# Estudio de funciones

- Dominio
- Asíntotas
- Continuidad
- Intervalos de decrecimiento
- Intervalos de crecimiento
- Máximos y mínimos
- Intervalos de concavidad positiva
- Intervalos de concavidad negativa
- Puntos de inflexión
- Grafico

## Función estrictamente decreciente

f(x) es estrictamente decreciente en x=c si ∃ $E(c, \delta)$, tal que $\forall x \in E(c, \delta)$ se verifica que: $F(c-h) > f(c) > f(c+h)\ si\ 0 < h < \delta$
teorema
si $\exists f'(c) y\ F'(c) < 0$ → es estrictamente decreciente en x=c

## función estrictamente creciente

f(x) es estrictamente creciente en x=c si ∃ $E(c, \delta)$ tal que $\forall x \in E(c, \delta)$ se verifica que

$F(c-h) < f(c) < f(c+h)\ siendo\ 0 < h < \delta$

Teorema

Si $\exists f'(c)\ y\ F'(c) > 0$ → f(x) es estrictamente creciente en x=c

## Máximo relativo o local

f(x) en x=c posee un máximo relativo o local si ∃ $E(c, \delta)$ para el cual se cumple que

$$\forall x \in E^*(c, \delta):\ \ F(c) \geq F(c+h)\ siendo\ 0 < |h| < \delta$$

## Mínimo relativo o local

f(x) en x=c posee un mínimo relativo o local si ∃ $E(c, \delta)$ para el cual se cumple que

$\forall x \in E^*(c, \delta):\ \ F(c) \leq F(c+h)\ siendo\ 0 < |h| < \delta$

## Criterio de la primera derivada

Para que exista un extremo (máximo o mínimo) el valor de la primera derivada debe ser 0 y debe cambiar de signo la primera derivada un entorno a ese valor que la anula.

## Criterio de la segunda deriva

Debe existir la derivada segunda y ser distinta de 0. Si el valor de la segunda derivada es mayor a 0 se trata de un mínimo. Si es menor que 0 se trata de un máximo.

## Punto de inflexión

Se llama punto de inflexión al punto donde la curva posee un cambio de concavidad.

### Criterio de la segunda derivada

El valor de la segunda derivada debe ser igual a 0 y debe cambiar el signo de la derivada segunda en un entorno con respecto a ese punto.

Comentado [ra1]: Seguir aquí

### Criterio de la tercera derivada

Debe existir la derivada tercera y ser distinta de 0.

# Regla de L'Hopital

Para indeterminaciones: $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$x

Si f(x) tiende a 0 y está multiplicando a g(x) y esta tiende a infinito entonces doy vuelta el segundo término y lo convierto en una división y luego sigo operando. esto se puede utilizar en todas las multiplicaciones que un término siga una tendencia y el segundo término siga otra.

Además de que se puede hacer al revés partiendo de la división y pasarla a multiplicación.

$f(x).g(x) \to \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Si tengo una función en el exponente puedo aplicar logaritmo de ambos lados de la igualdad y luego seguir resolviendo:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$
$$\ln \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \ln L$$
$$\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) = \ln L$$

Hay que recordar que utilizar lo siguiente puede ser de utilidad en estos ejercicios:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$
$$\sqrt[a]{x^n} = x^{\frac{n}{a}}$$

# Elasticidad

Permite ver cuanto varia una función ante un cambio de su variable en un 1 %.

$$E = \left|\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp}\right|$$

$$E = -\frac{p}{q}\,.q'(p)$$

E<1 es inelástica

E>1 es elástica

E=1 es unitaria

# Superávit de los consumidores

En el precio de equilibrio los consumidores compran la misma cantidad que los productores quieren vender. Pero hay consumidores que aceptaran gastar más en el producto. La diferencia entre los mayores precios que los consumidores están dispuestos a pagar y el precio de equilibrio se llama superávit de los consumidores.

$$\int_0^{q0} [D(q) - p0]dq$$

# Superávit de los productores

En el precio de equilibrio los consumidores compran la misma cantidad que los productores quieren vender. Pero hay algunos productores que están dispuestos a proporcionar un producto a un precio menor que el precio de equilibrio. La diferencia entre el precio de equilibrio y los precios mas bajos a los cuales estarían dispuestos a vender los productores se llama superávit de los productores.

$$\int_0^{q0} [p0 - S(q)]\,dq$$

# Formula de polinómica de Taylor

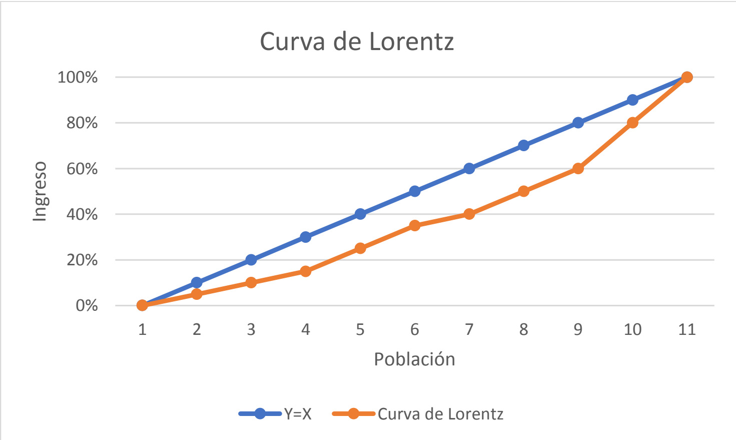
$$P(x) = f(c) + f'(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{IV}(c)}{4!} + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

# Curva de Lorentz

Esta curva representa gráficamente la distribución de ingreso total de un grupo de individuos con una o más características en común.

