Formalmente $S \subseteq V$ (espacio vectorial) es un subespacio si vale:

$$\boxed{(1) \vec{0} \in S. \quad (2) \forall \vec{v}, \vec{w} \in S \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in S. \quad (3) \forall \alpha \in R \wedge \vec{v} \in S \Rightarrow \alpha \vec{v} \in S.}^2$$

Nota: si $\vec{0} \notin S$ el conjunto S no puede ser un subespacio.

En la guía II habíamos adelantado este concepto desde un punto de vista gráfico (pág. 108). Trabajemos con algunas situaciones.

IV.2.1. Ejemplos de subespacios

Ejemplo 1

a] Vamos a analizar el caso de un plano en R^3 .

Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y - z = 0\}$; los puntos que pertenecen a S son claramente los de un plano que tienen por normal a $(1, -1, -1)$. Analicemos si S es un subespacio de R^3 .

(1) El elemento nulo de R^3 , ¿pertenece a S ?

Vemos que sí pues el $(0, 0, 0)$ cumple con la ecuación $x - y + z = 0$ ($0 - 0 - 0 = 0$)

(2) Tomemos dos elementos genéricos de S (no sirven casos particulares: hay que probarlo en general).

Sean $\vec{u} = (x, y, z) \wedge \vec{v} = (x', y', z') \in S$; por ende vale que $x - y - z = 0 \wedge x' - y' - z' = 0$.

La pregunta es: ¿ $\vec{u} + \vec{v} \in S$?

$\vec{u} + \vec{v} = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$; resulta entonces que:

$x + x' - (y + y') - (z + z') = x + x' - y - y' - z - z' = x - y - z + x' - y' - z' = 0 + 0 = 0$.

El vector $\vec{u} + \vec{v}$ cumple con la ecuación de S y entonces es un elemento de dicho conjunto.

(3) Si $\vec{u} = (x, y, z) \in S$ y k real analicemos si $k \cdot \vec{u}$ pertenece a S .

$k \cdot \vec{u} = k \cdot (x, y, z) = (k.x, k.y, k.z)$

$k.x - k.y - k.z = k \cdot (x - y - z) = k \cdot 0 = 0$ pues $x - y - z = 0$ ya que $\vec{u} \in S$. Luego $k \cdot \vec{u} \in S$.

² La condición (1) puede considerarse como caso particular de (3) para $k=0$ pero suele utilizarse para comprobar que S es no vacío.

Además en algunos textos suelen reemplazarse las tres condiciones por la siguiente:

$$\forall \alpha, \beta \in R \wedge \vec{v}, \vec{w} \in S \text{ resulta que } \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} \in S$$

Al cumplirse las tres propiedades es S un subespacio³.

b] Tenemos $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y = 0\}$; ¿será un subespacio?

(1) ¿ $\vec{0} \in T$? Sí pues $0 \cdot 0 = 0$.

(2) $\vec{u} = (x, y) \wedge \vec{v} = (x', y')$ elementos de T o sea $x \cdot y = 0 \wedge x' \cdot y' = 0$; ¿ $(x + x', y + y') \in T$?

Para que esto ocurra debiera suceder que $(x + x') \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y + x' \cdot y' = 0 + x \cdot y' + x' \cdot y + 0 = x \cdot y' + x' \cdot y$ lo cual no es necesariamente 0.

Por ejemplo $(1; 0) \wedge (0; 1)$ se encuentran en T pero su suma $(1; 1)$ no ya que $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Por lo tanto T no es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Actividad 1

Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de sus respectivos espacios vectoriales. Si lo fueran, demostrarlo.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 2x - y + 3z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = -2\}$$

$$C = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \text{traza}(A) = 0\}$$

$$D = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \det(A) = 0\}$$

$$E = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 / \vec{v} = \alpha \cdot (1; -2; 0; 5) + \beta \cdot (0; 4; -6; 1) \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \text{ números reales}\}.$$

En los casos de \mathbb{R}^3 determinar las características geométricas de los conjuntos.

Actividad 2

a) Determine –sin necesidad de realizar ningún cálculo– dos subespacios de un espacio vectorial cualquiera.

b) ¿Qué tipo de subespacios son posibles de encontrar en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 .

IV.2.2. Vectores que generan un subespacio. Combinación lineal de vectores.

A partir del ejemplo anterior, tres alumnos interesados en indagar un poco más acerca de los subespacios, intentan encontrar vectores en \mathbb{R}^3 que “generen” a S , o sea que cualquier vector de S pueda ser expresado en función de ellos.

Cada alumno prefiere despejar de diferente manera:

<i>Alan</i>	<i>Joaquín</i>	<i>Lucas</i>
$z = x - y$	$y = x - z$	$x = y + z$
$X_s = (x, y, x - y) =$	$X_s = (x, x - z, z) =$	$X_s = (y + z, y, z) =$
$(x, 0, x) + (0, y, -y) =$	$(x, x, 0) + (0, -z, z) =$	$(y, y, 0) + (z, 0, z) =$
$x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, -1)$	$x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, -1, 1)$	$y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1)$

³ El mismo S puede escribirse $\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \vec{v} \bullet (1, -1, -1) = 0\}$ y probar que es subespacio.

i) $(0, 0, 0) \bullet (1, -1, -1) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in S$

ii) Si $\vec{u} \text{ y } \vec{v} \in S$ significa que $\vec{u} \bullet (1, -1, -1) = 0$ y $\vec{v} \bullet (1, -1, -1) = 0$

¿Resultará que $(\vec{u} + \vec{v}) \in S$?

$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (1, -1, -1) = \vec{u} \bullet (1, -1, -1) + \vec{v} \bullet (1, -1, -1) = 0 + 0 = 0$; por lo tanto sí $(\vec{u} + \vec{v}) \in S$.

iii) Sea λ un real y $\vec{u} \in S$ (o sea que $\vec{u} \bullet (1, -1, -1) = 0$); ¿será $\lambda \vec{u} \in S$?

$(\lambda \vec{u}) \bullet (1, -1, -1) = \lambda (\vec{u} \bullet (1, -1, -1)) = \lambda \cdot 0 = 0$ por propiedad de extracción de un escalar en el producto escalar. Luego $\lambda \vec{u} \in S$ y se cumplen las tres condiciones analizadas. S es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

- a) ¿Cuál de ellos tiene la razón?
- b) Elija tres vectores de los hallados por los alumnos $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ y forme la siguiente combinación de ellos $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$, con a, b y c representando números reales genéricos. Escriba las componentes del vector suma resultante; ¿ese vector pertenece a S? Interprete lo alcanzado.

Nota: El conjunto E de la actividad 1 corresponde a un subespacio que está generado por vectores; en este caso por dos.

Vectores generadores de un subespacio vectorial

En la Guía II (pag. 116) hemos introducido la idea de combinación lineal de vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Ahora generalizaremos la definición para cualquier espacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K (en general éste será \mathbb{R}), se llama **combinación lineal de vectores** a cualquier expresión del tipo:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_{r-1}\vec{v}_{r-1} + a_r\vec{v}_r = \sum_{i=1}^r a_i\vec{v}_i; a_i \in K; \vec{v}_i \in V$$

Por ejemplo dado un par de vectores como ser $\vec{v}_1 = (1; -2; 0; 5)$ y $\vec{v}_2 = (0; 4; -6; 1)$ el vector $\vec{w} = -4.\vec{v}_1 + 3.\vec{v}_2 = -4.(1; -2; 0; 5) + 3.(0; 4; -6; 1) = (-4; 20; -18; -17)$ es combinación lineal de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 pues proviene de la suma de múltiplos de los mismos.

En cambio $\vec{u} = (1; 0; 0; 1)$ no lo es pues no existen valores α y β tal que se verifique:

$$\vec{u} = (1; 0; 0; 1) = \alpha.(1; -2; 0; 5) + \beta.(0; 4; -6; 1).$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = 2\alpha + 4\beta \\ 0 = -6\beta \\ 1 = 5\alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = 2 + 4\beta \\ 0 = \beta \\ 1 = 5 + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = 2 \\ 0 = \beta \\ 1 = 5 \end{cases} \text{ ¡absurdo!}$$

Preguntas (a partir de la definición)

- a) ¿Cuál es la cantidad mínima de vectores multiplicados por escalares que se necesitan para tener una combinación lineal?
- b) ¿Existe un límite de vectores multiplicados por escalares que pueden incluirse en una combinación lineal?

Actividad 3

- a) ¿Existe algún valor de a real para que el vector $(2; 0; a)$ sea combinación lineal de los vectores $(1; 1; 2)$ y $(-1; 2; 3)$?

- b) Escriba un conjunto de generadores de las siguientes subespacios:

$$S_1 = \{X \in \mathbb{R}^4 / x_1 = 0\}$$

$$S_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 = 0\}$$

$$S_3 = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X\}$$

IV.3. Independencia y dependencia lineal de vectores.

Ahora podemos analizar lo que aparecía en el Desafío 1.

Para cada uno de los alumnos los vectores que pertenecían al subespacio S se podían expresar como combinación lineal de dos vectores que pertenecen a S –corroborar que tanto $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ y $(0, 1, -1)$ cumplen la condición de S –.

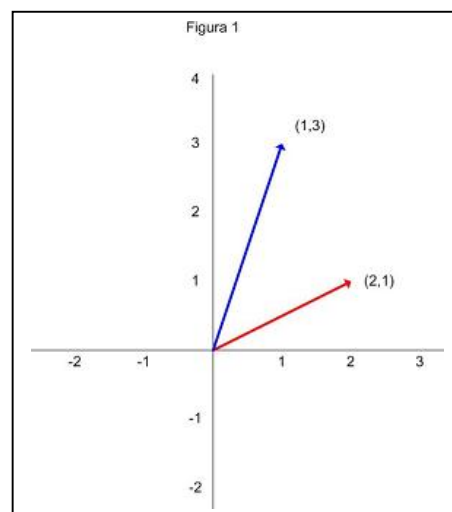
Pero luego si tomábamos una combinación de tres de dichos vectores, se obtenía un vector cuyas coordenadas también cumplían con la condición de S (eso si hicieron bien el Desafío).

Entonces en este caso:

- (i) ¿Podemos tomar cualquiera de las combinaciones lineales propuestas por los alumnos?
- (ii) ¿Podemos tomar una combinación lineal de tres vectores?
- (iii) ¿Da lo mismo una cosa que otra?

En principio la idea es que se puede tomar cualquiera de las opciones. Es más si tuviésemos una combinación lineal de cuatro vectores de S , podríamos expresar a cualquier vector de S en función de esa combinación. Pero uno no quiere trabajar de más y aquí aparece un tema de economía de esfuerzo que tiene, por suerte, una explicación matemática.

En las páginas 116 del apunte II introdujimos el concepto de independencia lineal en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .



Ejemplo 2

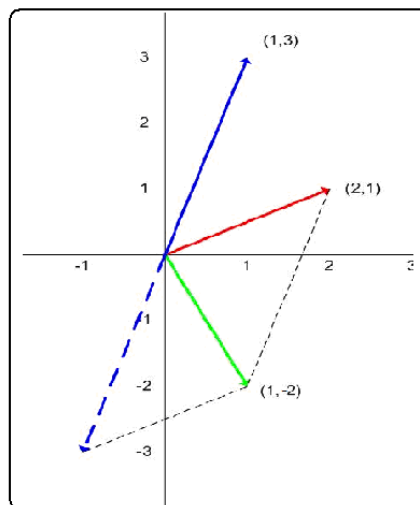
Veamos un ejemplo simple en \mathbb{R}^2 .

Los dos vectores de la figura 1 son claramente “independientes” uno del otro porque tienen direcciones diferentes, y los múltiplos de cada uno de ellos mantienen la dirección (no necesariamente el sentido) y si sumamos cualquier múltiplo del $(2, 1)$ con cualquier otro múltiplo del $(1, 3)$ nos dará un vector de \mathbb{R}^2 que no es el nulo (salvo que multipliquemos a cada vector por el número cero).

O sea que si hacemos la combinación lineal

$a \cdot (2, 1) + b \cdot (1, 3) = (2a + b, a + 3b)$, este vector resultante será igual a cero si:

$2a + b = 0$ y $a + 3b = 0$ cuya única solución es $a = 0$ y $b = 0$.



Recopilemos: hicimos la combinación lineal de los vectores y la igualamos al vector nulo; resolvimos un sistema lineal de ecuaciones homogéneo (siempre será compatible– y si la única solución es el $(0;0;\dots,0)$

Diremos que los vectores son **linealmente independientes**.

Si agregamos otro vector $(1, -2)$ veremos que es posible establecer una combinación lineal del $(2, 1)$ y el $(1, 3)$ que dé por resultado el $(1, -2)$.

$$a.(2, 1) + b.(1, 3) = (2a + b, a + 3b) = (1, -2).$$

Resolvemos por Gauss y resulta que $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{-f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$

sale $b = -1$ y $a = 1$. Esto significa que:

$$1.(2, 1) + (-1).(1, 3) = (1, -2) \text{ o equivalentemente:}$$

$$1.(2, 1) + (-1).(1, 3) + (-1).(1, -2) = (0, 0).$$

Luego existe una combinación lineal de los tres vectores de la forma $a.(2, 1) + b.(1, 3) + c.(1, -2)$ con $a=1$, $b=-1$ y $c=-1$ que da por resultado el vector nulo.

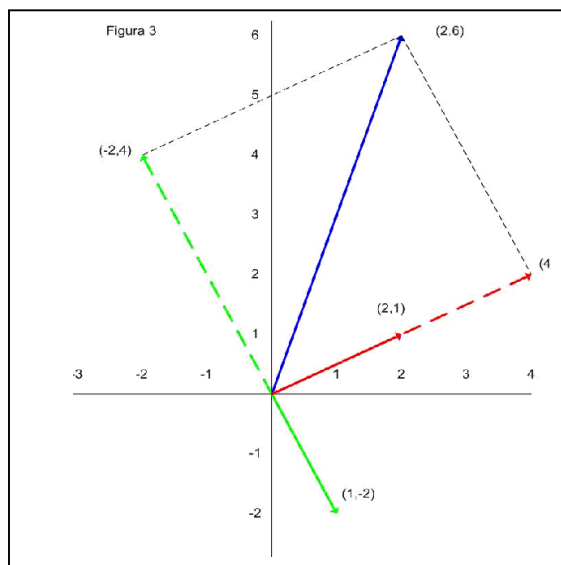
También podríamos haber planteado la combinación lineal:

$$a.(2, 1) + b.(1, -2) = (2, 6) \text{ -múltiplo de } (1, 3) \text{ -}$$

Resolviendo llegamos a $a = 2 \wedge b = -2$ (hágalo).

Entonces $2.(2, 1) + (-2).(1, -2) + (-1).(2, 6) = (0, 0)$ con lo cual hemos encontrado una combinación lineal de los vectores con escalares no todos nulos que dan por resultado el vector nulo.

Cuando esto ocurre decimos que los vectores son **linealmente dependientes**.



Definición: Decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k\}$ de un espacio vectorial V son **linealmente independientes (L.I.)** si la combinación lineal

$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_{k-1} \vec{v}_{k-1} + a_k \vec{v}_k = \vec{0}$ tienen como única solución $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, o sea el sistema homogéneo resultante es compatible determinado.

En caso contrario (el sistema es compatible indeterminado, existen infinitas soluciones) se dice que los vectores son **linealmente dependientes (L.D.)**.

Observación: poner atención que decimos que **todos** los vectores son linealmente dependientes. A menudo encontraremos que uno de ellos (o varios) se pueden expresar como combinación de los otros (el ejemplo anterior lo muestra) y estamos tentados a decir que ese (o esos) vectores dependen de los otros, pero esto puede llevar a confusión porque en realidad *suele ocurrir* que uno puede despejar el vector que desee en función de los otros –no siempre; pensar por ejemplo el $(0, 0)$ y el $(2, -3)$ –.

IV.3.1. Método “corto” para analizar independencia y dependencia lineal

Ejemplo 3

Vamos a explicarlo a través de una situación concreta.

Queremos determinar si el conjunto de vectores $\{(-1, 1, 1, 0); (3, 0, -1, -4); (0, 2, 1, -5); (3, -1, 3, 2)\}$ $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ es LI ó LD; para eso ubicamos a los vectores en fila y los triangulamos –en

este ejemplo que servirá de explicación colocaremos a la izquierda de la matriz las operaciones hechas para facilitar la comprensión de lo realizado pero luego esto no es necesario–.

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \vec{v}_2 = \\ \vec{v}_3 = \\ \vec{v}_4 = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 = \\ \vec{v}_3 = \\ \vec{v}_4 + 3\vec{v}_1 = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 = \\ \vec{v}_3 = \\ \frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1) = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1) = \\ \vec{v}_3 = \\ \vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1) = \\ \vec{v}_3 - 2(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) = \\ \vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - 3(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \\ \frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1) = \\ \vec{v}_3 - 2(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) = \\ \vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - 3(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) - \left[\vec{v}_3 - 2(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) \right] = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Notar que la última combinación de vectores resulta darnos el vector nulo:

$$\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - 3(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) - \left[\vec{v}_3 - 2(\frac{1}{2}(\vec{v}_4 + 3\vec{v}_1)) \right] = \vec{0}$$

$$\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\vec{v}_4 - \frac{9}{2}\vec{v}_1 - \left[\vec{v}_3 - \vec{v}_4 - 3\vec{v}_1 \right] = \vec{0}$$

$$\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\vec{v}_4 - \frac{9}{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + 3\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{v}_4 + \frac{3}{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{0};$$

$$\text{podemos despejar algún vector, como ser, } \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_4 - \frac{3}{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Por lo tanto \vec{v}_2 es combinación lineal de los restantes y los cuatro vectores son LD.

Si hubiéramos llegado a que la última fila del escalonamiento es un vector distinto del nulo tendríamos que los vectores son LI.

Nota:

(a) Omitimos la demostración por cuestiones de tiempo. Esperamos agregarla en versiones posteriores del apunte.

(b) El método es eficiente pues el subespacio generado por los vectores originales es igual al generado por los vectores ya triangulados que, o *suelen ser menos* o *tienen en algunas de sus coordenadas más ceros* que favorece su manipulación –ver intersección más adelante–.

