

Ejercicios Tipo Primer Parcial

1) Sea $f(x, y, z) = (x + y)^2 - (x + z)^2 + (y + z)^2$

- a) Calcular la dirección de máximo crecimiento de f en $P(0, -1, 2)$
b) Si $\|w\| = 1 \Rightarrow |f'_w(q)| \leq \|\nabla f(q)\| \quad \forall q \in \mathbb{R}^3$

2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^7} & \text{Si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Analizar Continuidad y derivadas direccionales en $(0, 0)$

3) Decir si existe el $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{(2x - 3y^2) + x^2 y^4}$$

4) Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $g'(t) > 0 \quad \forall t \neq 0$
 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(x) = g(\|x\|)$

Probar que $x \cdot \nabla f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

5) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

Si $\nabla f(x) = g(x) \cdot x$, $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

Entonces f es constante sobre la Imagen (α)

1.a)

$$\nabla f(x, y, z) = (2(x + y) - 2(x + z); 2(x + y) + 2(x + z); 2(y + z) - 2(x + z))$$

$$\nabla f_{(0, -1, 2)} = (-6; 0; -2)$$

1.b)

Si f es diferenciable $\Rightarrow f'_w(q) = \nabla f(q) \cdot \bar{w}$

$$|f'_w(q)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)_q \cdot (w_1; w_2) \right|$$

Por propiedad del módulo;

$$|f'_w(q)| \leq \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)_q \right| \cdot |(w_1; w_2)|$$

Por enunciado: $|(w_1; w_2)| = 1$

$$\boxed{|f'_w(q)| \leq \|\nabla f(q)\|}$$

2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0)}{h} = \frac{0/h}{h} \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0)}{h} = \frac{0/h}{h} \rightarrow 0$$

Tomo $x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^6 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2(x^4 + 1)} = \frac{x^2}{(x^4 + 1)} = 0$$

Tomo $x^3 = y$

$$\frac{x^6}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

NO ES CONTINUA

Derivada Direccional por definición:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda(a, b) + f(P))}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^3 a^3 \lambda b}{\lambda^6 a^6 + \lambda^2 b^2} = \frac{\lambda^4 a^3 b}{\lambda^2 (\lambda^4 a^6 + b^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a^3 b \lambda}{\lambda^4 a^6 + b^2} \rightarrow 0$$

3) Calculo el límite en una dirección: $y=mx$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} = \frac{x^2 m^4 x^4}{(2x - 3mx)^2 + x^2 m^4 x^4} = \frac{m^4 x^6}{(2 - 3m)^2 x^2 + m^4 x^6}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} = \frac{m^4 x^4}{(2 - 3m)^2 + m^4 x^4} = \frac{0}{(2 - 3m)^2}$$

Si $m=2/3$ el límite no existe

4) $g'(t) > 0 \quad \forall t \neq 0$

$$f(x) = g(\|x\|)$$

Probar que

$$x \cdot \nabla f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\nabla f(x) = g'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \text{Si multiplico por } x \text{ a ambos lados queda:}$$

$$x \cdot \nabla f(x) = g'(\|x\|) \cdot \frac{x \cdot x}{\|x\|} = g'(\|x\|) \cdot \frac{x^2}{\|x\|} = g'(\|x\|) \cdot \|x\|$$

Como: $g'(\|x\|) > 0$ y $\|x\| > 0$ entonces:

$$\boxed{x \cdot \nabla f(x) > 0}$$

- 5) Hay que ver que $(f \circ \alpha)(t)$ es constante sobre la curva, por lo tanto tiene que dar cero la derivada de la composición.

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

$$g(\alpha(t)) \cdot (\cos t; \sin t) \cdot (-\sin t; \cos t) = 0 \text{ ya que } (\cos t; \sin t) \cdot (-\sin t; \cos t) = 0$$

