Parcial - Recuperatorio | Cálculo 2 | Prof. López | ① 249 - I

1) Si $x \cdot y \cdot z = k$ demostrar que $x+y+z$ es mínimo cuando $x = y = z$

$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z - k$

$g(x,y,z) = x+y+z \longrightarrow$ condicionamos la función por el multiplicador de Lagrange (minimizo la suma)

$\nabla f = \lambda \cdot (\nabla g)$

$(y \cdot z ; xz , xy) = \lambda (1; 1; 1)$

① $yz = \lambda \longrightarrow y = \frac{\lambda}{z}$ en ③ $\quad x \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{z} = \cancel{\lambda} \Rightarrow \boxed{x = z}$

② $xz = \lambda \longrightarrow x = \frac{\lambda}{z}$ en ③ $\quad \frac{\cancel{\lambda}}{z} \cdot y = \cancel{\lambda} \Rightarrow \boxed{y = z}$

③ $xy = \lambda$

$\therefore$ cuando $x = y = z$ es mínima la suma.

2) Hallar el desarrollo de Tylor de $f(x,y) = x^4 + 2x^2y + 4xy^3$ em $(0,0)$. ¿Cuál es en $(0;1)$?

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 4x^3 + 4xy + 4y^3 = 0$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 24xy = 0$

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 2x^2 + 12xy^2 = 0$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 12x^2 + 4y = 0$

$= \left[\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 4x + 12y^2 = 0 \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)} = 4x + 12y^2 = 0 \end{array} \right.$

Tylor en $(0;1)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,1} = 4 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,1)} = 4 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,1)} = 12 \qquad f(0,1) = 0$$

$$P(0;1) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{(x-x_0)^1 \cdot (y-y_0)^0}{1!\,0!} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{(x-x_0)^0 (y-y_0)^1}{0!\,1!} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{(x-x_0)^2 \cdot (y-y_0)^1}{2!\,1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{(x-x_0)^1 \cdot (y-y_0)^2}{1!\,2!} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{(x-x_0)^2 \cdot (y-y_0)^2}{2!\,2!}$$

$$P(0;1) = 4x + \cancel{0 \cdot (x)^0 \cdot (y-1)^1} + \frac{4x^2 \cdot (y-1)}{2}$$

$$+ \cancel{\frac{0 \cdot (x) \cdot (y-1)^2}{2}} + \frac{12x^2 \cdot (y-1)^2}{4}$$

$$P(0;1) = 4x + 2x^2(y-1) + 3x^2(y-1)^2$$

$$= 4x + 2x^2y - 2x^2 + 3x^2(y^2-2y+1)$$

$$= 4x + 2x^2y - 2x^2 + 3x^2y^2 - 6x^2y + 3x^2$$

$$= 4x + 4x^2y + x^2 + 3x^2y^2$$

3 Si $f(1,2)=3$, $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2)=4$, $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)=5$

Hallar la ecuación del Plano Tang. a $f(x,y)$ en $(1;2)$

Si $\bar{U}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\bar{V}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

UNA FORMA DE escribir el Plano Tg. en UN PUNTO P_0 es:

$$z=f(x_0;y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

Como la función admite Plano Tg. en $(1,2)$ Podemos decir que la función es diferenciable en $(1,2)$.

$\Rightarrow$ la derivada direccional se Puede escribir

Como:

$$\left.df\right|_{\bar{U}}=\nabla f(x,y)\cdot\frac{\bar{U}}{\|\bar{U}\|}$$

$$4=\nabla f(x,y)\cdot\frac{\bar{U}}{\|\bar{U}\|}\Rightarrow\nabla f(x,y)=\frac{4\,\|\bar{U}\|}{\bar{U}}$$

$$\left[\nabla f(x,y)=4\cdot\frac{\sqrt{1/2+1/2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]\quad (1)$$

$$\left.df\right|_{\bar{V}}=\nabla f(x,y)\cdot\frac{\bar{V}}{\|\bar{V}\|}\Rightarrow\nabla f(x,y)=\frac{5\,\|\bar{V}\|}{\bar{V}}$$

$$\left[\nabla f(x,y)=\frac{5}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right]\quad (2)$$

el Vector $\bar{U}$ se puede escribir como :

$$\bar{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \check{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)$$

$$\bar{V} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1;0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0;1)$$

$$\left.\begin{aligned} df\Big|_{\bar{U}} &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \\ \pm \quad \partial f\Big|_{\bar{V}} &= -\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \end{aligned}\right\}$$

<u>Cuando Sumo</u>:

$$2\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\frac{1}{\sqrt{2}} = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{9}{2}\cdot\sqrt{2}}$$

<u>Cuando Resto</u>

$$2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad Z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x,y)(\bar{X} - \bar{X}_0)$$

$$Z = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{9}{2}\sqrt{2}(y-2)$$

$$\boxed{Z = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{2}y - 9\sqrt{2}}$$

4) Supongamos que una particula se lanza desde la sup. $x^2+y^2-z^2=-1$ en el punto $(1,1,\sqrt{3})$ en la dirección Normal a la sup en $t=0$, con una rapidez de 10 unidades/segundo

¿Cuándo y donde cruza el plano xy?

- primero debo calcular el gradiente a la sup.

$x^2+y^2-z^2=-1$ en el punto $(1,1,\sqrt{3})=P_0$

$\Rightarrow \nabla f(x,y,z)=(2x,\ 2y,\ -2z)\Big|_{P_0}=(2,2,-2\sqrt{3})$

$\boxed{\nabla f(x_0,y_0,z_0)=2(1,1,-\sqrt{3})}$ → La normal a la sup.

Luego la Normal unitaria será:

$$\boxed{\frac{(1,1,-\sqrt{3})}{\sqrt{5}}}$$

$\Rightarrow$ La Velocidad de la partícula es la rapidez multiplicada por la dirección normal unitaria

$$\vec{V}=10\cdot\frac{(1,1,-\sqrt{3})}{\sqrt{5}}.$$

Podemos calcular la Posición de la Partícula si encontramos la recta que pasa por $P_0(1,1,+\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ la ecuación que define a la recta pasando por $P_3(1, 1, \sqrt{3})$ será:

$$10 \cdot t \, \frac{(1, 1, -\sqrt{3})}{\sqrt{5}} + (1, 1, \sqrt{3})$$

esto implica que:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \frac{10t}{\sqrt{5}} \\ y &= 1 + \frac{10t}{\sqrt{5}} \\ ① \; z &= \sqrt{3} - \frac{10t\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}$$

En un tiempo t la partícula llegará al plano (xy), que en otros términos se puede escribir como $z = 0$.

Luego igualo el plano $\boxed{z=0}$ con ①

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{3}} = \frac{10t \, \cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\sqrt{5}}{10}} \Rightarrow \underline{\text{cuando}}$$

y donde se encuentran será:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \frac{\cancel{10} \cdot (\overbrace{\sqrt{5}/\cancel{10}}^{t})}{\cancel{\sqrt{5}}} = 2 \\ y &= 1 + \frac{\cancel{10}}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{10}} = 2 \\ z &= \cancel{\sqrt{3}} - \frac{\cancel{10}}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{10}} \cdot \cancel{\sqrt{3}} = 0 \end{aligned}\right\} \underbrace{\boxed{(2; 2; 0)}}_{\text{Donde}}$$