(c) Resumiendo:

Ubicamos los vectores en fila, triangulamos y si:
 ♦ **no se anula ninguna fila los vectores son LI;**
 ♦ **se anula una o más de una son LD.**

(d) Por lo tanto el ejemplo 3 se resolvería del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{los vectores son LD:}$$

[Hemos omitido escribir al costado las operaciones por fila del escalonamiento pero recuerde que **siempre deben indicarse**].

Actividad 4

a) Determinar si los siguientes conjuntos son L.I. o L.D.

$$A = \{(1,1,1), (0,1,-2), (1,0,1), (1,-1,1)\} \in \mathbb{R}^3$$

$$B = \{(1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,2,1), (0,1,0,2)\} \in \mathbb{R}^4$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

b) ¿Para cuáles valores de k real los siguientes vectores son l.i.?

(i) $\{(1; 0; -2); (-1; 1; k); (-3; 1; 0)\}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k-2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

c) Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto de vectores LI de un espacio vectorial V, hallar todos los valores de α real para que $\{2v_1 - v_3 + v_4; \alpha v_2 + 2v_3; v_1 + \alpha v_2 + v_3; \alpha v_1 + v_2 + v_4\}$ sean L.I.

IV.4. Ecuaciones que determinan a los elementos de un subespacio vectorial.

Ahora que hemos avanzado un poco más en las definiciones acerca de los vectores que participan en una combinación lineal volvemos al subespacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$.

Sabemos que los tres alumnos han encontrado vectores que generan a S.

¿Cómo harían si partimos de los vectores generadores, obtener la ecuación (o las ecuaciones) que cumplen los elementos de S?

Veamos lo que logró el primer alumno:

S para él estaba generado por los vectores $\{(1,0,1); (0,1,-1)\}$ que solemos indicarlo de la siguiente manera $S = \overline{\{(1,0,1); (0,1,-1)\}} = \text{gen}\{(1,0,1); (0,1,-1)\}$.

Luego si (x, y, z) pertenece a S , entonces existen a y b tal que:

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, -1) = (a, b, a - b)$$

Por lo tanto tendremos que $x = a$, $y = b$ y $z = a - b = x - y$; por lo que resulta que $x - y - z = 0$ y es la condición sobre las componentes del vector que deben cumplir los elementos de S .

Actividad 5

Repita lo mismo para los vectores seleccionados por los otros dos alumnos y pruebe hacerlo con una combinación de tres vectores seleccionados por los alumnos.

¿Qué obtiene?

Ejemplo 4

Ahora plantearemos un ejercicio similar en \mathbb{R}^4 .

Sea $S' = \overline{\{(1,1,0,1); (0,1,0,-1); (0,0,2,1); (2,3,2,2)\}}$.

Luego si (x,y,z,w) pertenece a S' deben existir a,b,c y d tal que

$$(x, y, z, w) = a(1,1,0,1) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,2,1) + d(2,3,2,2).$$

Desarrollando resulta

$$(x, y, z, w) = a(1,1,0,1) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,2,1) + d(2,3,2,2) = (a + 2d, a + b + 3d, 2c + 2d, a - b + c + 2d)$$

La resolución no resulta tan directa como en el ejemplo anterior, por lo que nos convendrá escribirlo en forma matricial, interpretando que son cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y con cuatro valores independientes. En contra de lo que siempre estamos acostumbrados a pensar, en este caso las incógnitas son a, b, c y d y los valores independientes x, y, z y w , o sea las componentes genéricas de un vector que pertenece a S' . La matriz resultante entonces será:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 & 3 & y \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 1 & -1 & 1 & 2 & w \end{array} \right)$$

Resolviendo por Gauss

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 & 3 & y \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 1 & -1 & 1 & 2 & w \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1} f_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 1 & -1 & 1 & 2 & w \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 - f_1} f_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w - x \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w - x \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 + f_2} f_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y - 2x + w \\ 0 & 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w - x \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)f_2 + f_3} f_3 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-2x+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4x-2y+z-2w \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w-x \end{array} \right).$$

Si analizamos la matriz resultante veremos que podemos reorganizar sus filas quedando

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y-2x+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4x-2y+z-2w \end{array} \right)$$

La hemos triangulado quedando una fila nula (en la matriz de coeficientes); por lo tanto aplicando el criterio de Rouché–Frobenius para que existan soluciones (el sistema sea compatible) el **rango**⁴ de la matriz de coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada; el rango de la matriz de coeficientes es 3 y para que se cumpla el criterio debemos pedir que $4x - 2y + z - 2w = 0$ y de esa forma el rango de la ampliada es 3. Luego $4x - 2y + z - 2w = 0$ es la condición que deben cumplir los elementos de S' .

Nota: Si al triangular hubiéramos llegado a $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 & w-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-2x+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4x-2y+z-2w \end{array} \right)$ resultaría que $y-2x+w=0 \wedge 4x-2y+z-2w=0$; por lo tanto al subespacio lo determinan 2 ecuaciones.

Actividad 6

- (I) a- Verifique que todos los elementos de S' cumplen dicha condición ¿Cómo lo haría?
 b- ¿Por qué una fila en la matriz de coeficientes resultó nula?
 c- A partir de su respuesta de b), ¿necesitaremos trabajar con los cuatro vectores generadores de S' ?

Justifique su respuesta.

(II) Encontrar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto solución sea el subespacio indicado.

(a) $S_1 = \text{gen}\{(0, 1, 2, -1); (1, 0, 1, 0)\}$ (b) $S_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

IV.5. Base

De los ejercicios anteriores y de las discusiones anexas, a esta altura deberíamos tener en claro que con una combinación lineal de vectores podemos generar un subespacio (que es en definitiva también un espacio vectorial) y que con una combinación lineal de vectores igualada al vector nulo del espacio vectorial correspondiente podemos determinar si los vectores son L.I. o L.D.

⁴ Concepto definido en el Apunte I, II-12, pág. 84 y subsiguientes y que más adelante retomaremos.

Vamos a desarrollar un ejercicio en \mathbb{R}^2 para clarificar un poco más (van a tener que trabajar y pensar un poco).

Actividad 7

Conjunto de vectores	¿ Es L.I. ?	¿ Genera \mathbb{R}^2 ?
$\{(1,2)\}$		
$\{(0,0)\}$		
$\{(1,2),(-2,-4)\}$		
$\{(1,2),(-1,1)\}$		
$\{(1,2),(-1,1),(1,3)\}$		

Ahora podemos responder a estas preguntas:

a) ¿Siempre que tengamos un conjunto con un solo vector, éste será L.I.?

Justifique su respuesta;

b) ¿Puedo generar \mathbb{R}^2 con un conjunto que posea dos vectores y otro que posea tres?

c) Llegado en casos que la respuesta anterior fuese positiva, ¿con qué conjunto decidiría trabajar para generar \mathbb{R}^2 ? ¿Por qué?

En general trataremos de trabajar con un conjunto que genere a un subespacio (espacio vectorial) y que al mismo tiempo sea L.I.

Definición: Llamamos **base** de un espacio vectorial **V** (o de un subespacio **S**) a un conjunto de vectores –o elementos de **V**– que cumpla las siguientes condiciones:

a) genera a **V** (**S**)

b) es **L.I.**

Actividad 8

(a) Determine si los siguientes conjuntos son base de los espacios vectoriales respectivos⁵:

$$A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\} \in \mathbb{R}^3.$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$C = \{(1,1,1), (1,1,0), (3,3,2)\} \in \mathbb{R}^3.$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(b) Indique dos bases diferentes para los siguientes espacios vectoriales: \mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}^3 ; $\mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathbb{R}^{4 \times 3}$.

Ejemplo 5

Obtengamos una base del siguiente subespacio $S = \{X \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - 2x_4 = 0\}$.

⁵ Recuerde que tendrá que demostrar que el conjunto genera a cualquier vector genérico del espacio vectorial donde se encuentra y que es linealmente independiente. O sea tendrá que trabajar con un mismo sistema de ecuaciones en un caso teniendo como términos independientes a las componentes de un vector genérico del espacio vectorial y por el otro el mismo sistema pero homogéneo (o utilizar el método corto). Más adelante podrá utilizar el concepto de dimensión y la comprobación será más rápida.

De la segunda ecuación obtenemos $x_2 = 2x_4$ y despejando x_1 de la primera se llega a:

$$x_1 = x_2 - x_3 = 2x_4 - x_3.$$

Entonces un elemento genérico de S es $X_5 = (2x_4 - x_3; 2x_4; x_3; 2x_4) = x_4 \cdot (2, 2, 0, 1) + x_3 \cdot (-1, 0, 1, 0)$ y es combinación lineal de los vectores $(2, 2, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1, 0)$ que son L.I. pues no son múltiplos entre sí.

Resulta que una base de S es $B = \{(2, 2, 0, 1); (-1, 0, 1, 0)\}$

Otras bases pueden utilizar a múltiplos no nulos de ellos y a combinaciones lineales que no resulten L.D; no hacemos las cuentas –quedan para usted- pero otras bases podrían ser:

$$B_1 = \{3 \cdot (2, 2, 0, 1); -5 \cdot (-1, 0, 1, 0)\}$$

$$B_2 = \{(2, 2, 0, 1); (2, 2, 0, 1) + (-1, 0, 1, 0)\}$$

$$B_3 = \{(2, 2, 0, 1) + 2 \cdot (-1, 0, 1, 0); 3 \cdot (2, 2, 0, 1) - 2 \cdot (-1, 0, 1, 0)\}$$

Pero **no lo es** el conjunto $= \{(2, 2, 0, 1) + (-1, 0, 1, 0); 3 \cdot (2, 2, 0, 1) + 3 \cdot (-1, 0, 1, 0)\}$ ya que puede comprobar que se obtienen dos vectores múltiplos entre sí.

Actividad 9

Encuentre dos bases para cada uno de los siguientes subespacios:

(i) $\{X \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - 4x_2 = 0\}.$

(ii) $\{X \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}.$

(iii) $\{X \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = x_4 - x_1 = 0\}.$

(iv) $\{X \in \mathbb{R}^3 / (2; -1; -1) \bullet (x_1; x_2; x_3) = 0\}.$

(v) $\text{gen}\{(2, 0, 1, -1); (-1, 1, 0, -2), (4, 0, 2, -2), (10, -4, 3, 5)\}$

(vi) $\{X \in \mathbb{R}^3 / X = \alpha \cdot (1, 1, -2) + \beta \cdot (-2, 3, -1) + \lambda \cdot (0, -1, 1) \text{ con } \alpha, \beta \text{ y } \lambda \text{ números reales}\}.$

(vii) $\{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X\}.$

IV.5.1. Coordenadas de un vector en una base

Sea el vector $(1, -1, 1)$ perteneciente a \mathbb{R}^3 ; podemos escribirlo como combinación lineal de algunas bases de \mathbb{R}^3 :

$$(1, -1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$$

$$(1, -1, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + (-2) \cdot (1, 1, 0) + 2 \cdot (1, 0, 0)$$

$$(1, -1, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + (-2) \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (1, 0, 0)$$

Verificar los cálculos y donde hemos supuesto que

$E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}; B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}; C = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ son bases de \mathbb{R}^3 (si tienen dudas pueden demostrarlo).

Los valores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ se denominan respectivamente las **coordenadas del vector**

$(1, -1, 1)$ en las bases **E, B y C.**

El vector $(1, -1, 1)$ **no varía** sino que lo que cambia es su expresión (la combinación lineal) respecto a la base que elijamos.

Ahora podemos entender porque hemos trabajado en \mathbb{R}^3 con la **base E** (llamada canónica o estándar⁶). **Porque en ella las coordenadas de un vector son iguales a sus componentes.**

Vamos a ver más tarde que elegida una base, las coordenadas de un vector quedan unívocamente determinadas (en lenguaje llano que las coordenadas de un vector en una base son únicas y propias de él).

Ejemplo 6

Compruebe que el conjunto $B = \{(2, -1, 1); (0, -1, 1); (1, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

Vamos a hallar las coordenadas del vector $(11, 1, 4)$ respecto a la base B.

Planteamos que $(11, 1, 4) = a \cdot (2, -1, 1) + b \cdot (0, -1, 1) + c \cdot (1, 0, 1)$ donde pretendemos obtener quiénes son a, b y c; resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 11 \\ -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 11 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \leftrightarrow f_1 \leftrightarrow f_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_1 + f_2 \\ f_1 + f_3 \end{matrix} \rightarrow \text{de donde}$$

obtenemos $c = 5$; $-2b + 5 = 13 \rightarrow b = -4$; $-a + 4 = 1 \rightarrow a = 3$; las coordenadas son 3, -4 y 5.

Anotaremos nuestro resultado de la siguiente manera:

$$X)_E = (11, 1, 4)_E$$

$$X)_B = (3, -4, 5)_B$$

Nota: Los subíndices en el lado derecho es una *elección pedagógica* nuestra para enfatizar en cuál base están indicadas las coordenadas; los diferentes textos de la materia prefieren la notación $X)_E = (11, 1, 4) \wedge X)_B = (3, -4, 5)$.

Actividad 10

a) Hallar las coordenadas de los vectores en las siguientes bases:

$$i) \vec{v} = (2, 3, 5), B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \in \mathbb{R}^3$$

$$ii) \vec{v} = (1, 0, -1, 2), B = \{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^4$$

$$iii) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

b) Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1 + v_2 - v_3; v_1 + v_2; v_1\}$ son bases de un e.v. V, obtener las coordenadas del vector $U = v_1 + 2v_2 + 3v_3$ en la base B'.

c) Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1 + v_2; v_2 + v_3; v_1 + v_2 - v_3\}$ son bases de un e.v. V y $(U)_{B'} = (1, 1, -1)_{B'}$. Hallar $U)_B$.

IV.5.2. Dimensión de un espacio vectorial (o subespacio)

Sabemos entonces que en un espacio vectorial trabajaremos con bases y que podemos encontrar muchas. Tenemos la intuición que **todas las bases tienen que tener la misma cantidad de vectores**, porque hemos visto que si les agregamos otros vectores éstos dejan de ser L.I. y se transforman en conjuntos generadores L.D. Demostremos nuestra hipótesis.

⁶ La base E $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ se denomina base canónica de \mathbb{R}^3 ; tenemos bases canónicas para \mathbb{R}^n y $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Todas las bases de un espacio vectorial (subespacio) tienen la misma cantidad de vectores.

Sea V un espacio vectorial y sean B y C dos bases del mismo, y supongamos que B tienen r vectores y C tiene s vectores (en principio suponemos que $r \neq s$, o sea lo contrario de lo que queremos demostrar –demostración por el absurdo (*reductio ad absurdum*)).

$$B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_r}\}; C = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \dots, \overrightarrow{v_s}\}$$

Planteamos una combinación lineal de los vectores de C igualada al vector nulo

$$\vec{c_1 v_1} + \vec{c_2 v_2} + \vec{c_3 v_3} + \dots + \vec{c_s v_s} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{12}\overrightarrow{u_2} + a_{13}\overrightarrow{u_3} + \dots + a_{1r}\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v_2} &= a_{21}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + a_{23}\overrightarrow{u_3} + \dots + a_{2r}\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v_3} &= a_{31}\overrightarrow{u_1} + a_{32}\overrightarrow{u_2} + a_{33}\overrightarrow{u_3} + \dots + a_{3r}\overrightarrow{u_r} \\ &\vdots \\ \overrightarrow{v_s} &= a_{s1}\overrightarrow{u_1} + a_{s2}\overrightarrow{u_2} + a_{s3}\overrightarrow{u_3} + \dots + a_{sr}\overrightarrow{u_r} \end{aligned} \quad (2)$$
$$c_1(a_{11}\overrightarrow{u_1}+a_{12}\overrightarrow{u_2}+a_{13}\overrightarrow{u_3}+...+a_{1r}\overrightarrow{u_r})+c_2(a_{21}\overrightarrow{u_1}+a_{22}\overrightarrow{u_2}+a_{23}\overrightarrow{u_3}+...+a_{2r}\overrightarrow{u_r})+c_3(a_{31}\overrightarrow{u_1}+a_{32}\overrightarrow{u_2}+a_{33}\overrightarrow{u_3}+...+a_{3r}\overrightarrow{u_r})+.....+c_s(a_{s1}\overrightarrow{u_1}+a_{s2}\overrightarrow{u_2}+a_{s3}\overrightarrow{u_3}+...+a_{sr}\overrightarrow{u_r})=\vec{0}$$
$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{s1}c_s)\overrightarrow{u_1} + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{s2}c_s)\overrightarrow{u_2} + (a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + \dots + a_{s3}c_s)\overrightarrow{u_3} + \dots + (a_{1r}c_1 + a_{2r}c_2 + \dots + a_{sr}c_s)\overrightarrow{u_r} = \vec{0} \quad (3)$$
$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + a_{31}c_3 + \dots + a_{s1}c_s &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3 + \dots + a_{s2}c_s &= 0 \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 + \dots + a_{s3}c_s &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1r}c_1 + a_{2r}c_2 + a_{3r}c_3 + \dots + a_{sr}c_s &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

número infinito de soluciones). Luego existen infinitas combinaciones (no solo la trivial nula) de los c_i que cumplen el sistema (4) y también la condición (1) por lo cual los vectores de C resultan ser L.D., lo que contradice la hipótesis.

Razonando de modo similar suponiendo que $s < r$, resulta ser que los vectores de B son L.D., contradiciendo la hipótesis.

Tejiendo el Algebra Lineal – Apunte III – Algebra & Geometría I – Dto. de Ingeniería – UNLAM – 179

Por lo tanto tampoco podrá ser que $s < r$.

Luego la única posibilidad es que $r = s$ y de esa manera queda probado que todas las bases de V tienen la misma cantidad de vectores. Q.E.D. (*Quod erat demonstrandum*) o sea "lo que se quería demostrar"

El teorema anterior nos permite definir lo siguiente:

Definición: Se llama **dimensión** de un espacio vectorial V (o de un subespacio S) al número de vectores que tiene cualquier base del mismo.

