LÓGICA

Lógica proposicional

INTRODUCCIÓN

- Trata de los métodos de razonamiento proporcionando reglas y técnicas para determinar si es válido o no un argumento dado.
- Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación:

1. Diseño de circuitos de computadoras
2. Construcción de programas informáticos
3. La verificación de que un programa está bien construido
4. Entre otras aplicaciones

LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN

- Es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.
- Para nombrar proposiciones se utilizan letras minúsculas a partir de la p.
- No son proposiciones las oraciones exclamativas,interrogativas e imperativas.
- El valor de verdad de una proposición es verdadera si la proposición lo es ,V(p)=v,o falsa si la proposición es falsa ,V(p)=F

Ejemplos

- Son proposiciones:

"Buenos Aires es la capital de Argentina"

"El Sol gira alrededor de la Tierra "

"1 + 1 = 2 "

"3.4 = 9 "

- No son proposiciones :

"¿Cuándo es el parcial de Discreta?"

"Haga los ejercicios de la práctica"

"x + 3 = 12 "

"x + 2y = 6 "

PROPOSICIÓN SIMPLE

- Aquellas proposiciones que no contienen a otras proposiciones.

Ejemplo:

p = “Sócrates es un jugador de tenis “

q = “Sócrates es un matemático

PROPOSICIÓN COMPUESTA

- Aquellas proposiciones que se forman combinando una o más proposiciones simples usando operadores lógicos

Ejemplo:

“Sócrates es matemático y jugador de tenis”

“Sócrates es matemático o jugador de tenis”

“Si Sócrates es matemático,es jugador de tenis”

CONECTORES LÓGICOS

- Se utilizan para formar nuevas proposiciones a partir de dos o más proposiciones ya creadas
- Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación :$\neg$, conjunción: $\wedge$, la disyunción inclusiva: $\vee$, la disyunción exclusiva: $\underline{\vee}$, la implicación:$\rightarrow$ y la doble implicación: $\leftrightarrow$.
- Se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.
- También se los llama operdores lógicos.

¬ : NEGACIÓN

- Se trata del enunciado “No se cumple p”
- Se denota ¬ p
- Se lee no p
- Ejemplo:

 p = “La Luna es azul”

¬p = “No se cumple que la Luna es azul”

Esta negación se puede expresar más simplemente por “La Luna no es azul “

- Es un operador unario

TABLAS DE VERDAD

- Muestra las relaciones entre los valores de verdad de proposiciones.
- Son especialmente valiosas a la hora de determinar los valores de verdad de proposiciones construidas a partir de proposiciones más simples
- Cantidad de renglones de la tabla de verdad:2^n donde n es la cantidad de proposiciones simples
- Ejemplo:tabla de verdad para los conectores lógicos

Tablas de operadores lógicos

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
V	F		F	V	V	F	V
F	F		F	F	F	V	V

$\wedge$:CONJUNCIÓN o PRODUCTO LÓGICO

- Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que un solo término de la conjunción sea falso para que toda la conjunción sea falsa.
- En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la **’y’,** de comas o de una combinación de ´estas, o palabras como **’pero**’.

Ejemplo: “Soy rico, soy feliz”,

“Hoy hace frío y llueve”,

$\vee$:DISYUNCIÓN INCLUSIVA o SUMA LÓGICA

- La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas.
- Se lee p ó q
- Debe entenderse en su acepción más amplia,es decir,p ó q ó ambas
- Ejemplo: “Juan va al cine o toma coca cola “

  “Sofía estudia Matemática Discreta o Química”

$\underline{\vee}$: DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

- Debe entenderse en su acepción más estricta,es decir ,p ó q pero no ambas.
- Se lee p ó excluyente q
- La disyunción exclusiva entre dos proposiciones es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones es falsa y la otra verdadera.
- Ejemplo: “Hoy es lunes ó jueves”
  “Juan usa hojotas ó zapatillas para ir a la plaza”

→:IMPLICACIÓN o CONDICIONAL

- Se lee “si p entonces q”;”p implica q“;”si p,q” ;”p es suficiente para q” ;”p sólo si q”,”una condición suficiente para q es p”;”q si p”;q cuando p”;” una condición necesaria para p es q”;”q siempre que p”;”q es necesario para p”;”q se deduce de p”
- Ejemplo:”Si llueve, voy al cine”

  “Voy al cine siempre que llueve”

  “Voy al cine cuando llueve”

$p \rightarrow q$

- En la implicación p se llama hipótesis o antecedente o premisa.
- En la implicación q se llama tesis o conclusión o consecuencia.
- La implicación es falsa cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) falso.

