Limites

**Entorno a un punto:**

Se llama entorno a un punto a y radio € y se designa E (a, €), al conjunto de números reales tales que a – € < x < a + €.

**Entorno reducido:**

Es el conjunto de puntos de un entorno del punto a, pero excluido el propio punto a. Se designa E\* (a, €)

**Punto de acumulación:**

Se dice que un punto P es de acumulación de un conjunto C cuando todo entorno de P tiene puntos de C distintos del punto P

**Teorema de Weirtress:** Si C es un conjunto acotado e infinito, tiene al menos un punto de acumulación

**Límite de una función**

Se escribe Lim x🡪a F(x) = L (como se dice) si podemos acercar arbitrariamente los valores de f(x) a L tanto como queramos eligiendo una x bastante cerca de *a*no necesariamente igual a *a.*

**Propiedades de los límites**

1. **Unicidad del límite:** el límite de una función, si existe, es único
2. - Si dos funciones toman valores iguales en los puntos de un cierto entorno reducido de x = a, y una de ellas tiene límite cuando x 🡪 a, la otra tiene ese mismo limite cuando x 🡪 a
3. El límite de una constante es la misma constante
4. Lim x🡪a F(x) = L ≠ 0 entonces, para x suficientemente próximo al valor a, la función tiene el mismo signo que L.
5. Si Lim x🡪a F(x) = L, f está acotada en un cierto entorno de A.
6. **Propiedad de la función intermedia**: Si en un entorno reducido de x = a es h(x) <= f(x) <= g(x), entonces si Lim x🡪a H(x) = L y Lim x🡪a G(x) = L se verifica que Lim x🡪a F(x) = L.

**DEMOSTRACION: ¿?**

**Limites laterales**

Por LIM x🡪a- f(x) = A denotamos el hecho de que f(x) tiende a A cuando x tiende hacia a con valores menores que a, es decir, cuando x tiende **hacia a por la izquierda**

Por LIM x🡪a+ f(x) = A denotamos el hecho de que f(x) tiende a A cuando x tiende hacia a con valores mayores que a, es decir, cuando x tiende **hacia a por la derecha**

LIM x🡪a f(x) = A significa que existen simultáneamente dos límites laterales: Por izq. y por der.

**Limites infinitos**

Lim x🡪a F(x) = **+∞** solo si para cada M > 0 existe ծ > 0 tal que si 0 < | x – a | < ծ, entonces f (x) > M

Lim x🡪a F(x) = **-∞** solo si para cada M < 0 existe ծ > 0 tal que si 0 < | x – a | < ծ, entonces f (x) < M

**Límites para x 🡪 ∞**

Lim x🡪**+∞** F(x) = **L** solo si para cada ∑ > 0 existe N > 0 tal que si x > N, entonces | f(x) – L | < ∑

Lim x🡪**-∞** F(x) = **L** solo si para cada ∑ > 0 existe N < 0 tal que si x < N, entonces | f(x) – L | < ∑

**Infinitésimos e infinitos**

**Definición:** f(x) es un infinitésimo para X 🡪 A si f(x) 🡪 0 para X 🡪 A

**Definición:** f(x) es un infinito para X 🡪 A si | f(x) | 🡪 **∞** para X 🡪 A

Asíntotas

La recta x = a se llama **ASINTOTA VERTICAL** de la curva y = f(x) si se cumple por lo menos una de las siguientes proposiciones

* Lim x🡪a F(x) = **+∞** Lim x🡪a F(x) = **-∞**
* Lim x🡪a- F(x) = **+∞** Lim x🡪a- F(x) = **-∞**
* Lim x🡪a+ F(x) = **+∞** Lim x🡪a+ F(x) = **-∞**

La recta y = L se llama **ASINTOTA HORIZONTAL** de la curva y = f(x) si:

* Lim x🡪**+∞** F(x) = **L** o Lim x🡪**-∞** F(x) = **L**

La recta y = mx + b se llama **ASINTOTA OBLICUA** de la curva y = f(x) si:

* Lim x🡪**+∞** = **m** o Lim x🡪**∞** [f (x) – m x] = **b**
* Lim x🡪**+-∞** = **m** o Lim x🡪-**∞** [f (x) – m x] = **b**

Continuidad y Discontinuidad

Una función f es **continua** en c solo si lim x🡪c f(x) = f(c)

Una función f es **continua** por la **izquierda** en c solo si lim x🡪c**-** f(x) = f(c)

Una función f es **continua** por la **derecha** en c solo si lim x🡪c**+** f(x) = f(c)

Una función es **continua** en un intervalo [a, b] si:

Es **continua** en todo punto c de (a, b),

Es **continua** por la derecha en a

Es **continua** por la izquierda en b.

**CONDICION PARA LA CONTINUIDAD SIN HACER MENCION EXPLICITA DEL LIMITE**

**TEOREMA**: La función f es continua en C, solamente si, dado cualquier ∑ > 0, es posible encontrar un ծ > 0 tal que | f (x) – f (c)| < ∑ siempre que | x – c | < ծ

CONTINUIDAD Y COMPOSICION DE FUNCIONES

**Teorema:** Si g es continua en C y F es continua en g(c), entonces f o g es continua en c.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

**Teorema C:** Si f es continua en c y f(c) ≠ 0, para x suficientemente próximo a C, f(x) tiene el mismo signo que f(c).

**TEOREMA DE BOLZANO**: Si f es continua sobre un intervalo [a, b] y f(a) **∙** f(b) < 0, existe por lo menos un punto c en (a, b) tal que f(c) = 0

**TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO:** Si f es continua sobre un intervalo [a, b] y f(a) < k < f(b) o f(a)> k > f(b), existe por lo menos un punto c en la (a, b) tal que f(c) = k

**TEOREMA DE LAS DOS FUNCIONES:** Si f y g son continuas sobre un intervalo [a, b] y tales que f(a) > g(a) y f(b) < g(b), existe por lo menos un punto c en (a, b) tal que f(c) = g(c)

**Demostraciones**

**DISCONTINUIDAD**. VER CARPETA

Derivadas

La **derivada** de la función F es la función denotada f’ cuyo valor en el numero x se define por el numero f’(x) = lim h🡪0  siempre que este límite exista

**Diferenciación**: Si x es un numero en el dominio de y = f(x) tal que y’= f’(x) está definida, entonces se dice que la función f es diferenciable en x

**Derivadas laterales**

**Derivada por derecha:** de la función f en x = x0 se define por el numero f’(x0+) = limh🡪0+  siempre que este límite exista

**Derivada por izquierda:** de la función f en x = x0 se define por el numero f’(x0-) = limh🡪0-  siempre que este límite exista

**La diferenciabilidad implica continuidad**

Si una curva tiene tangente en un punto, la curva no puede dar un salto en ese punto.

TEOREMA: Si existe f’(c), entonces f es continua en c

**REGLA DE LA CADENA**

Si f y g son funciones y es y = f[g(x)], entonces y’ = f’[g(x)] **∙** g’ (x) siempre que f’[g(x)] y g’(x) existan.

Para encontrar la derivada de f[g(x)], se debe encontrar la derivada de f(x), reemplace cada x por g(x) y multiplicar el resultado por la derivada de g(x)

[FORMULA PRODUCTO INGRESO MARGINAL VER PAGINA 217/218]

**Derivada Logarítmica**

De una función Y = f(x), a la derivada del logaritmo de dicha función, es decir:

(ln y)’ = =

**Derivada de la función inversa**

Si la derivada de la función y = f(x) es y’x ≠ 0, la derivada de la función inversa x = f-1 (y) será x’y = o sea, =