Ejemplo: la dimensión de R^3 es 3 pues cualquier base del mismo está conformada por 3 vectores L.I.

Actividad 11

a) Dar la dimensión de los siguientes espacios vectoriales: $R^{2 \times 2}$, $R^{3 \times 3}$, R^4 , R^{28} , $R^{15 \times 30}$

b) Suponiendo que el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo 2 –e incluyendo el polinomio nulo– con las operaciones normales de suma de polinomios y producto por un escalar sea un Espacio Vectorial.

¿Cuál es su dimensión?

¿Puede dar una base del mismo?

c) Ídem el ítem anterior pero para polinomios de grado a lo sumo 3.

d) Dar la dimensión de los subespacios A, B, C, D, E.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3} / \text{tr}(A) = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3} / a_{ij} = a_{ji} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3} / a_{ij} = -a_{ji} \right\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y + z = 0\}$$

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y + z = 0 \wedge 2x + y + z = 0\}$$

IV.5.3. Unicidad de las coordenadas de un vector en una base

Teorema⁸

Las coordenadas de un vector en una base son únicas

Demostración

La tesis del teorema es demasiado general, por lo tanto deberemos ir especificando algunas cosas. Si se habla de vectores y base significa que estamos trabajando en un espacio vectorial (sin especificar uno en particular).

Luego tenemos un espacio vectorial V de dimensión r o sea que una base cualquiera de V tiene r vectores linealmente independientes.

Entonces cualquier vector \vec{v} de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base (y queremos demostrar que los coeficientes de dicha combinación lineal, o sea las coordenadas del vector en esa base son únicas).

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_r\}$ base de V , luego existen a_i tal que

$$\vec{v} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3 + \dots + a_r \vec{u}_r$$

Suponemos (*reductio ad absurdum*) que existen otros b_i tal que

$$\vec{v} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3 + \dots + b_r \vec{u}_r$$

⁸ Ídem 5

Entonces

$$\begin{aligned} a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3 + \dots + a_r \vec{u}_r &= b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3 + \dots + b_r \vec{u}_r \\ (a_1 - b_1) \vec{u}_1 + (a_2 - b_2) \vec{u}_2 + (a_3 - b_3) \vec{u}_3 + \dots + (a_r - b_r) \vec{u}_r &= \vec{0} \end{aligned}$$

Pero los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_r\}$ son linealmente independientes por formar una base y por lo tanto la única solución posible es que los coeficientes sean todos nulos, luego

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = \dots = a_r - b_r = 0 \Rightarrow \\ a_1 &= b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_r = b_r \end{aligned}$$

Supusimos que las coordenadas no eran únicas y que existían otras que cumplían la misma condición pero éstas resultaron ser iguales a las primeras. Q.E.D. (*Quod erat demonstrandum*)

Observación importante

No siempre las coordenadas tienen valor numérico. Por ejemplo se puede pedir cuales con las coordenadas de un vector genérico de un espacio vectorial en una base determinada.

Supongamos que queremos las coordenadas de un vector genérico de \mathbb{R}^3 en la base $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

O sea pedimos

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \\ (x, y, z) &= (a+b+c, a+b, a) \Rightarrow \\ z &= a; \\ a+b &= y \Rightarrow z+b=y \Rightarrow b=y-z \\ a+b+c &= x \Rightarrow c=x-a-b=x-z-(y-z)= \\ c &= x-y \\ (x, y, z) &= z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0) \end{aligned}$$

También podríamos haber despejado resolviendo a través de operaciones elementales de

fila con la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array} \right)$ lo que sería mucho mas prolijo desde el punto de vista

matemático y que será necesario en otros ejemplos.

Actividad 12

Hallar las coordenadas de los vectores genéricos de los respectivos espacios vectoriales en las bases de los casos ii) y iii) de la actividad 11.

IV.5.4. Suma e Intersección de Subespacios.

Supongamos que tenemos dos subespacios T y S en un espacio vectorial V .

¿Cuáles serán las operaciones que podemos realizar con estos subespacios de tal forma que el resultado siga siendo un subespacio?

Los subespacios son en definitiva conjuntos del espacio vectorial V , por lo tanto podemos esperar que las operaciones habituales de unión e intersección de los subespacios, puede darnos por resultado un nuevo subespacio. Analicemos lo que ocurre con cada operación.

Unión

Ejemplo 7

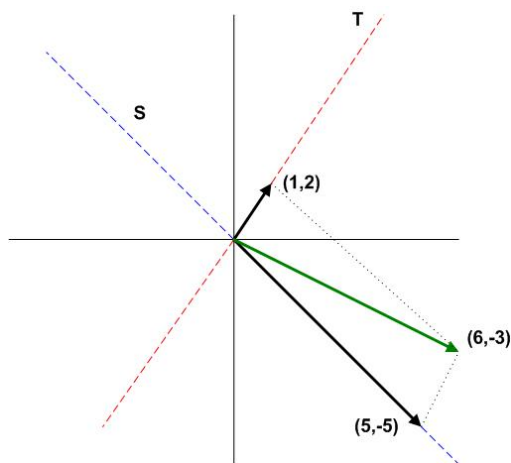
Sean en \mathbb{R}^2 los subespacios $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x-y=0\}$ y $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

La unión de T y S estará formada por todos los elementos que cumplen o bien una condición, o bien la otra, o ambas.

El vector $(1, 2)$ pertenece a T y el vector $(5, -5)$ pertenece a S, luego ambos vectores pertenecen a $T \cup S$.

¿Qué pasa si sumamos esos dos vectores?

El resultado es $(6, -3)$ que no cumple ninguna de las dos condiciones pues $2 \cdot 6 - (-3) = 15 \neq 0$ y $6 + (-3) = 3 \neq 0$. Hemos tomado dos elementos que pertenecen al conjunto $T \cup S$ y la suma de ambos *no sigue perteneciendo* a dicho conjunto; por lo tanto **$T \cup S$ no puede ser subespacio**. En definitiva con este contraejemplo probamos que la unión de dos subespacios no es (necesariamente) un subespacio.



Intersección

Sean ahora T y S subespacios de V.

¿Qué pasará con la intersección de los mismos?

i) Como ambos son subespacios, el elemento nulo de V pertenece a T y a S. Por lo tanto el elemento nulo de V pertenece a $T \cap S$.

ii) Sean \vec{u} y \vec{v} dos elementos que pertenecen a $T \cap S$; o sea pertenecen tanto a T como a S.

Si los sumamos $\vec{u} + \vec{v}$ pertenece a T pues al ser subespacio, la suma de dos elementos pertenecientes al mismo, da por resultado otro vector que también pertenece a T.

Razonando de igual forma respecto a S, resulta que $\vec{u} + \vec{v}$ también pertenece a S.

Luego $\vec{u} + \vec{v}$ pertenece a T y a S, por lo tanto pertenece a $T \cap S$.

iii) Sea \vec{u} un vector que pertenece a $T \cap S$. Si \vec{u} es multiplicado por un escalar k, el producto $k \cdot \vec{u}$ da por resultado otro vector que pertenece a T y a S. Luego $k \cdot \vec{u}$ pertenece a $T \cap S$.

En consecuencia, como cumple las tres condiciones que cumplen los subespacios, resulta que **la intersección de dos subespacios da por resultado otro subespacio**.

Como esta demostración la hemos hecho en forma genérica, no importando quien es V ni T ni S, resulta que esta aseveración es verdadera cualquiera sea el espacio vectorial y los subespacios involucrados.

Ejemplo 8

Sean en \mathbb{R}^3 los subconjuntos

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\} \wedge T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$ ambos son subespacios (probarlo) y tienen respectivamente como bases a $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ y $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$.

Luego $S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}$ y despejando resulta que los vectores que pertenecen a la intersección son de la forma $x = 0$; $y = z$.

$S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (0, y, y) = y(0, 1, 1)\}$ y la base de $S \cap T$ es el vector $(0, 1, 1)$

Suma

Dado que la unión de dos subespacios no es un subespacio, intentaremos hacer otra operación entre T y S que sí dé por resultado otro subespacio.

Definiremos la suma de T y S como:

$$T + S = \{\vec{v} \in V / \vec{v} = \vec{t} + \vec{s}, \vec{t} \in T, \vec{s} \in S\}$$

o sea que la suma de T con S está formada por todos los vectores del espacio vectorial que puedan expresarse como suma de un vector de T más un vector de S.

Demostraremos que esta operación genera un nuevo subespacio de V.

a) Como el elemento nulo pertenece a T y a S (ambos son subespacios) podemos suponer que el vector nulo de V se puede escribir de la siguiente manera $\vec{0} = \vec{0}_T + \vec{0}_S$, donde $\vec{0}_T$ y $\vec{0}_S$ son respectivamente el elemento nulo en T y en S (que obviamente es el mismo y coincide con el de V).

Entonces el elemento nulo de V es la suma de dos elementos, uno de T y otro de S y por ende el elemento nulo de V pertenece a T+S.

b) Tomemos ahora dos elementos de T + S, sean \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Como pertenecen a T + S deben existir

$$\vec{t}_1 \text{ y } \vec{t}_2 \in T \wedge \vec{s}_1 \text{ y } \vec{s}_2 \in S / \vec{v}_1 = \vec{t}_1 + \vec{s}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{t}_2 + \vec{s}_2$$

¿que pasa si efectuamos $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$?

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{t}_1 + \vec{s}_1 + \vec{t}_2 + \vec{s}_2 = (\vec{t}_1 + \vec{t}_2) + (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \vec{t}_3 + \vec{s}_3$$

Pues al ser T y S subespacios la suma de dos elementos que pertenecen al subespacio da por resultado otro elemento del subespacio.

Luego existen $\vec{t}_3 \wedge \vec{s}_3 / \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{t}_3 + \vec{s}_3$ y $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in T + S$

c) Por ultimo tomemos un vector que pertenezca a T + S y multipliquémoslo por un escalar y analicemos el resultado.

$$\vec{v} \in T + S, k \in \mathbb{R} \rightarrow \exists \vec{t} \in T \wedge \vec{s} \in S / \vec{v} = \vec{t} + \vec{s}$$

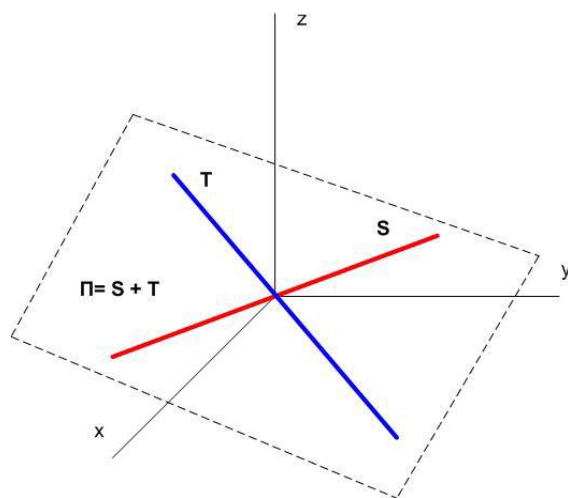
$$k \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{t} + \vec{s}) = k \cdot \vec{t} + k \cdot \vec{s} = \vec{t}' + \vec{s}', \vec{t}' \in T, \vec{s}' \in S \rightarrow$$

$$k \cdot \vec{v} \in T + S$$

Luego se ha demostrado que con la definición de suma de subespacios (T + S) se obtiene un subespacio.

¿Cuál será la expresión de la suma de dos subespacios?

Por ejemplo si en \mathbb{R}^3 tenemos dos rectas (T y S) que pasan por el origen de coordenadas. La suma de dichos subespacios resultan en todos los elementos que se pueden expresar como suma de los vectores de T más los vectores de S. El resultado es el plano que contiene a T y a S.



Ejemplo 9

Si tomamos los mismos subespacios del ejemplo anterior ,

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$ y buscamos los elementos que pertenecen a su suma, podemos ver que son los vectores de \mathbb{R}^3 ; esto es así porque los elementos de $S+T$ son los que podemos obtener por la suma de los elementos de S y los de T .

Pero eso es lo mismo que hacer la combinación lineal de los elementos de la forma $a.(1,1,0) + b.(0,1,1) + c.(1,0,2) + d.(0,1,1)$ donde los dos primeros términos de la combinación son los elementos de S y los dos segundos los de T .

Pero si eliminamos el último término porque se refiere a un vector que ya está tenido en cuenta en el segundo término, resulta que tenemos una combinación lineal de una base de \mathbb{R}^3 , por lo tanto los vectores que podemos lograr son todos los de \mathbb{R}^3 .

Otra forma de verlo es ubicar a los vectores como filas de una matriz y analizar su rango (o reducirla por Gauss o Gauss - Jordan).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 3, luego hay tres vectores linealmente independientes que, en \mathbb{R}^3 , conforman una base de dicho espacio vectorial y por lo tanto $T+S$ genera todo \mathbb{R}^3 .

IV.5.5.Relación entre las dimensiones de T , S , $T \cap S$ Y $S+T$

Ya sabemos que si T y S son subespacios , $T \cap S$ y $T + S$ son también subespacios , obviamente tienen bases que los generan y tienen determinadas sus dimensiones.

Podemos preguntarnos ¿existirá alguna relación entre la relación de T , S , $T \cap S$ y $T + S$?

Si T y S son subespacios de dimensión finita, la relación que se cumple es la siguiente:

$$\boxed{\dim (T + S) = \dim T + \dim S - \dim (T \cap S)} \text{ (sin demostración)}$$

Ejemplo 10

a) Si trabajamos en \mathbf{R}^2 y tenemos dos rectas que pasan por el origen (T y S). Si las rectas no son coincidentes el único vector que pertenece a la intersección es el nulo, por consiguiente la dimensión de $T \cap S$ es 0 y la dimensión de $T+S$ es 2, o sea coincide con \mathbf{R}^2 .

b) Sean ahora dos rectas no coincidentes que pasan por el origen en \mathbf{R}^3 . Nuevamente su intersección es el vector nulo y la dimensión de $T+S$ es 2 (un plano en \mathbf{R}^3 generado por ambas rectas).

c) Sean en \mathbf{R}^3 un plano y una recta que pasan por el origen y la recta no está incluida en el plano. La intersección vuelve a ser el vector nulo y la dimensión de $T+S$ resulta ser ahora 3, con lo cual coincide con \mathbf{R}^3 .

d) Sean en \mathbf{R}^3 dos planos no coincidentes que pasan por el origen. La intersección de ambos planos es una recta; entonces la dimensión de $T \cap S$ es 1 y la de $T+S$ resulta ser 3.

IV.5.6. Suma Directa

Diremos que un espacio vectorial \mathbf{V} es suma directa de dos de sus subespacios T y S si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\boxed{1) T + S = \mathbf{V} \qquad 2) T \cap S = \{\vec{0}_V\}}$$

La primera condición establece que la dimensión de $T + S$ es igual a la del espacio vectorial; la segunda indica que el único elemento común entre ambos subespacios es el elemento nulo.

En caso de que esto ocurra se escribe $T \oplus S = \mathbf{V}$, que se interpreta que el espacio vectorial es suma directa de T y S.

Los casos a) y c) del ejemplo 13 son situaciones de suma directa; en cambio en el caso d), a pesar que la suma de T y S genera al espacio vectorial, no constituye un ejemplo de suma directa.

¿Qué importancia tendrá que un espacio vectorial sea suma directa de dos de sus subespacios?

La respuesta está dada por el siguiente teorema:

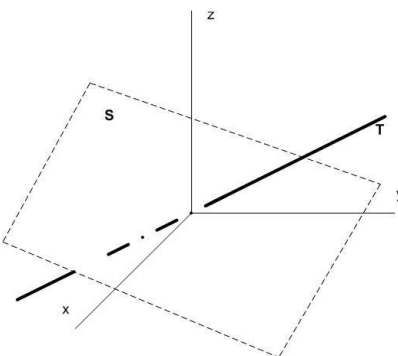
Teorema (sin demostración)

Sean T y S dos subespacios de un espacio vectorial \mathbf{V} . Las siguientes proposiciones son equivalentes (o sea si una es válida también lo es la otra)

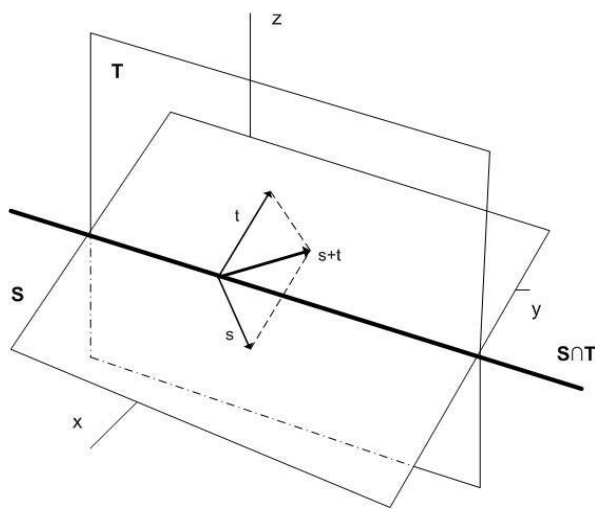
1) $\mathbf{V} = T \oplus S$

2) para todo vector \vec{v} de \mathbf{V} existe una *descomposición única* de la forma $\vec{v} = \vec{t} + \vec{s}, \vec{t} \in T, \vec{s} \in S$

Ejemplo 11



En este caso, todo vector de \mathbb{R}^3 va a poder escribirse como suma (única) de un vector de S más un vector de T



Aquí, dado un vector \vec{v} de \mathbb{R}^3 podremos encontrar **más** de un par de vectores de S y T tal que sumados den por resultado dicho vector \vec{v} .

Actividad 13

- 1) Sean en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ los siguientes subespacios, $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = a_{ji}\}$, $T = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = -a_{ji}\}$
 - i) hallar base y dimensión de cada uno
 - ii) analizar si $\mathbb{R}^{3 \times 3} = T \oplus S$. Justifique su respuesta
- 2) Encuentre si le es posible ejemplos de subespacios T y S tal que la suma de los mismos no de como resultado todo el espacio vectorial i) al que pertenecen
 - i) en \mathbb{R}^2 , ii) en \mathbb{R}^3 , iii) en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, iv) en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$,

IV.6. Transformaciones Lineales

En los apuntes I y II hemos hecho mención repetidas veces a las transformaciones lineales, como actúan y cuales son sus propiedades. Por lo tanto en esta sección nos limitaremos a *definirlas formalmente* y a avanzar un poco más en su tratamiento.

