Limites

Conceptos para recordar:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{n \neq 0} = 0$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{n \neq 0}{0} = \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{n \neq 0}{\infty} = 0$

$$\frac{\sqrt[a]{x}}{x^b} = \sqrt[a]{\frac{x}{x^{a.b}}}$$

$$y^a . \sqrt[b]{x} = \sqrt[b]{y^{a.b}} . x$$

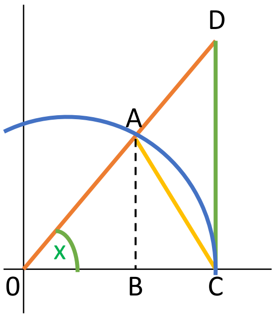
$$x^{-a} = \frac{x}{a}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Definición de limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$\overline{AB} = \sin x$

$\overline{OC} = 1$

$\overline{DC} = \tan x$

$$O\overset{\triangle}{A}C < \widehat{OAC} < O\overset{\triangle}{D}C$$

$$\frac{b.h}{2} < \frac{x}{2} < \frac{b.h}{2}$$

$$\frac{\overline{OC}.\overline{AB}}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\overline{OC}.\overline{DC}}{2}$$

$$\frac{\overline{OC}.\overline{AB}}{\cancel{2}} < \frac{x}{\cancel{2}} < \frac{\overline{OC}.\overline{DC}}{\cancel{2}}$$

$$1.\sin x < x < 1.\tan x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}{\cancel{\sin x}}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \to 0} 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \to 0} \cos x$$

$$1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad 1$$

**propiedad de la función intermedia*

Asíntotas

Asíntota vertical

En las funciones fraccionarias hay AV para los valores que hacen 0 al denominador, pero no al numerador.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{a\}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

AV: X=a

Asíntota horizontal

Si hay AH el polinomio del numerador es de igual grado que el del denominador; o el grado del polinomio del denominador es mayor al del numerador.

Para saber si se corta la AH se debe calcular: f(x)=0

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

AH: Y=L

Asíntota oblicua

En las funciones fraccionarias donde el numerador y el denominador son polinomios, hay AO cuando el grado del numerador es uno mayor que el grado del polinomio del denominador.

Para saber si se corta la AH se debe calcular: f(x)=AO.

Si hay AO no hay AH y viceversa.

$$m\colon \lim_{x \to \infty} f(x).\frac{1}{x}$$

$$b\colon \lim_{x \to \infty} f(x) - m.x$$

$AO\colon Y = mx + b$

Continuidad

Dada una f(x) y un punto x=a perteneciente al dominio de esta, es continua si se cumplen 3 condiciones:

1. $\exists f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si al menos una de estas condiciones no se cumple, f(x) es discontinua.

Clasificación de discontinuidades

A. Discontinuidad evitable

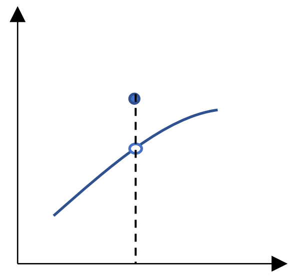
Se caracteriza por la existencia del límite.

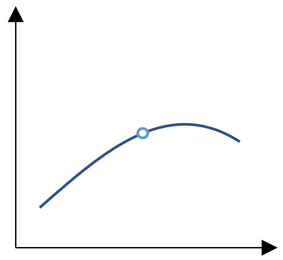
Se da cuando:

L ≠ f(a)

$\nexists f(a)$.

Se llama evitable porque se puede redefinir a la función para hacerla continua en ese punto.

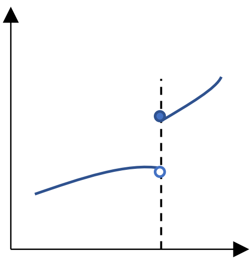




B. Discontinuidad esencial con salto finito

Se caracteriza por la NO existencia del límite.

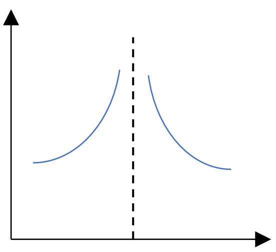
Los limites laterales no son iguales.

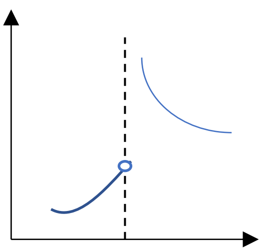


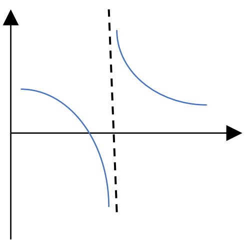
C. Discontinuidad con salto infinito

Se caracteriza por la NO existencia del límite.

Se presenta una asíntota.

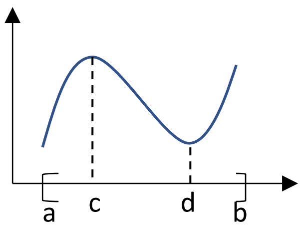




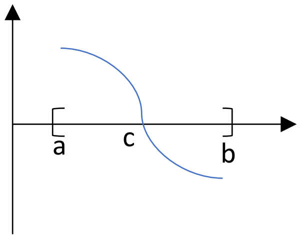


Teoremas de continuidad

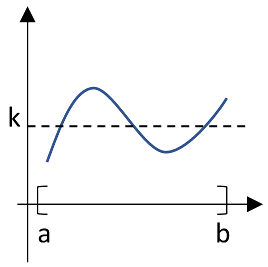
- TEOREMA DE WEIERSTRASS: si f es continua en [a, b], existen dos puntos c y d, para los cuales la función alcanza un máximo y un mínimo respectivamente.