<u>Características</u>

- El dominio de esta función es el intervalo [0;1]
  x=0 (0% de la población)
  x=1 (100% de la población)
- La imagen de esta función es el intervalo [0;1]
  y=0 (0% del ingreso)
  y=1 (100% del ingreso)
- La Curva de Lorentz siempre conecta el punto (0;1) con el (1;1)
  (0;0) (el 0% de la población recibe el 0% del ingreso)
  (1;1) (el 100% de la población recibe el 100% del ingreso)
- Siempre la Curva de Lorentz se encuentra por debajo de la recta y=x.




# Coeficiente de Gini

$$G = \frac{area\ encerrada\ entre\ la\ curva\ de\ Lorentz\ y\ la\ recta\ y = x}{area\ del\ triangulo\ que\ tiene\ como\ vertices\ (0,0); (1,0)\ y\ (1,1)}$$

$$G = \frac{\int_0^1 [x - f(x)]dx}{\frac{1}{2}} \rightarrow G = \int_0^1 [x - f(x)]dx$$

$$0 \leq G \leq 1$$

# Integrales indefinidas

## Propiedades

1. $A = \int_a^b f(x)dx$
2. $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

## Demostración de la fórmula de integración por partes

$$[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$
$$\int [u(x).v(x)]' = \int u'(x).v(x) + \int u(x).v'(x)$$
$$u(x).v(x) - \int u'(x).v(x) = \int u(x).v'(x)$$
$$u(x).v(x) - \int v(x).du = \int u(x).dv$$

## Teorema fundamental del cálculo integral

Dada una f(x) en un intervalo I, x=a un punto perteneciente a I, la función integral

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$es derivable dentro de este intervalo y su derivada vale $F'(x) = f(x)$.

Demostración

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$\rightarrow \textit{según propiedad aditiva} \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\int_a^x f(t)dt} + \int_x^{x+h} f(t)dt - \cancel{\int_a^x f(t)dt}}{h}$$
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \rightarrow \textit{según teorema del valor medio}$$
$$= f(c).(x+h-x)\ c \in [x; x+h]$$
$$= f(c).(\cancel{x} + h \cancel{- x})$$
$$= f(c).h$$
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c).h}{h} \rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c)$$

### Teorema de valor medio para integrales

Si f(x) es continua en [a, b] e integrable dentro de ese intervalo $\exists\ c \in [a, b]\ tal\ que$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Demostración

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\frac{m(b-a)}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{M(b-a)}{b-a}$$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$

$$m \leq \frac{f(x)dx}{b-a} \leq M$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$m \leq u \leq M$$

Como f(x) es continua en [a, b], según el teorema del valor intermedio para funciones continuas $\exists\ c \in [a, b] tal\ que\ f(c) = u$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ \rightarrow f(c).(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

# Integrales Definidas

### Regla de Barrow

Considerar dos primitivas de f(x): F(x) y $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.Se sabe que F'(x)=f(x) y G'(x)=f(x).

También se sabe que F(x)-G(x)=C por lo que F(x)=G(x)+C.

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{G(x)} + C$$

- Si x=a → $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \rightarrow$ G(a)

  $F(a) = 0 + C \rightarrow F(a) = C$

- Si x=b → $F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$

  $$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

  $$\underline{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

**Importante:**

Para calcular un área encerrada entre funciones se debe emplear:

$$A = \int_a^b [(función\ techo) - (función\ piso)\ ]dx\ \rightarrow A = \int_a^b \{[f(x)] - [g(x)]\}\, dx$$

Si al momento de calcular un área cambia la función que actúa como "techo" o cambia "el piso" debe dividirse el área en ese punto y calcular el área encerrada entre funciones respectivamente con su propio techo y piso. Como por ejemplo, si cambia la función piso en algún punto.

$$\boldsymbol{A} = \int_{\boldsymbol{a}}^{c} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - g(x))\boldsymbol{dx} + \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}} (f(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{d}x$$

# Integrales Impropias

Límite de integración infinito

a) f(x) es continua en [a; ∞) se define $\int_a^\infty f(x)dx\ \rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$
b) f(x) es continua en (-∞; b] se define $\int_{-\infty}^b f(x)dx\ \rightarrow \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$
c) f(x) es continua en (-∞; ∞) se define $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx\ \rightarrow\ \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x).$

Función discontinua en algún punto del intervalo

a) f(x) es continua en (a; b] y discontinua en a se define $\int_a^b f(x)dx\ \rightarrow\ \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$
b) f(x) es continua en [a; b) y discontinua en b se define $\int_a^b f(x)dx\ \rightarrow\ \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$
c) f(x) es continua en [a; b] excepto en un punto c donde es discontinua
se define $\int_a^b f(x)dx\ \rightarrow\ \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx + \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$