Definición

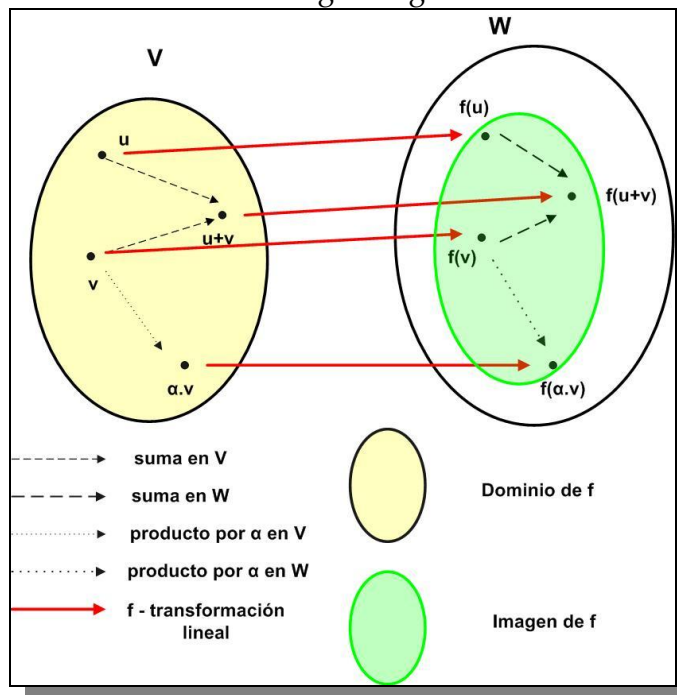
Una transformación lineal es una función f que va de un espacio vectorial V a otro espacio vectorial W y que cumple las siguientes condiciones:

$$f(\vec{u} +_V \vec{v}) = f(\vec{u}) +_W f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

$$f(\alpha \cdot_V \vec{v}) = \alpha \cdot_W f(\vec{v}), \forall \alpha \in K, \forall \vec{v} \in V$$

Donde hemos usado (por esta única vez porque en adelante lo daremos por *sobreentendido*) que hay una suma de los vectores \vec{u} y \vec{v} en el espacio vectorial V dentro del argumento de la función (sector izquierdo de la primera igualdad) y asimismo hay una suma en el espacio W de los transformados de dichos vectores. De igual manera se deben interpretar los subíndices en los productos presentes en la segunda igualdad (con K denominamos el cuerpo sobre el cual están definidos ambos espacios vectoriales V y W).

Esos conceptos se pueden visualizar en la figura siguiente:



Como hemos definido que f es una función, debe cumplir las dos condiciones que la caracterizan⁹, a saber: debe poder ser aplicada a todos los elementos del conjunto de partida (dominio, en nuestro caso el espacio vectorial V) y para cada elemento del dominio le debe corresponder uno y solo un elemento transformado en el conjunto de llegada (codominio, en nuestro caso el espacio vectorial W). Vemos también que es posible que los elementos transformados no cubran a todo W sino a un subconjunto del mismo, al que nosotros llamaremos **imagen de f** (en Análisis se lo suele también llamar rango de f ; pero nosotros llamamos rango a otro concepto).

IV.6.1. Propiedades de una Transformación Lineal

a) $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

⁹ Para el concepto de función remitirse a cualquier libro de Análisis I o en su defecto al apunte del Curso de Admisión.

Sabemos por la definición que $f(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{v})$, luego si hacemos

$\alpha = 0 \Rightarrow f(0 \cdot \vec{v}) = f(\vec{0}_V) = 0 \cdot \vec{w} = \vec{0}_W$. Por lo tanto una transformación lineal transformará siempre al elemento nulo de V en el elemento nulo de W (lo cual no impide que otros elementos de V sean transformados en el elemento nulo de W , que sea una función no impide que varios elementos del dominio sean transformados en el mismo elemento del codominio)¹⁰

*Atención pido al silencio
Y silencio a la atención
Que voy en esta ocasión
Si me ayuda la memoria
A contarles que a mi historia
Le faltaba lo mejor.
"La vuelta de Martín Fierro" – José Hernández – 1872*

Lo que hemos demostrado es que si f es T.L. $\Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. Esto (como ocurrió con los subespacios) es una implicación cierta (verdadera), por lo que también es válida su contrarrecíproca o sea:

$$\text{si } f(\vec{0}_V) \neq \vec{0}_W \Rightarrow f \text{ NO es T.L.}$$

que es un **excelente mecanismo para testear antes de trabajar si un f es o no T.L.**

b) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V$

Por la misma condición anterior si $\alpha = -1 \Rightarrow f((-1) \cdot \vec{v}) = f(-\vec{v}) = (-1) \cdot f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$

c) $f(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{u}) + b \cdot f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a, b \in K$

Resulta de aplicar sucesivamente las dos propiedades que cumplen las transformaciones lineales.

Ejemplo 12

Ya hemos trabajado algunas transformaciones lineales ligadas a aspectos geométricos fáciles de investigar. Vamos a analizar ahora una transformación lineal (si bien no difícil) que modifica a los vectores de una manera un poco más compleja.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$

En primer lugar deberíamos demostrar que es una transformación lineal.

Vemos que cumple con $f(0,0) = (0,0)$ o sea transforma el nulo de partida en el nulo de llegada. Sean

$$\begin{aligned} (x, y) \wedge (x', y') \in \mathbb{R}^2 &\rightarrow (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ f(x + x', y + y') &= ((x + x') - (y + y'), 2(x + x') - 2(y + y')) = \\ &= (x + x' - y - y', 2x + 2x' - 2y - 2y') = (x - y, 2x - 2y) + (x' - y', 2x' - 2y') = \\ &= f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

y

¹⁰ Más adelante retomaremos este tema.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge k \in \mathbb{R} \rightarrow k(x, y) = (kx, ky)$$

$$f(kx, ky) = (kx - ky, 2kx - 2ky) = k(x - y, 2x - 2y) = k \cdot f(x, y)$$

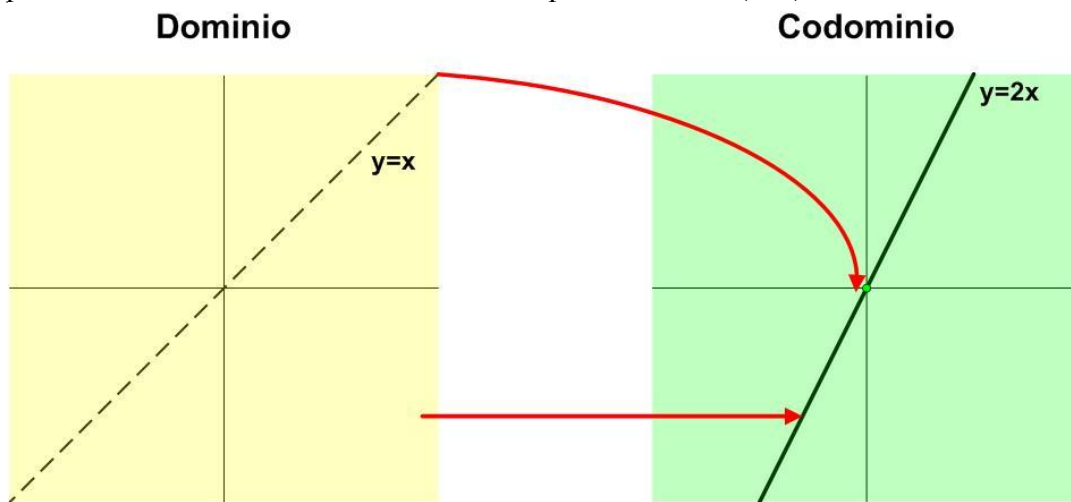
Luego hemos demostrado que es T.L.

¿Qué es lo que hace esta transformación?

Probemos con algunos vectores:

$$f(1,2) = (-1,-2); \quad f(1,1) = (0,0); \quad f(2,1) = (1,2); \quad f(5,5) = (0,0); \quad f(128,115) = (13, 26).$$

Si analizamos con más detenimiento las componentes del vector transformado vemos que la segunda componente es el doble de la primera, por lo cual, la segunda componente tomará como valor el doble de la diferencia entre la primer y segunda componente del vector del dominio (separamos dominio y codominio aunque sea el mismo). Para aquellos vectores de \mathbb{R}^2 que tienen igual componente, su transformado es el (0, 0) mientras que para cualquier otro, su transformado será un múltiplo del vector (1, 2).



Como vemos todos los elementos que están sobre la recta $y=x$ van a terminar en el (0,0) mientras que el resto del dominio va a terminar en la recta $y=2x$.

Con lo primero podemos verificar que además del elemento nulo de partida, en una transformación lineal pueden existir otros elementos que se transformen en el elemento nulo de llegada. Al conjunto de todos esos elementos lo llamamos **núcleo** de la transformación (obviamente que ese conjunto no es vacío porque el elemento nulo de partida siempre pertenece).

Como señalamos antes, al conjunto de los elementos del codominio “alcanzados” por la transformación, es decir que existen elementos del espacio vectorial de partida que al transformarse terminan en esos elementos “alcanzados” del espacio vectorial de llegada, la llamamos **imagen** de la transformación.

IV.6.2. Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Definición: Sea f una transformación lineal de V en W (ambos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K)

Llamamos **Núcleo de f** a: $Nu(f) = \{ \vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{0}_w \}$ e

$$\text{imagen de } f: \text{Im } g(f) = \{\vec{w} \in W / \exists \vec{v} \in V \wedge f(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

En el ejemplo anterior resulta $Nu(f) = \{(x, y) \in R^2 / y = x\}$, $\text{Im } g(f) = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\}$

Actividad 14

Determinar si las siguientes son T.L.

$$f_1: R^2 \rightarrow R^3 / f(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$$

$$f_2: R^2 \rightarrow R^2 / f(x, y) = (x + y - 1, x - y + 2, 2x + 3y)$$

$$f_3: R^4 \rightarrow R^3 / f(x, y, z, w) = (x + y - z, x + y + 2w, -x - y + z + w)$$

$$f_4: R^{2 \times 2} \rightarrow R^2 / f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = (a_{11} + a_{22}, a_{12} + a_{21})$$

$$f_5: R^4 \rightarrow R^{2 \times 2} / f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x - y - z & 2y + z + w \\ x - w & 2z - w \end{pmatrix}$$

El Núcleo y la Imagen de una T.L. son subespacios

Vamos a demostrar dos teoremas¹¹ que aseguran que si $f: V \rightarrow W$ es una T.L. entonces:

(a) El Núcleo de f es un subespacio de V .

(b) La Imagen de F es un subespacio de W .

a) Recordemos la definición del núcleo: $Nu(f) = \{\vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$

Para demostrar que Núcleo de f es un subespacio de V tenemos que demostrar que cumple las tres propiedades de un subespacio, a saber:

i) ¿ $\vec{0}_V \in Nu(f)$? Por supuesto porque como f es T.L. cumple que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

ii) Sean

$$\vec{u}, \vec{v} \in Nu(f) \rightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_W \wedge f(\vec{v}) = \vec{0}_W, \text{ por lo tanto la suma de dos vectores del Núcleo de } f \text{ también}$$

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W$$

pertenece al Núcleo de f

iii) Sean :

$$\vec{u} \in Nu(f) \wedge k \in K \rightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_W,$$

$$f(k\vec{u}) = kf(\vec{u}) = k.\vec{0}_W = \vec{0}_W,$$

por lo tanto el múltiplo de un vector que pertenece al Núcleo de f es también un vector del Núcleo de f .

b) Recordemos la definición de la imagen: $\text{Im } g(f) = \{\vec{w} \in W / \exists \vec{v} \in V \wedge f(\vec{v}) = \vec{w}\}$

i) ¿ $\vec{0}_W \in \text{Im } g(f)$?

Sí, porque como la T.L. se tiene que aplicar sobre todos los vectores de V , en particular sobre el $\vec{0}_V$, como ya sabemos $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, entonces existe al menos un elemento en V ($\vec{0}_V$) tal que su transformado es el $\vec{0}_W$, y de esa manera $\vec{0}_V$ pertenece a la $\text{Im } g(f)$

ii) Sean

¹¹ Idem 5

$$\begin{aligned}\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im } g(f) &\rightarrow \exists \vec{v}_1 \in V / f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 \wedge \exists \vec{v}_2 \in V / f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 \\ \vec{w}_1 + \vec{w}_2 &= f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_3) \rightarrow \\ \exists \vec{v}_3 \in V / f(\vec{v}_3) &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rightarrow (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in \text{Im } g(f)\end{aligned}$$

iii) Sean

$$\begin{aligned}\vec{w} \in \text{Im } g(f) \wedge k \in K &\rightarrow \exists \vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{w} \\ k.\vec{w} &= k.f(\vec{v}) = f(k.\vec{v}) = f(\vec{v}') \rightarrow \\ \exists \vec{v}' \in V / f(\vec{v}') &= k.\vec{w} \rightarrow k.\vec{w} \in \text{Im } g(f)\end{aligned}$$

Observación importante

Como tanto el $\text{Nu}(f)$ como $\text{Im}(f)$ son subespacios (uno de V y el otro de W) tendrán bases y por lo tanto se puede calcular sus respectivas dimensiones.

Ejemplo 13

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x + y, y + z, 2x + 3y + z)$. Hallar $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(F)$

Para hallar el $\text{Nu}(f)$ hacemos $(x+y, y+z, 2x+3y+z) = (0, 0, 0)$. Eso nos da un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas a resolver por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde surge que $z = -y$ y $x = -y$; luego todos los $(x, y, z) \in \text{Nu}(f)$ son de la forma $(-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$.

O sea es un subespacio generado por el vector $(-1, 1, -1)$ (base del $\text{Nu}(f)$ y de dimensión 1.)

Podremos decir que $\text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y \wedge z = -y\}$ – que es una recta que pasa por el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 .

Busquemos ahora la $\text{Im}(f)$.

Todos los vectores de la imagen son de la forma:

$$(x + y, y + z, 2x + 3y + z) = x.(1, 0, 2) + y.(1, 1, 3) + z.(0, 1, 1)$$

Se trata de un subespacio generado por los vectores $\{(1, 0, 2), (1, 1, 3), (0, 1, 1)\}$; analicemos su independencia por el método corto.

La matriz que resulta, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, no es otra que la transpuesta de la que utilizamos para

hallar el $\text{Nu}(f)$, la cual tenía rango 2 (una fila se hacía nula) y lo mismo pasará con esta (podríamos hacer nula la tercer columna); eso nos indica que los tres vectores son L.D. y de ellos podremos elegir dos que generan a la $\text{Im}(f)$ y son L.I., por ejemplo $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ (podrían haber sido otros dos cualesquiera).

Luego esa será base de la $\text{Im}(f)$ y ésta tienen dimensión 2.

¿Cuál serán las ecuaciones que cumplen los elementos de la $\text{Im}(f)$?

Como ese subespacio está generado por dos vectores en \mathbb{R}^3 , la $\text{Im}(f)$ será un plano y tendremos que contar con solo una ecuación.

Todos los vectores de la $\text{Im}g(f)$ serán de la forma $a.(1,0,2) + b.(0,1,1)$ (repito que se podrían haber elegido otros dos).

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Im } g(f) &\rightarrow (x, y, z) = a(1, 0, 2) + b(0, 1, 1) \rightarrow \\ x = a, y = b, z = 2a + b &\rightarrow z = 2x + y \rightarrow 2x + y - z = 0 \\ \text{Im } g(f) &= \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y - z = 0\}\end{aligned}$$

IV.6.2.1. Otra forma de hallar la imagen

Para obtener la imagen debiéramos aplicar la transformación a todos los vectores del espacio vectorial de partida –en este caso R^3 – pero son infinitos; no obstante como todos los vectores de ese espacio vectorial se pueden escribir como combinación lineal de una base del mismo, podemos estudiar cómo actúa la transformación lineal sobre los vectores de la base. Elegimos para ello la base más simple o sea la canónica o estándar $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$$\begin{aligned}f(1,0,0) &= (1,0,2) \\ f(0,1,0) &= (1,1,3) \\ f(0,0,1) &= (0,1,1)\end{aligned}$$

y volvemos a encontrar a los mismos tres vectores.

Los vectores de la base canónica permiten generar a cualquier vector de R^3 y sus transformados generan a cualquier vector de la $\text{Im}g(f)$.

Por supuesto que **los primeros son L.I. mientras que los segundos pueden no serlo** (como en este caso) y deberemos analizar su independencia lineal.

Observación importante

El ejemplo anterior nos da idea de otra forma de expresar a una T.L. Como se tiene que aplicar sobre todos los vectores del espacio vectorial de partida V , es posible expresar a una T.L. sobre una base de dicho espacio, porque en definitiva cualquier vector de V se podrá expresar como una combinación lineal única de los vectores de la base. De igual forma entonces, los transformados de los vectores de la base de partida serán los que generen la imagen de la T.L.

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V (obviamente de dimensión n) y sea $f: V \rightarrow W$ una T.L. tal que:

$$\begin{aligned}f(\vec{v}_1) &= \vec{w}_1 \\ f(\vec{v}_2) &= \vec{w}_2 \\ f(\vec{v}_3) &= \vec{w}_3 \\ &\dots\dots\dots \\ f(\vec{v}_n) &= \vec{w}_n\end{aligned}$$

Donde los $\{\vec{w}_i\}$ (transformados de los $\{\vec{v}_i\}$) no son necesariamente L.I.) pertenecen al espacio vectorial W que puede tener otra dimensión diferente de la de V .