  En cualquier otro caso es verdadera.

RECÍPROCA DE UNA IMPLICACIÓN

- Recríproca de p → q es la proposición q → p

Ejemplo:

p: Hoy llueve

q: Hoy voy al cine

p → q: Si hoy llueve entonces voy al cine

q → p: Si voy al cine entonces hoy llueve

CONTRARRECÍPROCA DE UNA IMPLICACIÓN

- Contrarrecíproca de $p \rightarrow q$ es la proposición

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

Ejemplo:

p: Hoy llueve

q: Hoy voy al cine

$p \rightarrow q$: Si hoy llueve entonces voy al cine

$\neg q \rightarrow \neg p$: Si no voy al cine entonces hoy no llueve

INVERSA DE UNA IMPLICACIÓN

- Inversa de $p \rightarrow q$ es la proposición
  $\neg\, p \rightarrow \neg\, q$

Ejemplo:

p: Hoy llueve

q: Hoy voy al cine

$p \rightarrow q$: Si hoy llueve entonces voy al cine

$\neg\, p \rightarrow \neg\, q$: Si hoy no llueve entonces no voy al cine

↔ : DOBLE IMPLICACIÓN

- Se lee “p es necesario y suficiente para q”

  “si p entonces q, y recíprocamente”

  “p si y sólo si q”
- La doble implicación es verdadera cuando p y q tienen los mismos valores de verdad y falsa en los otros casos.
- Ejemplo:”Puedes subir al tren si y sólo si compras el boleto”

Precedencia de los operadores lógicos

Operador	Precedencia
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

Tipos de Proposiciones

- Tautología:Una proposición compuesta es una tautología si es verdadera para todas las asignaciones posibles. Se suele representar mediante el símbolo T.

¬p	v	p
V	V	F
F	V	V
V	V	F
F	V	V

- Contradicción: Una proposición compuesta es una contradicción si es falsa para todas las asignaciones posibles. Se suele representar mediante el símbolo F.

p	∧	¬p
V	F	F
F	F	V
V	F	F
F	F	V

- Contingencia:una proposición compuesta que unas veces es verdadera y otras falsa.

p q	¬ q	p ∧ ¬ q
V V	F	F
F V	F	F
V F	V	V
F F	V	F

Aplicación:Operaciones con bits

- Aplicación de lógica digital: Bits y conectivos
lógicos
- Construcción de compuertas lógicas
- **Bit:** dos valores posibles 0 y 1 (Verdadero (V)
- es 1 y Falso (F) es 0).
- **Variable Booleana:** variable cuyo valor puede
- ser V o F.
- **Operaciones con Bits:** conectivos lógicos (AND, OR, NOT, XOR)
- **Cadenas de Bits:** sucesión de cero o unos

- Ejemplo:Aplicar las operaciones bits OR,AND,XOR a las cadenas de bits

  0110110110 ;1100011101

Los resultados de las operaciones bit OR,AND y XOR se obtienen aplicando los operadores

OR,AND y XOR

1110111111 Operador OR

0100010100 Operador AND

1010101011 Operador XOR

Equivalencias lógicas

- Dos expresiones proposicionales P y Q se dicen lógicamente equivalentes,y se escribe $P \equiv Q$, si sus tablas de verdad coinciden.
- Esto equivale a decir que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología.

Leyes lógicas

Equivalencia	Nombre
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	Leyes de dominación
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de doble negación
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leyes conmutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leyes asociativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leyes distributivas

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$	Leyes de negación

Equivalencias lógicas relacionadas con dobles implicaciones
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones
$p \to q \equiv \neg p \lor q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \lor q \equiv \neg p \to q$
$p \land q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$
$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$
$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$
$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$
$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$

- Muestre que ¬ (p ∨ (¬ p ∧ q)) y ¬p ∧ ¬q son lógicamente equivalentes

Método 1: Construir una tabla de verdad

¬	(p	∨	(¬p	∧	q))	↔	¬p	∧	¬q
F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	V

Método 2: Utilizar las equivalencias lógicas conocidas, y partiendo desde una de las dos proposiciones lograr deducir la otra

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)) \equiv$

Ley de De Morgan Ley de De Morgan

$\neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \equiv$

Doble negación Ley distributiva

$(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Ley de negación Ley de identidad