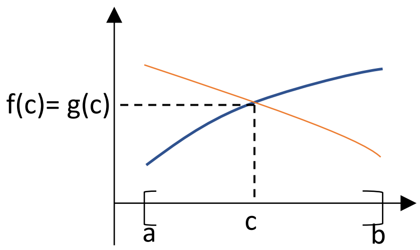
- TEOREMA DE BOLZANO: Si f es continua sobre un intervalo [a, b] y f(a) · f(b) < 0, existe por lo menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que f(c) = 0.



- TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO: Si f es continua en un intervalo [a, b] y f(a) < k < f(b) o f(a)> k > f(b), existe por lo menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que f(c) = k.



- TEOREMA DE LAS DOS FUNCIONES: Si f y g son continuas en un intervalo [a, b] y tales que f(a) > g(a) y f(b) < g(b), existe por lo menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que f(c) = g(c).

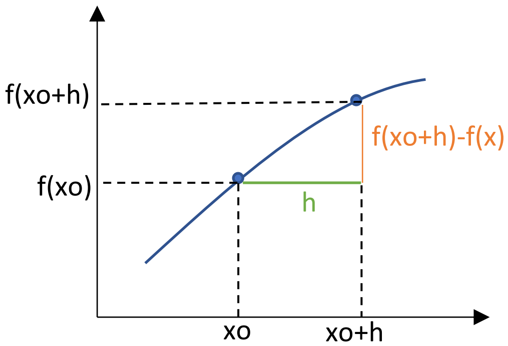


Derivada

Dada una f(x) y un punto x= xo perteneciente al dominio de f(x) y un punto de acumulación del dominio, se define f'(x) en x= xo el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(xo+h)-f(xo)}{h}$$

Si este limite existe y es finito, se afirma que f(x) es derivable en x= xo y el valor de esta derivada será el resultado de este límite este valor se simboliza como f'(xo).



Derivabilidad implica continuidad

Si existe f'(c), entonces f es continua en c.

Demostración

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.(x-c), x \neq c$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x} * .(x-c)\right]$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.\lim_{x\to c}(x-c)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(c) + \quad f'(c) \quad . \quad 0$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ f(c) \to f(x)\ es\ continua\ en\ x = c$$

$$* \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \to x - c = h \to x = h + c$$

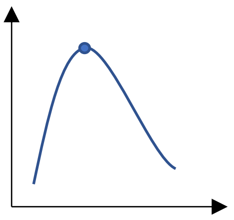
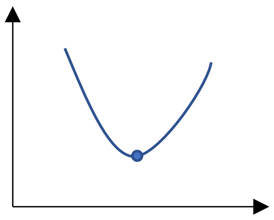
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+c)-f(c)}{h} \to definicion\ de\ derivada$$

El reciproco es falso. Si una función f es continua en c, no sigue que f(c) tenga derivada. Por ejemplo, en el caso de f(x)= lxl [punto anguloso en (0,0)]

Teoremas fundamentales

◊ TEOREMA DE FERNAT

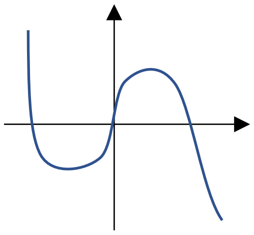
Si $f(x)$ en $x=c$ posee un extremo relativo y existe $f(c)$, entonces $f'(c)=0$.

El reciproco del teorema es falso, ya que si existe $f'(c)$ y $f'(c)=0$ esto no significa que necesariamente exista un extremo relativo en $x=c$.

Por ejemplo:

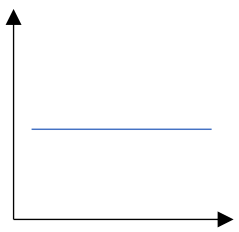
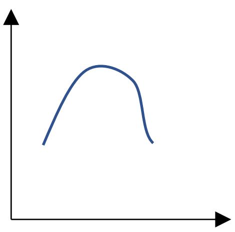
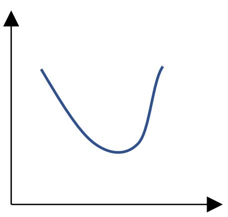
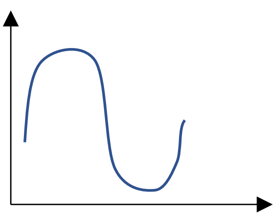
$f(x)= -x^3$



El contra reciproco del teorema es verdadero si existe $f'(c)$ y $f'(c)\neq 0$ no posee un extremo relativo en $x=c$.

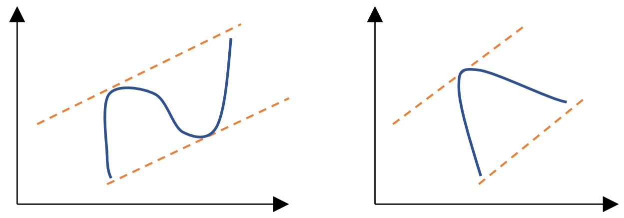
◊ TEOREMA DE ROLLE

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); y además $f(a)=f(b)$ entonces existe al menos un punto $x=c$ donde $f'(c)=0$.

◊ TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f(x) es continua en [a, b] y derivable en (a, b); entonces existe al menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



◊ TEOREMA DE CAUCHY

Si f(x) y g(x) son continuas en [a, b] y derivables en (a, b); entonces existe al menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que $\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ siempre y cuando no se anulen ambas simultáneamente en un mismo punto en (a, b); y g(a)≠g(b).