Ahora

$$\begin{aligned} \forall \vec{v} \in V, \exists \{a_i\} \in K, i=1, \dots, n(\text{únicos}) \rightarrow \\ \vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \vec{v}_n. \\ f(\vec{v}) = f(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \vec{v}_n) = \\ = a_1 f(\vec{v}_1) + a_2 f(\vec{v}_2) + a_3 f(\vec{v}_3) + \dots + a_n f(\vec{v}_n) = \vec{w} \rightarrow \\ \vec{w} \in \text{Img}(f) \end{aligned}$$

Esto nos indica que la transformación lineal queda perfectamente definida si determinamos como actúa sobre los vectores de una base de partida (cualquiera esa ella) y además que los transformados de los vectores de la base $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ son **generadores de la $\text{Img}(f)$** , pues cualquier vector que pertenece a la $\text{Img}(f)$ se escribe como combinación lineal de dichos vectores.

Luego si seleccionamos del conjunto $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ los que sean linealmente independientes tendremos una base de la $\text{Img}(f)$.

Actividad 15

- i) Halle bases y dimensión del núcleo y la imagen de las transformaciones lineales de la actividad 14 e indique las ecuaciones que cumplen cada uno de ellos.
- ii) Para cada caso realice la suma $\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Img}(f)$ y compare el resultado final con la $\dim V$.¹²

IV.7. Clasificación de las transformaciones lineales

Como las T.L. son funciones les corresponde la misma clasificación de éstas; la recordaremos aquí brevemente¹³.

Las funciones pueden ser clasificadas en *inyectivas*, *sobreyectivas* (o *surjectivas*) y *biyectivas*.

Una función es *inyectiva* si a dos elementos diferentes del dominio le corresponden dos elementos diferentes en el codominio (o al revés, si dos elementos transformados que están en el codominio coinciden, entonces los elementos del dominio que los generaron son los mismos).

Sintéticamente, si $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$. Equivalentemente si $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

Una función es *sobreyectiva* si la imagen cubre a todo el codominio.

Luego $\forall y \in \text{cod}(f) \rightarrow \exists x \in \text{dom}(f) / f(x) = y$

Una función es *biyectiva* si es a la vez *inyectiva* y *sobreyectiva*. Las funciones biyectivas tienen una función inversa.

¹² Lo desarrollaremos teóricamente más adelante.

¹³ Idem 7.

En el caso de las transformaciones lineales la clasificación es la misma pero se adoptan otros nombres:

<i>inyectiva</i>	\rightarrow	<i>monomorfismo</i>
<i>sobreyectiva</i>	\rightarrow	<i>epimorfismo</i>
<i>biyectiva</i>	\rightarrow	<i>isomorfismo</i>

¿Cómo podemos clasificar una T.L.?

IV.7.1. Monomorfismo

Como debe ser inyectiva se debe cumplir que dos elementos distintos del espacio vectorial de partida deben relacionarse con dos elementos distintos del espacio vectorial de llegada. Pero como es T.L sabemos que siempre se cumple que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, o sea que *el único elemento que podrá relacionarse con el elemento neutro del espacio vectorial de llegada es el elemento neutro del espacio vectorial de partida, luego* $Nu(f) = \{\vec{0}_V\}$

Demostración formal¹⁴

f es monomorfismo $\Leftrightarrow Nu(f) = \{\vec{0}_V\}$

$$\forall \vec{x} \in Nu(f) \rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}_W, \text{ pero}$$

\Rightarrow Si f es monomorfismo \rightarrow Sea $\vec{0}_V \in Nu(f) \rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \rightarrow \vec{x} = \vec{0}_V \rightarrow$

$$Nu(f) \subseteq \{\vec{0}_V\}$$

\Leftarrow Si $Nu(f) = \{\vec{0}_V\}$, sean $\vec{x}, \vec{y} \in V / f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_W \rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_W \rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) \in Nu(f) \rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_V \rightarrow \vec{x} = \vec{y} \rightarrow$ lo que significa que f es

monomorfismo.

IV.7.2. Epimorfismo

La imagen de f debe “cubrir” a todo W eso ocurre si **dim Img(f) = dim W**.

IV.7.3. Isomorfismo

Cuando es monomorfismo y epimorfismo.

Comentario

Una manera alternativa de poder discernir si una T.L. $f: V \rightarrow W$ es **isomorfismo** es que los vectores transformados de una base de V determinen una base en W.

Ejemplo 14

Clasificar la T.L. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 & -x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_2 & x_3 - x_4 \end{pmatrix}$

Para ver si es monomorfismo debemos ver si la dimensión del núcleo es mayor a cero; calculemos entonces al núcleo.

¹⁴ Idem 5.

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 & -x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_2 & x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = x_4; x_2 = x_4; x_1 = x_2 \text{ (luego } x_1 = x_4).$$

Reemplazando en $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ queda $x_4 - 2x_4 + x_4 = 0$ la cual se verifica para todo x_4 real.

$X_{\text{Nu}(f)} = (x_4, 2x_4, x_4, x_4) = x_4 \cdot (1, 2, 1, 1) \rightarrow \dim[\text{Nu}(f)] = 1 \rightarrow$ **no es un monomorfismo**.

Veamos la dimensión de la imagen (debe ser $2 \times 2 = 4$ para cubrir todo el espacio vectorial de llegada).

Recordemos que la imagen está generada por los transformados de una base cualquiera del espacio vectorial de salida (como ser la canónica).

$$f(e_1) = f((1, 0, 0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; f(e_2) = f((0, 1, 0, 0)) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; f(e_3) = f((0, 0, 1, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f(e_4) = f((0, 0, 0, 1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para ver que subespacio es el generado por la imagen (y cuál su dimensión) podemos pensar la siguiente asignación “uno a uno”:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow (a, b, c, d)$$

Triangulamos así a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ 2f_1 + f_2 \\ -f_1 + f_3 \\ f_4 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 + f_4 \\ f_3 + f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 + f_4 \\ f_3 + f_4 \end{matrix}$$

De esto último surge que la $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ y **no es epimorfismo**.

Además una base de la imagen de f es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Actividad 16

Clasificar a todas las T.L. de la actividad 14.

IV.8. Teorema Fundamental de las transformaciones lineales¹⁵

Demostraremos este teorema del cual utilizaremos a menudo sus consecuencias

Si $f: V \rightarrow W$ es T.L. se cumple que $\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim V$

Que es lo que ustedes han tenido que realizar en el punto ii) de la actividad 15.

Se cumple que la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen de una T.L. da por resultado la dimensión del espacio vectorial de partida.

¹⁵ Idem 5.

Demostración

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_r\}$ una base del Núcleo de f que está incluido en un espacio vectorial V de dimensión $n \geq r$. Siempre será posible ampliar dicha base B a una base de todo el espacio vectorial agregándole $(n-r)$ vectores L.I. entre sí y con los anteriores.

Luego sea $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\}$, donde los primeros r vectores forman la base del núcleo de f y los segundos $(n-r)$ se han agregado para conformar una base de V .

Entonces

$$\begin{aligned} \forall \vec{v} \in V, \exists \{a_i\} \in K, i=1, \dots, n (\text{únicos}) \rightarrow \\ \vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_r \vec{v}_r + a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n. \\ f(\vec{v}) = f(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_r \vec{v}_r + a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n) = \\ = a_1 f(\vec{v}_1) + a_2 f(\vec{v}_2) + a_3 f(\vec{v}_3) + \dots + a_r f(\vec{v}_r) + a_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) + a_{r+2} f(\vec{v}_{r+2}) + \dots + a_n f(\vec{v}_n) = \\ = a_1 \cdot \vec{0}_W + a_2 \cdot \vec{0}_W + a_3 \cdot \vec{0}_W + \dots + a_r \cdot \vec{0}_W + a_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) + a_{r+2} f(\vec{v}_{r+2}) + \dots + a_n f(\vec{v}_n) = \\ = a_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) + a_{r+2} f(\vec{v}_{r+2}) + \dots + a_n f(\vec{v}_n) = \vec{w} \in \text{Img}(f) \end{aligned}$$

Hemos utilizado que la transformación f aplicada a los vectores de la base del núcleo da por resultado el vector nulo del espacio W y que por consiguiente lo que queda después de operar es un vector perteneciente a la $\text{Img}(f)$.

De aquí surge que los transformados de los vectores que agregamos para completar la base de V , o sea

$\{f(\vec{v}_j)\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$ es un conjunto generador de la $\text{Img}(f)$ (cualquier elemento de la $\text{Img}(f)$

se escribe como combinación lineal de ellos y no sabemos si son L.I.).

Ahora vamos a demostrar que $\{f(\vec{v}_j)\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$ sí es L.I.

¿Cómo podemos hacerlo?

Como siempre, planteando una combinación lineal de ellos igualada al vector nulo del espacio al que pertenecen y analizar los valores de los coeficientes.

$$\begin{aligned} a_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) + a_{r+2} f(\vec{v}_{r+2}) + \dots + a_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}_W \rightarrow \\ f(a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n) = \vec{0}_W \rightarrow \\ (a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n) \in \text{Nu}(f) \rightarrow \\ (a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n) = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_r \vec{v}_r \end{aligned}$$

Donde hemos igualado una combinación lineal de los $\{f(\vec{v}_j)\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$ al vector nulo del

espacio vectorial de llegada (que es donde pertenecen), hemos aplicado el concepto de T.L. (f lo es) y

agrupando a toda la combinación lineal de los vectores $\{\vec{v}_j\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$ como argumento de

la transformación e igualado a $\vec{0}_W$, por lo que implica que el argumento de la transformación pertenece al

$\text{Nu}(f)$ y luego expresado a dicho argumento como combinación lineal de los vectores de la base del $\text{Nu}(f)$.

Ahora si:

$$\begin{aligned} (a_{r+1} \vec{v}_{r+1} + a_{r+2} \vec{v}_{r+2} + \dots + a_n \vec{v}_n) = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_r \vec{v}_r \rightarrow \\ a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_r \vec{v}_r - a_{r+1} \vec{v}_{r+1} - a_{r+2} \vec{v}_{r+2} - \dots - a_n \vec{v}_n = \vec{0}_V \\ \text{Como } \{\vec{v}_i\}, i=1, 2, 3, \dots, n \text{ es L.I. (por ser base de } V) \rightarrow \\ a_1 = a_2 = \dots = a_r = a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_n = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto todos los coeficientes deben ser nulos y en particular los $\{a_j\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$, luego $\{f(\overline{v_j})\}, j = r+1, r+2, r+3, \dots, n$ es L.I. y como generan $\text{Img}(f)$ son una base de la $\text{Img}(f)$.
Luego $\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Img}(f) = r + (n - r) = r + n - r = n = \dim V$.

Resumiendo:

$$\boxed{\dim \text{Nu}(f) + \dim \text{Img}(f) = \dim V}$$

IV.9. Matriz representativa de una Transformación Lineal

Entre las diferentes formas de representar a una T.L. vamos a introducir otra que será desarrollada en extenso en la materia Álgebra y Geometría Analítica II, pero que para su comprensión serán muy importantes los conceptos que enunciaremos aquí.
Por simplicidad trabajaremos solamente con las bases canónicas o estándar de cada espacio vectorial. Veamos una situación.

Ejemplo 15

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una T.L. tal que $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y + z \\ 2x + z & y - z \end{pmatrix}$ (el que dude que es T.L. puede demostrarlo, en un parcial puede ser solicitado)
Podemos aplicarle la T.L. a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 y expresar sus transformados como combinación lineal de la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(0, 1, 0) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(0, 0, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde le hemos aplicado la transformación lineal a los vectores de la base canónica de partida (**respetando el orden en los vectores de la misma**) y expresado los vectores transformados en la base canónica de llegada (**respetando el orden de los vectores de la misma**)

Ahora acomodemos los coeficientes logrados en forma de columna de una matriz, respetando el orden de aparición.

A esta matriz la llamaremos matriz representativa de la transformación en las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las dimensiones de esta matriz son 4×3 o sea *tiene tantas filas como dimensión del espacio vectorial de llegada* ($\mathbb{R}^{2 \times 2}$) y *tantas columnas como dimensión del espacio vectorial de partida* (\mathbb{R}^3).

Busquemos el $\text{Nu}(f)$, este estará formado por los vectores de \mathbb{R}^3 que hacen que la matriz

$$\begin{pmatrix} x-y & y+z \\ 2x+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sea que resulta que $x = y$, $z = y$, $z = -y$, $z = -2x = -2y$.

Para que todas estas condiciones se cumplan es evidente que el único vector del $\text{Nu}(f)$ es el $(0,0,0)$; luego la $\dim \text{Nu}(f) = 0$ (la T.L. es monomorfismo) y la dimensión de la $\text{Img}(f) = 3$ (por aplicación del teorema anterior)

Por lo tanto la $\text{Img}(f)$ estará generada por tres matrices 2×2 L.I. En particular por la combinación lineal que hemos armado anteriormente y que queda expresada en las columnas de la matriz representativa.

Vemos que el rango de dicha matriz es 3 (o sea que coincide con la $\dim \text{Img}(f)$) y que los elementos de sus columnas son los coeficientes que multiplican a los vectores de la base de llegada en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y generan de esa manera a los vectores de la $\text{Img}(f)$

Además si multiplicamos a dicha matriz por las coordenadas genéricas de un vector de \mathbb{R}^3 , nos da como resultado

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x+z \\ y-z \end{pmatrix}$$

Que son las coordenadas genéricas de un vector perteneciente a la imagen de f , ordenados según la base que hemos elegido para el espacio vectorial de llegada.

Si por otro lado hubiésemos planteado $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para hallar el $\text{Nu}(f)$ y

hubiésemos reducido por Gauss a la matriz representativa, obtendríamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)f_1 + f_3 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_4 \rightarrow f_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_4 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_3 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + f_2 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y resulta obvio que podemos eliminar a la última fila y que por reducción de Gauss se llega a la solución $x = y = z = 0$ y el vector del $\text{Nu}(f)$ es el $(0,0,0)$

Resumiendo:

La matriz representativa de una T.L. expresada en una base canónica de partida y una canónica de llegada:

- a) Tiene tantas filas como dimensión del espacio vectorial de llegada y tantas columnas como el espacio vectorial de partida.
- b) El rango de la matriz coincide con la $\dim \text{Im}(f)$
- c) Los elementos de las columnas de la matriz son los coeficientes que multiplican a los vectores de la base de llegada y de esa manera **generan la $\text{Im}(f)$** . Si tomamos solamente las columnas L.I. lo que lograremos con la combinación lineal será la base de la $\text{Im}(f)$
- d) Reduciendo por Gauss la matriz obtendremos la relación que cumplen los vectores del $\text{Nu}(f)$
- e) Si nos dan la expresión de la matriz y multiplicamos por las coordenadas genéricas del espacio vectorial de partida, obtendremos la forma explícita de la transformación lineal.

Ejemplo 16

En el apunte II, pág. 126 se ha presentado la transformación lineal (desplazamiento lateral o cizalladura):

$$T_4: \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

Observemos que $T_4(1,0) = (1,0)$ y $T_4(0,1) = (2,1)$; así la matriz de la transformación en las

bases canónicas será $M(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y por ende $T_4(x_1, x_2) = A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Si hacemos la cuenta obtenemos nuevamente $T_4(X) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Para obtener $T_4(-3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Si queremos hallar el núcleo debemos realizar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ del cual resulta un

sistema homogéneo cuya única solución es $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

Imagen de $T_4 = \text{gen}\{(1, 0), (2, 1)\} = \mathbb{R}^2$.

Formas de expresar una Transformación Lineal

Por lo tanto a partir de ahora una transformación lineal entre un espacio vectorial V y otro W podrá ser expresada:

- a) Por su forma explícita (es decir indicando como actúa sobre las coordenadas genéricas de V)
- b) Sabiendo cómo actúa sobre una base de V.
- c) Conociendo su matriz representativa entre las bases canónicas de V y W.

IV.10. Rango de una matriz

Demostraremos formalmente que el rango fila y el rango columna de una matriz coinciden, por lo tanto hablaremos simplemente del rango de la matriz.¹⁶

¹⁶ Idem 5

Teorema: Los rangos fila y columna de una matriz son iguales

Demostración

Tengamos $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ –sin perder generalidad trabajamos sobre el cuerpo de los reales– y sea

$\rho_C(A)$ el rango columna de A , y $\rho_F(A)$ el rango fila de A

Queremos demostrar que $\rho_C(A) = \rho_F(A)$

Si A es la matriz nula es evidente que los rangos son iguales. Supondremos entonces que A no es la matriz nula

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1r+k} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ir+1} & \dots & a_{ir+k} & \dots & a_{im} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1r} & a_{i+1r+1} & \dots & a_{i+1r+k} & \dots & a_{i+1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & a_{nr+1} & \dots & a_{nr+k} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Tomemos al rango columna de A igual a r , $\rho_C = r \leq m$. Podemos suponer (sin perder la generalidad) que las columnas linealmente independientes de A son las r primeras.

Si escribimos a la matriz en forma de vectores columnas, resulta

$A = (A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 2} \ \dots \ A_{\cdot r} \ \dots \ A_{\cdot r+k} \ \dots \ A_{\cdot m})$, donde las $A_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, (el punto en el subíndice indica la fila), son las columnas de A

Ahora como A tiene m columnas y hemos supuesto que las primeras r son L.I. (luego son una base del subespacio de las columnas de A), ello significará que las restantes $(m-r)$ columnas se podrán escribir como combinación lineal de ellas, o sea

$A_{\cdot r+k} = \alpha_{1k} A_{\cdot 1} + \alpha_{2k} A_{\cdot 2} + \alpha_{3k} A_{\cdot 3} + \dots + \alpha_{rk} A_{\cdot r}$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots, m-r$ (1), de donde surge por ejemplo que la columna $r+1$ se escribe como:

$$\begin{pmatrix} a_{1r+1} \\ \dots \\ \dots \\ a_{ir+1} \\ \dots \\ \dots \\ a_{nr+1} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ \dots \\ a_{i2} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \alpha_{31} \begin{pmatrix} a_{13} \\ \dots \\ \dots \\ a_{i3} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n3} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{r1} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \dots \\ \dots \\ a_{ir} \\ \dots \\ \dots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

De donde surge que el elemento a_{ir+1} queda escrito como combinación lineal de otros k elementos:

$a_{ir+1} = \alpha_{11} a_{i1} + \alpha_{21} a_{i2} + \alpha_{31} a_{i3} + \dots + \alpha_{r1} a_{ir}$. Y en general resulta

$$a_{ir+k} = \alpha_{1k} a_{i1} + \alpha_{2k} a_{i2} + \alpha_{3k} a_{i3} + \dots + \alpha_{rk} a_{ir}, \forall k = 1, 2, 3, \dots, m-r$$

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ la base canónica de \mathbb{R}^m

Dado que las filas de A son vectores de \mathbb{R}^m (tienen m componentes) \rightarrow (2)

$A_{\cdot i} = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + a_{i3} \vec{e}_3 + \dots + a_{ir} \vec{e}_r + \dots + a_{im} \vec{e}_m$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r, \dots, n$, donde $A_{\cdot i}$ indica la fila i

De (1) y (2) resulta que

$$\begin{aligned}
A_i &= a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + a_{i3}\vec{e}_3 + \dots + a_{ir}\vec{e}_r + (\alpha_{11}a_{i1} + \alpha_{21}a_{i2} + \alpha_{31}a_{i3} + \dots + \alpha_{r1}a_{ir})\vec{e}_{r+1} + \\
&+ (\alpha_{12}a_{i1} + \alpha_{22}a_{i2} + \alpha_{32}a_{i3} + \dots + \alpha_{r2}a_{ir})\vec{e}_{r+2} + \dots + \\
&+ (\alpha_{1m-r}a_{i1} + \alpha_{2m-r}a_{i2} + \alpha_{3m-r}a_{i3} + \dots + \alpha_{rm-r}a_{ir})\vec{e}_m = \\
&a_{i1}(\vec{e}_1 + \alpha_{11}\vec{e}_{r+1} + \alpha_{12}\vec{e}_{r+2} + \dots + \alpha_{1m-r}\vec{e}_m) + a_{i2}(\vec{e}_2 + \alpha_{21}\vec{e}_{r+1} + \alpha_{22}\vec{e}_{r+2} + \dots + \alpha_{2m-r}\vec{e}_m) + \\
&+ a_{i3}(\vec{e}_3 + \alpha_{31}\vec{e}_{r+1} + \alpha_{32}\vec{e}_{r+2} + \dots + \alpha_{3m-r}\vec{e}_m) + \dots + \\
&+ a_{ir}(\vec{e}_r + \alpha_{r1}\vec{e}_{r+1} + \alpha_{r2}\vec{e}_{r+2} + \dots + \alpha_{rm-r}\vec{e}_m) = a_{i1}\vec{e}_1' + a_{i2}\vec{e}_2' + a_{i3}\vec{e}_3' + \dots + a_{ir}\vec{e}_r'
\end{aligned}$$

Donde $\vec{e}_i', i = 1, 2, 3, \dots, r$ surge de las combinaciones encerradas en los paréntesis

Luego $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \dots, \vec{e}_r'\}$ es un sistema de generadores de las filas de A.

Entonces si $\rho_F(A) = s \Rightarrow s \leq r$ pues el número de filas L.I. de A no puede superar al número de vectores de un conjunto generador de las mismas.

Pero por otro lado, razonando a partir de las filas de A (en lugar de las columnas como hemos hecho hasta aquí) se llega a que $r \leq s$. Y en consecuencia resulta que la única solución posible es $r = s$ o sea

$\rho_C(A) = \rho_F(A)$, lo que significa que el rango columna de una matriz y su rango fila coinciden.

IV.11. Teorema de Rouche – Fröbenius¹⁷

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es condición necesaria y suficiente que el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (incorporando los términos independientes) sean iguales.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

Dado el sistema lineal de ecuaciones: que se puede

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

expresar como
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow Ax = B$$

Donde A es una matriz mxn, x es una matriz nx1 y B una matriz mx1 (por simplicidad asumiremos que todas son reales).

Existe al menos una solución x (puede haber más de una) si la columna de términos independientes B resulta ser combinación lineal del subespacio generado por las columnas de A. Luego existirán coeficientes que multiplicando a las sucesivas columnas de A darán por resultado la columna B.

Ello implica que la matriz

¹⁷ Idem 5

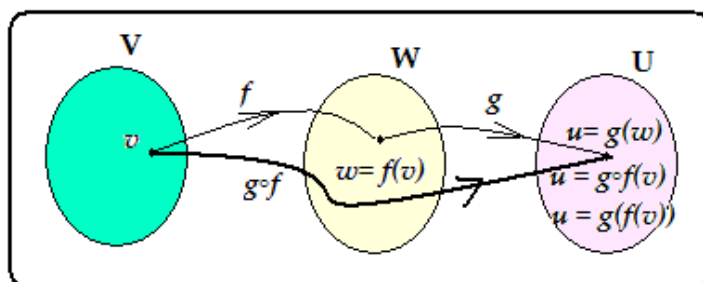
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow (A | B) = A'$$

que está formada por la matriz de coeficientes a la cual le hemos agregado la columna de términos independientes, cumple que el rango de la de coeficientes y la de la ampliada sean iguales (si no fuera así la columna independiente sería L.I. con las columnas de A y no existiría solución del sistema).

Esto también puede ser interpretado en términos de transformaciones lineales porque si el sistema es compatible (determinado o indeterminado) surge que B debe pertenecer a la transformación lineal representada por la matriz A, luego las columnas de A deben generar la $\text{Im}(f)$ a la cual debe pertenecer B y por lo tanto el rango de A y A' coinciden.

IV.12 Composición de transformaciones lineales.

Si $f: V \rightarrow W$ y $g: W \rightarrow U$ son transformaciones lineales entre los espacios vectoriales V, W y U respectivamente definimos la **composición** $g \circ f: V \rightarrow U$ a aquella *transformación lineal* dada por $g \circ f(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$.



Que $g \circ f$ es una TL. es sencillo de probar:

$$a) \ g \circ f(\vec{v} + \vec{v}') = g[f(\vec{v} + \vec{v}')] = g[f(\vec{v}) + f(\vec{v}')] = g[f(\vec{v})] + g[f(\vec{v}')] = g \circ f(\vec{v}) + g \circ f(\vec{v}')$$

pues f es TL. pues g es TL.

$$b) \ g \circ f(k \cdot \vec{v}) = g[f(k \cdot \vec{v})] = g[k \cdot f(\vec{v})] = k \cdot g[f(\vec{v})] = k \cdot g \circ f(\vec{v})$$

f es TL. g es TL.

Ejemplo 17

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas como:

$$f(\vec{v}) = f((v_1, v_2)) = (v_1 - v_2; 2v_2; v_1 + v_2) \wedge g(\vec{w}) = g((w_1, w_2, w_3)) = (-w_1 + w_2 + 3w_3; 2w_1 - w_2 - w_3).$$

Calculemos $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h = g \circ f$; quedará para el lector efectuar $j = f \circ g$ que en este caso particular puede realizarse.

$$h((v_1, v_2)) = g \circ f((v_1, v_2)) = g(v_1 - v_2; 2v_2; v_1 + v_2) =$$

$$h((v_1, v_2)) = (-(v_1 - v_2) + 2v_2 + 3 \cdot (v_1 + v_2); 2 \cdot (v_1 - v_2) - 2v_2 - (v_1 + v_2))$$

$$h((v_1, v_2)) = (2v_1 + 6v_2; v_1 - 5v_2)$$

Verifiquemos con un vector cualquiera \vec{v} como ser $(-2; 4)$:

$$f((-2; 4)) = (-6; 8; 2); g((-6; 8; 2)) = (20; -22); h((-2; 4)) = (-4 + 24; -2 - 5 \cdot 4) = (20; -22).$$

Hemos comprobado una *única situación*; esto **no significa** que no nos hemos equivocado al hacer las cuentas pero nos da un poco más de seguridad.

IV.12.1. Matriz de la composición en las bases canónicas.

$f: V \rightarrow W$ y $g: W \rightarrow U$ T.L. y sean $M(f)$ y $M(g)$ las matrices de las transformaciones en las bases canónicas de los respectivos espacios vectoriales [si E, E' y E'' son las bases canónicas de V, W y U anotamos a $M(f) = M_{EE'}(f)$ y $M(g) = M_{E'E''}(g)$].

La matriz de la T.L. $h: V \rightarrow U$ dada por $h = g \circ f$ es la siguiente:

$$M(h) = M_{EE''}(h) = M(g).M(f) = M_{E'E''}(g).M_{EE'}(f)$$

Esto es bastante natural; dado un vector $\vec{v} \in V$ resulta que:

$$\begin{aligned} \vec{w}_{E'} = (f(\vec{v}))_{E'} = M_{EE'}(f). \vec{v}_E \quad \wedge \quad \vec{u}_{E''} = (g(\vec{w}))_{E''} = M_{E'E''}(g). \vec{w}_{E'} \rightarrow \\ \vec{u}_{E''} = M_{E'E''}(g). M_{EE'}(f). \vec{v}_E = M(h). \vec{v}_E \rightarrow M(h) = M_{E'E''}(g). M_{EE'}(f) \end{aligned}$$

Calculemos la matriz de la composición $h = g \circ f$ para el último ejemplo.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; M(h) = M(g).M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente resulta que $h(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 6v_2 \\ v_1 - 5v_2 \end{pmatrix}$ (y coincide con la expresión calculada por definición).

$$\text{Además si } j = f \circ g \rightarrow M(j) = M(f).M(g) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Actividad 17

Dadas $f(x,y,z) = (x-y; 2y-z; z-x-y)$ y $g(x; y; z) = (x+y; z)$ obtener tanto por definición como matricialmente a $h = g \circ f \wedge j = f \circ g$.

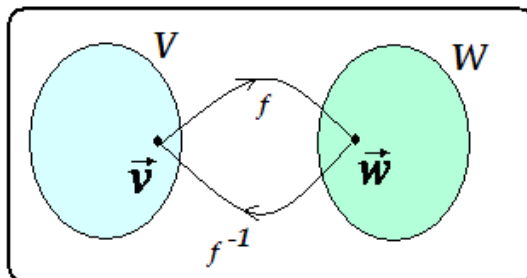
Como usted crea conveniente calcule el núcleo y la imagen de h y j .

Nota: normalmente la variables toman el nombre x, y, z , etc. pero en este caso conviene que usted reescriba a g como $g(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; x_3)$ para no confundirse al intentar componer por definición.

IV.13. Inversa de una transformación lineal.

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal **isomórfica** entonces existe una transformación que llamamos inversa de f y anotaremos como $f^{-1}: W \rightarrow V$ que cumple con:

$$f^{-1} \circ f(\vec{v}) = \vec{v} \text{ para todo } \vec{v} \in V \text{ y } f \circ f^{-1}(\vec{w}) = \vec{w} \text{ para todo } \vec{w} \in W.$$



Veamos un primer *ejemplo* sencillo: dada $g(x,y) = (x-2y; x+y)$ calculemos su inversa. Probemos que es un isomorfismo. Para eso recordemos que la transformación mediante g de una base de V (en este caso \mathbb{R}^2) nos debe producir una base de W (aquí \mathbb{R}^2); por comodidad utilizamos la canónica.

$g((1; 0)) = (1; 1)$ y $g((0; 1)) = (-2; 1)$; $(1; 1)$ y $(-2; 1)$ son linealmente independientes y al estar en \mathbb{R}^2 constituyen una base de W . Luego g es un isomorfismo.

Para obtener la inversa disponemos de tres opciones:

(i) La más sencilla es **definir** g^{-1} como la transformación lineal **a una base** que verifique:

$$g^{-1}((1; 1)) = (1; 0) \wedge g^{-1}((-2; 1)) = (0; 1)$$

(ii) **Por definición** (tal vez la más engorrosa).

Sea $g(X) = Y$ (X e Y en \mathbb{R}^2); aquí uno presupone que conoce X y a través de la expresión de g obtiene a Y . En cambio con la transformación inversa uno parte de Y para obtener X .

En nuestro caso sabemos que $g(X) = (x_1 - 2x_2; x_1 + x_2) = (y_1; y_2) = Y$

Tenemos el sistema de ecuaciones $S: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \end{cases}$ donde las incógnitas son x_1 y x_2 siendo

y_1 e y_2 datos.

$$\text{Matricialmente } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \frac{y_2 - y_1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 + 2\frac{y_2 - y_1}{3} \\ \frac{y_2 - y_1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } x_1 = \frac{y_1 + 2y_2}{3} \wedge x_2 = \frac{y_2 - y_1}{3}; X = g^{-1}(Y) = \boxed{g^{-1}(y_1; y_2) = \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3}; \frac{y_2 - y_1}{3} \right)}.$$

Verifiquemos que la expresión alcanzada satisface $g^{-1}((1; 1)) = (1; 0) \wedge g^{-1}((-2; 1)) = (0; 1)$.

$$g^{-1}(1; 1) = \left(\frac{1+2 \cdot 1}{3}; \frac{1-1}{3} \right) = (1; 0) \wedge g^{-1}(-2; 1) = \left(\frac{-2+2 \cdot 1}{3}; \frac{1-(-2)}{3} \right) = (0; 1)$$

(iii) Utilizando la **matriz de la transformación inversa**. Para eso avancemos con la lectura.

IV.13.1. Matriz de la transformación inversa en las bases canónicas.

Sea $f: V \rightarrow W$ isomorfismo entonces existe $f^{-1}: W \rightarrow V$ tal que

$$f^{-1} \circ f(\vec{v}) = \vec{v} \text{ para todo } \vec{v} \in V \text{ y } f \circ f^{-1}(\vec{w}) = \vec{w} \text{ para todo } \vec{w} \in W.$$

Tomemos $f^{-1} \circ f(\vec{v}) = \vec{v}$; si $h = f^{-1} \circ f$ la expresión es $h(\vec{v}) = \vec{v}$ y matricialmente (si H es la matriz de h) es $H.v = v$ pero el lado derecho puede “pensarse” como $I_v.v = v$ donde I_v es la matriz identidad en el espacio vectorial de salida.

$$H.v = I_v.v \rightarrow H = I_v \text{ pero como } h = f^{-1} \circ f \text{ resulta } I = H = M(f^{-1}). M(f) \rightarrow \boxed{M(f^{-1}) = [M(f)]^{-1}}$$

Volvemos al ejemplo del apartado anterior.

$$\text{Si } g(X) = (x_1 - 2x_2; x_1 + x_2) \rightarrow M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; M(g^{-1}) = \frac{\left[\text{adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^T}{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } g^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1 + 2y_2}{3} \\ \frac{-y_1 + y_2}{3} \end{pmatrix} \text{ que coincide con la expresión obtenida}$$

anteriormente.

Actividad 18

(i) Dada $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2; -x_2; x_1 + x_3)$.

Compruebe que f es un isomorfismo; obtenga $M(f^{-1})$ y a partir de ella la expresión de f^{-1} .

¿Quién es $f^{-1}(3; -2; 5)$?

(ii) Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dada $f(x_1, x_2, x_3) = (kx_1 + x_3; 3x_1 + kx_2; x_1 - 2x_2 + x_3)$.

a- Encuentre todos los valores de k real para los cuales f es un isomorfismo.

b- Para cada valor de k donde no resulta f inversible obtenga el núcleo y la imagen.

c- Para $k = 1$ obtenga $M(f^{-1})$.

IV.14. Ejercitación desarrollada –y con algunos comentarios teóricos–

$$(I) \text{ Dado en } \mathbb{R}^4 \text{ el conjunto } S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\} \text{ se pide:}$$

a) Probar que es un subespacio.

Vamos a escribir a los vectores de S momentáneamente como vectores columnas o sea $X \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ de tal manera que matricialmente un elemento de S debe cumplir que $A \cdot X = O$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ y } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos que se cumplen las tres condiciones para que S sea un subespacio.

$$i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ efectivamente da } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si $X, Y \in S$, ¿ocurrirá que $X+Y \in S$?

Que $X \in S$ significa que $A \cdot X = O$; por ende $Y \in S \rightarrow A \cdot Y = O$

$A \cdot (X+Y) = A \cdot X + A \cdot Y = O + O = O$ (hemos usado distributiva del producto de matrices respecto de la suma).

$\rightarrow X+Y \in S$ ya que $A.(X+Y) = O$.

iii) Si $X \in S \wedge \lambda \in \mathbb{R}$, ¿ocurrirá que $\lambda.X \in S$?

Como $X \in S \rightarrow A.X = O$.

$A.(\lambda.X) = (A. \lambda).X = (\lambda.A).X = \lambda.(A.X) = \lambda.O = O$ sucesivamente se ha extraído el escalar λ del vector λX , se lo ha “distribuido” a la matriz A –producto de una matriz por un escalar), se lo ha “extraído” de la matriz $(\lambda.A)$ y para finalizar utilizamos la propiedad asociativa.

Luego $A.(\lambda.X) = O$ y $\lambda.X \in S$.

Finalmente se cumplen i), ii) y iii). S es un subespacio.

b) Hallar un conjunto G de generadores de S .

Investigar si G es una base de S y si no lo fuera extraer de G un conjunto de vectores que si lo sea.

Como un elemento de S es un vector que es solución de un sistema de ecuaciones vamos a triangularlas para quedarnos con la menor cantidad de ecuaciones independientes –podrían existir ecuaciones redundantes–.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2 + f_3 \rightarrow f_3 \end{matrix}$$

Del sistema surge que $x_3 = -2x_2$, $x_1 = -x_3 + x_4 = 2x_2 + x_4$ (hemos despejado así para no trabajar con fracciones no obstante hay varias opciones).

Entonces un vector genérico de S es de la forma:

$$\vec{v}_S = (2x_2 + x_4; x_2; -2x_2; x_4) = (2x_2; x_2; -2x_2; 0) + (x_4; 0; 0; x_4) = x_2.(2; 1; -2; 0) + x_4.(1; 0; 0; 1).$$

O sea que un vector cualquiera de S es combinación lineal de los vectores $(2; 1; -2; 0)$ y $(1; 0; 0; 1)$.

Así un conjunto de generadores de S es $G = \{(2; 1; -2; 0), (1; 0; 0; 1)\}$.

Comprobamos que G es una base de S . Utilizamos ambos métodos –por única vez–: el método largo (ml) y el método corto (mc) –generalmente optaremos por este último–.

(ml) Planteamos la combinación lineal de los vectores de G que nos dé por resultado el vector nulo y debiera ocurrir que la única solución posible es que los escalares resulten ser cero.

$$\alpha.(2; 1; -2; 0) + \beta.(1; 0; 0; 1) = (0; 0; 0; 0) \rightarrow (2\alpha; \alpha; -2\alpha; 0) + (\beta; 0; 0; \beta) = (0; 0; 0; 0) \rightarrow$$

$$(2\alpha + \beta; \alpha; -2\alpha; \beta) = (0; 0; 0; 0) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ -2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases};$$

ya que $\alpha = \beta = 0$ la primera ecuación se satisface. Luego los vectores son LI y G resulta ser una base de S.

(mc) Se procede a ubicar por filas a los vectores de G y se triangulan. Si finalizado el escalonamiento algún (o algunos) vectores se anula(n) los vectores son LD y los vectores que aparecen al finalizar la triangulación nos suministran una base de S.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \leftrightarrow f_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 - f_1 \end{matrix} \rightarrow f_2$$

Al no anularse ninguno de los vectores finalizado el escalonamiento los vectores originales son LI y coincidentemente con lo explicado G resulta ser base de S.

Por lo tanto $\boxed{\dim(S) = 2}$

Comentarios

• Observemos que efectivamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Además como $\vec{v}_S = \alpha \cdot (2; 1; -2; 0) + \beta \cdot (1; 0; 0; 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- El escalonamiento nos suministra otra base de S que es $H = \{(1; 0; 0; 1), (0; 1; -2; -2)\}$.
- En el ejemplo se trata de mostrar los procedimientos más usados pero en nuestro caso la independencia lineal era evidente pues ninguno de los dos vectores es nulo y uno de ellos no es múltiplo del otro –es imposible conseguir a partir del “segundo” cero del vector $(1; 0; 0; 1)$ el uno de la posición x_2 en el vector $(2; 1; -2; 0)$.

• El **rango fila** de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha resultado ser 2.

Suced que la dimensión del conjunto solución (o sea de S) es igual al:

número de incógnitas – el rango fila de A.

En nuestro caso $\dim S = 4 - 2 = 2$ lo cual concuerda con nuestro resultado.

c) Dado el subespacio $T = \text{gen}\{(-2; 1; 0; 1), (1; 1; -1; 0), (1; 0; 1; 2), (0; 2; 0; 3)\}$.
 Hallar una base de T y su dimensión.
 Obtener $S \cap T$ y $S+T$ señalando bases de cada uno de estos subespacios.

Triangulemos los vectores de T para quedarnos con los LI; ordenemos de acuerdo a nuestro gusto en pos de la sencillez del escalonamiento.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \\ 2f_1 + f_4 \rightarrow f_4 \end{matrix} \quad \text{reordenamos las filas}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_2 + f_3 \rightarrow f_3 \\ -2f_2 + f_4 \rightarrow f_4 \end{matrix} \quad \text{y la última fila se anula.}$$

Se tiene Base de T : $B_T = \{(1; 0; 1; 2), (0; 1; -2; -2), (0; 0; 4; 7)\}$; $\boxed{\dim(T) = 3}$

Vamos a obtener $S \cap T$.

Recordemos que tenemos a S determinado por dos ecuaciones (una era redundante):

$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ y un vector \vec{t} genérico de T será combinación lineal de los vectores de su base.

$$\vec{t} = a \cdot (1; 0; 1; 2) + b \cdot (0; 1; -2; -2) + c \cdot (0; 0; 4; 7) = (a; b; a - 2b + 4c; 2a - 2b + 7c)$$

Si un vector \vec{t} quiere pertenecer a S debe cumplir con todas las ecuaciones de S :

$$(1) \ a + a - 2b + 4c - (2a - 2b + 7c) = 0 \rightarrow 2a - 2b + 4c - 2a + 2b - 7c = 0 \rightarrow -3c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$(2) \ 2b + a - 2b + 4c = 0 \rightarrow a + 4c = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$$

Entonces $\vec{t} \in S$ (y era de T) si $a = 0$ y $c = 0$; un vector genérico $\vec{v}_{S \cap T} = b \cdot (0; 1; -2; -2)$.

Resulta entonces que una base $B_{S \cap T} = \{(0; 1; -2; -2)\}$ y $\dim(S \cap T) = 1$.

A continuación abordamos $S+T$; para ello debemos utilizar generadores de S y de T —si partimos con bases de cada subespacio trabajaremos menos—.

Luego triangulamos a todos los vectores.

$S+T = \text{gen}\{(1; 0; 0; 1), (0; 1; -2; -2), (1; 0; 1; 2), (0; 1; -2; -2), (0; 0; 4; 7)\}$ —los dos primeros vectores corresponden al conjunto H base de S y los restantes a la base B_T —.

Al repetirse el segundo vector lo utilizamos una única vez.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \xrightarrow{-f_1 + f_3 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \xrightarrow{-4f_3 + f_4 \rightarrow f_4}$$

Nos han quedado 4 vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^4 o sea que la suma es el espacio vectorial.

Así que una base de $S+T$ podría ser $B_{S+T} = \{(1; 0; 0; 1), (0; 1; -2; -2), (0; 0; 1; 1), (0; 0; 0; 3)\}$ pero cualquier otra hubiera servido –por ejemplo la canónica–.

Comentarios

• Comprobemos el teorema de la dimensión:

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) \rightarrow 4 = 2 + 3 - 1 \rightarrow 4 = 4$$

• El ejercicio no lo pide pero, ¿cuáles son las ecuaciones lineales cuya solución corresponde al subespacio T ?

Recuperamos que un genérico de T es $\vec{t} = (x_1; x_2; x_3; x_4) = a \cdot (1; 0; 1; 2) + b \cdot (0; 1; -2; -2) + c \cdot (0; 0; 4; 7)$ y nosotros precisamos obtener qué condiciones deben tener las coordenadas x_1, x_2, x_3 y x_4 para que existan a, b y c reales y así exista la combinación lineal que nos dé \vec{t} .

$(x_1; x_2; x_3; x_4) = (a; b; a - 2b + 4c; 2a - 2b + 7c)$; tenemos un sistema de tres incógnitas (a, b y c) y cuatro ecuaciones cuya matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -2 & 4 & x_3 \\ 2 & -2 & 7 & x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 4 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -2 & 7 & -2x_1 + x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \\ -2f_1 + f_4 \rightarrow f_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & -x_1 + x_3 + 2x_2 \\ 0 & 0 & 7 & -2x_1 + x_4 + 2x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2f_2 + f_3 \rightarrow f_3 \\ 2f_2 + f_4 \rightarrow f_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & -x_1 + x_3 + 2x_2 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{4}(-x_1 + x_3 + 2x_2) - 2x_1 + x_4 + 2x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \xrightarrow{-\frac{7}{4}f_3 + f_4 \rightarrow f_4}$$

La última ecuación nos llevará a una inconsistencia a menos que $-\frac{7}{4}(-x_1 + x_3 + 2x_2) - 2x_1 + x_4 + 2x_2 = 0$

$$\text{O sea } \frac{7x_1 - 7x_3 - 14x_2 - 8x_1 + 4x_4 + 8x_2}{4} = 0 \rightarrow -x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0$$

Luego

$$T = \{ \vec{t} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / -x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \}$$

Corroboremos que los vectores de la base satisfacen la única ecuación:

$$(1; 0; 1; 2): -1 - 6 \cdot 0 - 7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -1 - 7 + 8 = 0 \quad \checkmark$$

$$(0; 1; -2; -2): -0 - 6 \cdot 1 - 7 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = -6 + 14 - 8 = 0 \quad \checkmark$$

$$(0; 0; 4; 7): -0 - 6 \cdot 0 - 7 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = -28 + 28 = 0 \quad \checkmark$$

d) Utilizando el sistema S:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$
 escribirlo como una combinación lineal de vectores y obtener una base generado por ellos.

El sistema permite la siguiente representación alternativa:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que hemos llegado al punto donde se pretende analizar la dependencia e independencia lineal de los vectores $(1; 0; 1)$, $(0; 2; -2)$, $(1; 1; 0)$, y $(-1; 0; -1)$.

Comentarios

Salta a la vista que no pueden ser linealmente independientes pues en \mathbb{R}^3 (aquí están los vectores) ningún conjunto LI tiene más de tres vectores –todas las bases del espacio tienen tres vectores–.

Notar que adicionalmente estamos analizando el **rango columna** de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

El vector $(-1; 0; -1)$ es opuesto al $(1; 0; 1)$ y por lo tanto los cuatro vectores ya son LD; para extraer una base sacamos del escalonamiento $(-1; 0; -1)$ pues la información que nos suministra es redundante a la del $(1; 0; 1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \div 2 \\ f_3 + (-1)f_1 \rightarrow f_3 \end{matrix} \rightarrow \text{y como las últimas dos filas son iguales}$$

la última se anula.

Luego una base es $\{(1; 0; 1), (0; 1; -1)\}$; como la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^3

generado es podríamos haber elegido a dos vectores iniciales LI o sea

$\{(1; 0; 1), (0; 2; -2)\}$ o $\{(1; 1; 0), (-1; 0; -1)\}$ entre muchos ejemplos.

Además el rango columna resultó ser 2; como debe suceder $\text{rg}(A) = \text{rgf}(A) = \text{rgc}(A) = 2$

e) Utilizando la matriz A del sistema S defina la transformación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(i) Demuestre que es una transformación lineal.

(ii) Encuentre bases del núcleo y de la imagen de f.

(iii) Compruebe el Teorema de la dimensión.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ definimos a } f(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Probemos que es una TL; para eso debe suceder:

$$\begin{aligned} \text{(a) Si } X \text{ y } X' \in \mathbb{R}^{4 \times 1} &\rightarrow f(X+X') = f(X) + f(X') \\ f(X+X') &= A.(X+X') = A.X + A.X' = f(X) + f(X') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } X \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} &\rightarrow f(\lambda X) = \lambda.f(X) \\ f(\lambda X) &= A.(\lambda X) = (A.\lambda).X = \lambda.(A.X) = \lambda f(X) \end{aligned}$$

$$\text{El núcleo de } f \text{ son todos los } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar estos X es idéntico a obtener los elementos de S ya obtenidos en el ítem b del ejercicio.

Base del Núcleo de $f = B_{\text{Nu}(f)} = \{(2; 1; -2; 0), (1; 0; 0; 1)\}; \dim(\text{Nu}(f)) = 2.$

Analicemos la Imagen de f .

Las columnas de A generan la imagen de f puesto que si transformamos la base canónica del espacio vectorial de salida (\mathbb{R}^4) obtenemos a dichos vectores columnas.

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; & f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Im } f = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y en el punto d) hemos triangulado los vectores}$$

obteniendo una base.

$$\text{Base de la Imagen de } f = B_{\text{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

El teorema de la dimensión en TL dice: $\dim(V) = \dim(\text{Nu}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \rightarrow 4 = 2 + 2 \quad \checkmark$

(II) Sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que cumple con:

$$g(1,1,-1) = (0, 1, 1); g(1,0,2) = (4, -3, 1); g(0,1,0) = (-1, 1, 0)$$

a) Obtener la expresión de g para todo vector (x_1, x_2, x_3)

La expresión de g será única si los vectores $(1,1,-1)$, $(1,0,2)$ y $(0,1,0)$ conforman una base; para eso debemos triangularlos (ordenamos a nuestra conveniencia).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{son LI}$$

Para obtener la expresión debemos escribir al vector genérico (x_1, x_2, x_3) como combinación lineal de los vectores $(1,1,-1)$, $(1,0,2)$ y $(0,1,0)$; esto es:

$$(x_1, x_2, x_3) = a.(1,1,-1) + b.(1,0,2) + c.(0,1,0) = (a+b, a+c, -a+2b) \rightarrow a+b = x_1; a+c = x_2; -a+2b = x_3$$

Planteamos el sistema matricialmente y resolvemos por Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & | & x_2 \\ -1 & 2 & 0 & | & x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -x_1 + x_2 \\ 0 & 3 & 0 & | & x_1 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -x_1 + x_2 - \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & | & \frac{-x_1 - x_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & x_1 + \frac{-x_1 - x_3}{3} \\ 0 & -1 & 0 & | & \frac{-x_1 - x_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2x_1 - x_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{x_1 + x_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix}$$

y despejamos a , b y c obteniendo:

$$a = \frac{2x_1 - x_3}{3}$$

$$b = \frac{x_1 + x_3}{3}$$

$$c = \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3}$$

En $(x_1, x_2, x_3) = a.(1,1,-1) + b.(1,0,2) + c.(0,1,0)$ aplicamos g a ambos miembros,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= g(a.(1,1,-1) + b.(1,0,2) + c.(0,1,0)) = \\ &= g(a.(1,1,-1)) + g(b.(1,0,2)) + g(c.(0,1,0)) = a.g(1,1,-1) + b.g(1,0,2) + c.g(0,1,0) = \\ &= a.(0, 1, 1) + b.(4, -3, 1) + c.(-1, 1, 0) = (4b - c; a - 3b + c; a + b) = \end{aligned}$$

$$\left(4 \cdot \frac{x_1 + x_3}{3} - \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3}; \frac{2x_1 - x_3}{3} - 3 \cdot \frac{x_1 + x_3}{3} + \frac{-2x_1 + 3x_2 + x_3}{3}; \frac{2x_1 - x_3}{3} + \frac{x_1 + x_3}{3} \right) =$$

$$\left(\frac{6x_1 - 3x_2 + 3x_3}{3}; \frac{-3x_1 + 3x_2 - 3x_3}{3}; \frac{3x_1}{3} \right) = (2x_1 - x_2 + x_3; -x_1 + x_2 - x_3; x_1)$$

$$\boxed{g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3; -x_1 + x_2 - x_3; x_1)}$$

Le sugerimos que revea todo el desarrollo antes de proseguir.

La primera cuestión es, ¿estarán bien las cuentas?

La comprobación es muy sencilla:

$$g(1, 1, -1) = (2-1-1; -1+1-(-1); 1) = (0; 1; 1) \quad \checkmark$$

$$g(1, 0, 2) = (2-0+2; -1+0-2; 1) = (4; -3; 1) \quad \checkmark$$

$$g(0, 1, 0) = (0-1+0; -0+1-0; 1) = (-1; 1; 1) \quad \checkmark$$

b) Encuentre la matriz A de la transformación lineal (matriz en las bases canónicas).
A partir de ella obtenga $g(2; -5; 1)$ y los $X \in R^3 / g(X) = (5; -2; 3)$

Recordemos que la matriz A es aquella que tiene en la primera columna el transformado del (1; 0; 0), la segunda columna el del (0; 1; 0) y la tercera el del (0; 0; 1).

$$g(1, 0, 0) = (2; -1; 1); \quad g(0, 1, 0) = (-1; 1; 0); \quad g(0, 0, 1) = (1; -1; 0)$$

$$\text{Así } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Notar que } g(X) = A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ que nos devuelve la}$$

expresión de $Y = g(X)$ pero como vector columna.

$$\text{Encontramos } g(2; -5; 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5+1 \\ -2-5-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para hallar los } X / g(X) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ debemos plantear } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ que nos es}$$

más ni menos que un sistema de ecuaciones lineales –y que puede tener o no solución–; trabajamos con la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Obtene}$$

mos un sistema compatible indeterminado ($\text{rg}(A)=2$; $\text{rg}(M)=2$; $n=3$).

De la segunda ecuación obtenemos $x_2 = 1 + x_3$; en la primera $x_1 = 3$.

Los X buscados son de la forma:

$X = (3; 1 + x_3; x_3) = (3; 1; 0) + (0; x_3; x_3) = (3; 1; 0) + x_3(0; 1; 1)$ con $x_3 \in \mathbb{R}$ que geoméricamente representa una recta en \mathbb{R}^3 .

c) Obtenga el núcleo y la imagen de $g(X)$

En núcleo de g son los $X \in \mathbb{R}^3 / g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ por lo que llegamos a un sistema muy parecido

al recientemente resuelto pero con los términos independientes nulos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ SCI.}$$

$$x_2 = x_3; x_1 = 0$$

$X_{\text{Nu}} = (0; x_3; x_3) = x_3(0; 1; 1)$ con $x_3 \in \mathbb{R}$; una base del Núcleo es $B_{\text{Nu}} = \{(0; 1; 1)\}$

La imagen de una transformación lineal puede ser obtenida por los transformados de una base del espacio vectorial de salida; hemos obtenido las imágenes de los vectores de la base canónica y obtuvimos $(2; -1; 1)$, $(-1; 1; 0)$ y $(1; -1; 0)$ –que además corresponden a los vectores columnas de la matriz A –.

Así $\text{Im}(g) = \text{gen}\{(2; -1; 1), (-1; 1; 0), (1; -1; 0)\}$; el tercer vector es el opuesto al segundo y los dos primeros son LI (uno tiene un cero y el otro no; ninguno es el vector nulo).

Por lo tanto $B_{\text{Im}(g)} = \{(2; -1; 1), (-1; 1; 0)\}$; la $\dim(\text{Im}(g)) = 2$.

Comentarios

- Observamos que se cumple el teorema de la dimensión:

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\text{Nu}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 1 + 2 = 3$$

- Cuando obtuvimos los $X / g(X) = (5, -2, 3)$ conseguimos el resultado $X = (3; 1; 0) + x_3(0; 1; 1)$.

El segundo término es un vector del núcleo $-g(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$ – y que $g(3, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

En general si $g(U) = T$ y el núcleo tiene por base a $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_k\}$ (k natural) el conjunto $\{X \in V / g(X) = T\} =$

$$\{X = U + \lambda_1 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2 + \dots + \lambda_k \vec{n}_k \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

O sea que sumando a U un elemento cualquiera del núcleo su transformado vuelve a dar T . Esto es así pues si N es un elemento cualquiera del núcleo ocurre que $g(U+N) = g(U) + g(N) = T + O = T$ (O vector nulo de W , espacio vectorial de llegada).

(III) Dadas las siguientes matrices que corresponden a cuatro transformaciones geométricas en R^3 se pide para cada una de ellas obtener la expresión, hallar núcleo e imagen, calcular los transformados de $(-1,1,2)$, $(0,2,-1)$ y $(5,1,2)$ e interpretar geoméricamente cada TL.

$$M(f_1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; M(f_2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; M(f_3) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$M(f_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: como se verá para las cuatro TL habrá una serie de coincidencias elegidas de ex profeso para ahorrar tiempo en la resolución y eso se debe a cómo han sido construido las cuatro matrices (y sus TL respectivas).

Para f_1 :

$$\text{Recordemos que } f_1(X) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1 + x_2 + 2x_3}{3} \\ \frac{1x_1 + 2x_2 - 2x_3}{3} \\ \frac{2x_1 - 2x_2 - x_3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Núcleo de } f_1: \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ multiplicamos por 3: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible determinado y el $\text{Nu}(f_1) = \{(0,0,0)\}$; $\dim(\text{Nu}(f_1)) = 0$.

Por teorema de la dimensión:

$$\dim(V) = \dim(\text{Nu}(f_1)) + \dim(\text{Im}(f_1)) \rightarrow 3 = 0 + \dim(\text{Im}(f_1))$$

$$\text{Luego } \dim(\text{Im}(f_1)) = 3 \rightarrow \text{Im}(f_1) = R^3.$$

A continuación hallamos las imágenes de $\vec{u} = (-1,1,2)$, $\vec{s} = (0,2,-1)$ y $\vec{t} = (5,1,2)$.

$$f_1(\vec{u}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u} \rightarrow \boxed{f_1(\vec{u}) = -\vec{u}}$$

$$f_1(\vec{s}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{s} \rightarrow \boxed{f_1(\vec{s}) = \vec{s}}$$

$$f_1(\vec{t}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{t} \rightarrow \boxed{f_1(\vec{t}) = \vec{t}}$$

Notar que los tres vectores \vec{u} , \vec{s} y \vec{t} son perpendiculares entre sí (verificar que los productos escalares dan cero); además \vec{s} y \vec{t} generan un plano que llamaremos Π .

Apoyémonos con el esquema:

A la normal de Π –y a cualquier múltiplo de ella– le corresponde su simétrico; si un vector \vec{v} está en Π podemos escribirlo como sigue:

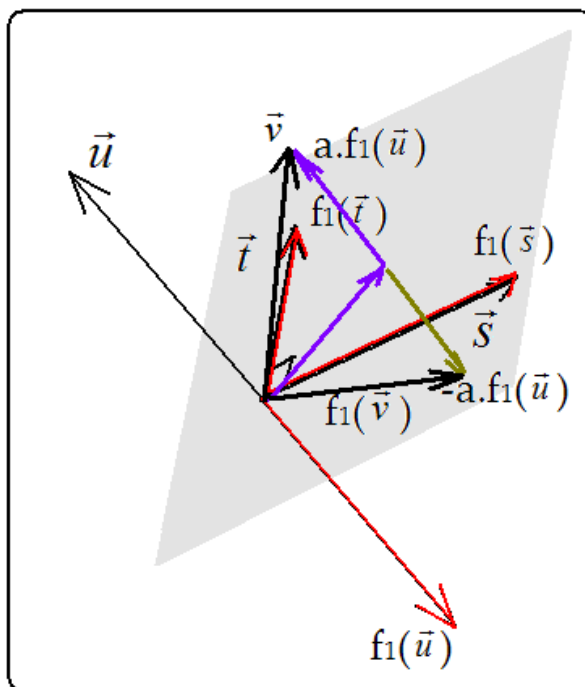
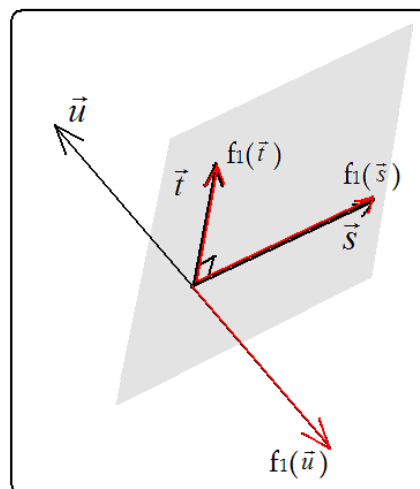
$\vec{v} = b.\vec{s} + c.\vec{t}$ y su transformado $f_1(\vec{v}) = f_1(b.\vec{s} + c.\vec{t}) = f_1(b.\vec{s}) + f_1(c.\vec{t}) = b.f_1(\vec{s}) + c.f_1(\vec{t}) = b.\vec{s} + c.\vec{t} = \vec{v} \rightarrow$ ¡todo vector del plano se transforma en sí mismo!

¿Y un vector \vec{v} cualquiera?

Escribamos a \vec{v} como combinación lineal de los vector de la base $B = \{\vec{u}, \vec{s}, \vec{t}\}$ –son LI pues ninguno está en el plano determinado por los otros dos; al ser tres vectores en \mathbb{R}^3 y LI forman una base–.

$\vec{v} = a.\vec{u} + b.\vec{s} + c.\vec{t} \rightarrow f_1(\vec{v}) = f_1(a.\vec{u} + b.\vec{s} + c.\vec{t}) = a.f_1(\vec{u}) + b.f_1(\vec{s}) + c.f_1(\vec{t}) = -a.\vec{u} + b.\vec{s} + c.\vec{t}$
 $f_1(\vec{v})$ es un vector que mantiene su proyección sobre el plano Π pero simetriza la componente ortogonal –perpendicular–.

Resumiendo f_1 es una simetría según el plano Π .



Comentarios

La interpretación de la transformación la pudimos realizar al indicarnos que debíamos buscar las imágenes de tres vectores no muy inocentes: uno la normal al plano y dos vectores de éste –no eran necesarios que estos últimos fueran perpendiculares entre sí-. Pero, ¿cómo habríamos procedido sin esa información? Quedará en el misterio para tu próxima etapa en Álgebra y Geometría Analítica II pero que te adelantamos que los autovectores y autovalores de la transformación lineal son la llave para resolver la cuestión.

Para f_2 :

$$\text{Recordemos que } f_2(X) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_1 + x_2 + 2x_3}{6} \\ \frac{1x_1 + 5x_2 - 2x_3}{6} \\ \frac{2x_1 - 2x_2 + 2x_3}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Núcleo de } f_2: \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ multiplicando por 6.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \div 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

La tercera ecuación es la repetición de la segunda; de ésta obtenemos $6x_2 - 3x_3 = 0$; luego $x_3 = 2x_2$ y de la primera $x_1 = x_2 - x_3 = x_2 - 2x_2 = -x_2$

$X_{Nu} = (-x_2, x_2, 2x_2) = x_2 \cdot (-1, 1, 2)$ con x_2 real.

Una base del $Nu(f_2) = \{(-1, 1, 2)\}$ y entonces $\dim(Nu) = 1$.

Por teorema de la dimensión:

$$\dim(V) = \dim(Nu(f_2)) + \dim(Im(f_2)) \rightarrow 3 = 1 + \dim(Im(f_2)) \rightarrow \dim(Im(f_2)) = 2$$

Además $Im(f_2) = \text{gen}\left\{\frac{1}{6} \cdot (5, 1, 2); \frac{1}{6} \cdot (1, 5, -2); \frac{1}{6} \cdot (2, -2, 2)\right\}$ que es equivalente a estar

generado por los siguientes tres vectores $\text{gen}\{(5, 1, 2); (1, 5, -2); (1, -1, 1)\}$.

Triangulemos –tengamos en cuenta que de acuerdo al teorema de la dimensión uno es LD con un par de los restantes–.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ son LD y una base de la}$$

imagen es $B_{Im(f_2)} = \{(1, -1, 1); (0, 2, -1)\}$.

A continuación hallamos las imágenes de $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{s} = (0, 2, -1)$ y $\vec{t} = (5, 1, 2)$.

$$f_2(\vec{u}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow \boxed{f_2(\vec{u}) = \vec{0}}$$

$$f_2(\vec{s}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{s} \rightarrow \boxed{f_2(\vec{s}) = \vec{s}}$$

$$f_2(\vec{t}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{t} \rightarrow \boxed{f_2(\vec{t}) = \vec{t}}$$

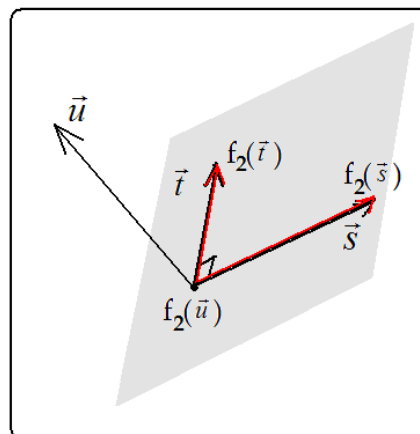
A la normal de Π –y a cualquier múltiplo de ella- le corresponde el vector nulo y nuevamente a un vector \vec{v} que está en Π le corresponde él mismo:

f_2 es la proyección sobre el plano Π

Para f_3 :

Recordemos que $f_3(X) =$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2 - 2x_3}{6} \\ \frac{-x_1 + x_2 + 2x_3}{6} \\ \frac{-2x_1 + 2x_2 + 4x_3}{6} \end{pmatrix}$$



Núcleo de f_3 : $\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ multiplicando

por 6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \div 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 = x_2 + 2x_3 \rightarrow X_{Nu} = (x_2 + 2x_3, x_2, x_3) = x_2 \cdot (1, 1, 0) + x_3 \cdot (2, 0, 1)$ con x_2 y x_3 números reales.

Una base del $Nu(f_3) = \{(1, 1, 0); (2, 0, 1)\}$ y entonces $\dim(Nu(f_3)) = 2$.

Por teorema de la dimensión: $\dim(V) = \dim(Nu(f_3)) + \dim(Im(f_3)) \rightarrow 3 = 2 + \dim(Im(f_3))$

Luego $\dim(Im(f_3)) = 1$

Además $Im(f_3) = \text{gen}\left\{\frac{1}{6} \cdot (1, -1, -2); \frac{1}{6} \cdot (-1, 1, 2); \frac{1}{6} \cdot (-2, 2, 4)\right\}$ que es equivalente a estar

generado por los siguientes tres vectores $\text{gen}\{(1, -1, -2); (-1, 1, 2); (-2, 2, 4)\} = \text{gen}\{(1, -1, -2)\}$ ya que el segundo vector es el opuesto al primero y el tercero es menos dos veces el primero.

Una base de la imagen es $B_{Im(f_3)} = \{(1, -1, -2)\}$.

A continuación hallamos las imágenes de $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{s} = (0, 2, -1)$ y $\vec{t} = (5, 1, 2)$.

$$f_3(\vec{u}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} \rightarrow \boxed{f_3(\vec{u}) = \vec{u}}$$

$$f_3(\vec{s}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow$$

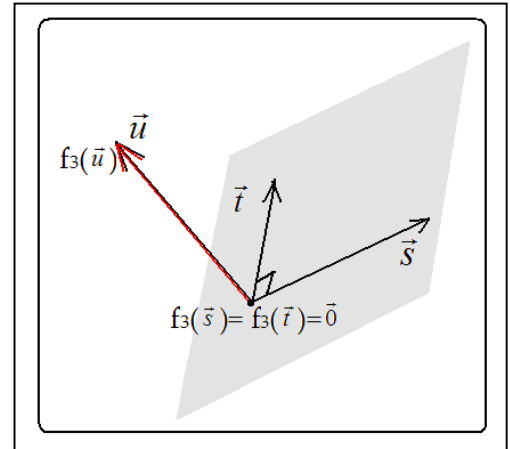
$$\boxed{f_3(\vec{s}) = \vec{0}}$$

$$f_3(\vec{t}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow$$

$$\boxed{f_3(\vec{t}) = \vec{0}}$$

A la normal de Π le corresponde ella misma y a un vector \vec{v} de Π le asigna el vector nulo.

f_3 es la proyección sobre la recta que pasa (0,0,0) dirigida por el vector normal



Para f_4 :

$$f_4(X) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x_1 - x_2 - 2x_3}{3} \\ \frac{-x_1 - 2x_2 + 2x_3}{3} \\ \frac{-2x_1 + 2x_2 + x_3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Núcleo de } f_4: \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{sale } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

El $\text{Nu}(f_4) = \{(0,0,0)\}$ y entonces $\dim(\text{Nu}(f_4)) = 0$; $\text{Im}(f_4) = \mathbb{R}^3$.

A continuación hallamos las imágenes de $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{s} = (0, 2, -1)$ y $\vec{t} = (5, 1, 2)$.

$$f_4(\vec{u}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} \rightarrow \boxed{f_4(\vec{u}) = \vec{u}}$$

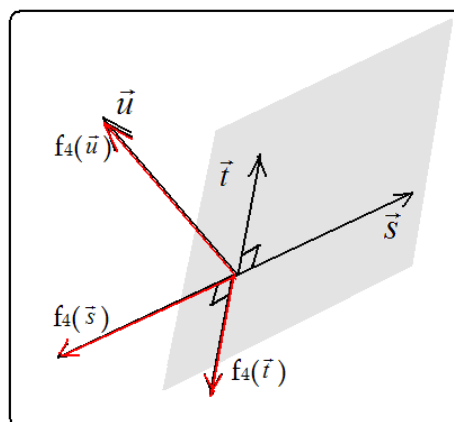
$$f_4(\vec{s}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{s} \rightarrow \boxed{f_4(\vec{s}) = -\vec{s}}$$

$$f_4(\vec{t}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{t} \rightarrow$$

$$\boxed{f_4(\vec{t}) = -\vec{t}}$$

A la normal de Π le corresponde ella misma y a un vector \vec{v} de Π le asigna el vector opuesto –que estará en el plano–.

f_4 es la simetría sobre la recta que pasa (0,0,0) dirigida por el vector normal



$$(IV) \text{ En } R^{2 \times 2} \text{ se tiene el conjunto } H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Probar que H es una base de $R^{2 \times 2}$.

Podemos plantear el método largo o sea la combinación lineal igualada a la matriz nula: $a \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; queda para el lector la resolución por este camino.

Nosotros optaremos por el método corto donde tendremos que efectuar una adaptación. Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lo asimilaremos a un vector de R^4 de coordenadas (a, b, c, d).

Tenemos que triangular la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y comprobar que ninguna fila se

anula pero si eso es así el determinante de la matriz presentada es diferente de cero.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3f_4 + f_1} f_1 =$$

$$(-1) \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 0 & 13 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4f_2 + f_1} f_1 =$$

$$-1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 21 \rightarrow H \text{ es una base.}$$

(b) Escribir las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ en la base H .

Debemos plantear que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} \text{ distribuyendo e igualando}$$

componente a componente llegamos a la siguiente matriz ampliada donde se “descubre” que las columnas corresponden a los elementos ordenados de la matriz y procedemos a triangular por Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & -25 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 24 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & -7 & \frac{14}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(f_3 \cdot 3) \div 7 \\ f_4 \div 3}]{(f_3 \cdot 3) \div 7} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ de donde sale que } a = -3, b = 5, c = 0 \text{ y } d = -2.$$

Las coordenadas de A en H que anotamos $A_H = (-3, 5, 0, -2)$.

(c) En $R^{2 \times 2}$ consideremos los subespacios:

$$S = \{X \in R^{2 \times 2} / x_{11} + 2x_{12} = 0\} \text{ y } T = \{X \in R^{2 \times 2} / x_{11} + x_{21} - x_{22} = 0, 3x_{12} + x_{22} = 0\}.$$

Obtener $S \cap T$ y $S + T$. Comprobar el teorema de la dimensión.

Un X que están en ambos subespacios deben cumplir con las tres ecuaciones.

De $3x_{12} + x_{22} = 0$ sale $x_{22} = -3x_{12}$; de $x_{11} + 2x_{12} = 0$ se obtiene $x_{11} = -2x_{12}$; y si reemplazamos en $x_{11} + x_{21} - x_{22} = 0$ se tiene $-2x_{12} + x_{21} - (-3x_{12}) = 0$; $-2x_{12} + x_{21} + 3x_{12} = 0$; $x_{21} = -x_{12}$

$$X = \begin{pmatrix} -2x_{12} & x_{12} \\ -x_{12} & -3x_{12} \end{pmatrix} = x_{12} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base de } S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Por teorema de la dimensión: $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.

Ya que S tiene una sola ecuación y 4 incógnitas resulta que la $\dim(S) = 4 - 1 = 3$; como T tiene dos ecuaciones independientes –ninguna es múltiplo de la otra– se obtiene que la $\dim(T)$ es $4 - 2 = 2$.

Luego $\dim(S+T) = 3 + 2 - 1 = 4$ y $S+T = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Comentarios

¿Cómo habríamos procedido si no utilizamos el teorema de la dimensión o no nos daba $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

Recordemos que $S+T$ está generado por el conjunto formado por una base de S y otra de T.

Obtenemos base de S:

$$x_{11} + 2x_{12} = 0 \rightarrow x_{11} = -2x_{12}; \quad X_S = \begin{pmatrix} -2x_{12} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_{12} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} =$$

$$x_{12} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Una base de } S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Base de T

$$x_{11} + x_{21} - x_{22} = 0, \quad 3x_{12} + x_{22} = 0 \rightarrow x_{22} = -3x_{12}; \quad x_{11} + x_{21} + 3x_{12} = 0 \rightarrow x_{22} = -3x_{12}; \quad x_{11} = -x_{21} - 3x_{12}$$

$$X_T = \begin{pmatrix} -x_{21} - 3x_{12} & x_{12} \\ x_{21} & -3x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{21} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_{12} & x_{12} \\ 0 & -3x_{12} \end{pmatrix} = x_{21} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base de } T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S+T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right\} = \{A, B, C, D, E\}$$

Para obtener generadores LI triangulamos ubicando las matrices como vectores de \mathbb{R}^4 .

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} D \\ A \\ B \\ C \\ E \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow S+T \text{ está generado por 4 matrices LI en } \mathbb{R}^{2 \times 2}; S+T = \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$