94.E

AÑO 2004

PRECIO:

Universidad Nacional de La Matanza

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA E INVESTIGACIONES TECNOLOGICAS

CALCULO I

TRABAJOS PRACTICOS:

* VARIACION DE FUNCIONES
* FORMULA DE TAYLOR
* TEOREMA SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

AULAS 61 Y 65 -T.N.
CURSO DE VERANO

INGENIERIA INFORMATICA (Plan 97')

CÓDIGO MAT.	CÓDIGO AP
602	18

Liga Federal Universitaria

CALCULO I   INGENIERIA

TN CURSO DE VERANO

TRABAJO PRÁCTICO N° 6

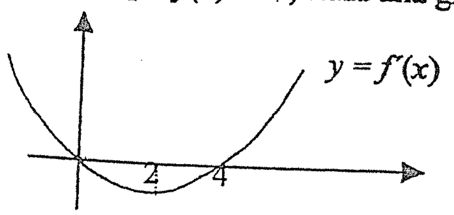
VARIACIÓN DE FUNCIONES

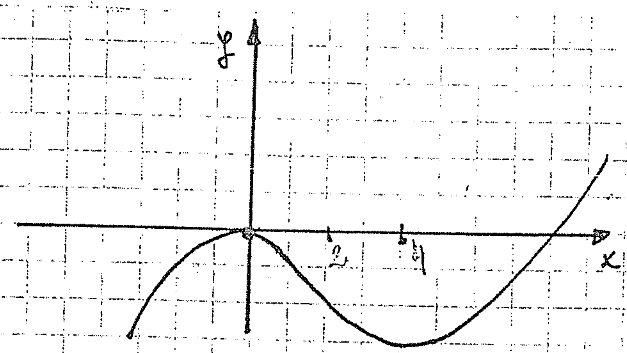
1.- Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f

i) ¿En qué intervalos crece y decrece la función?

ii) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o un mínimo locales?

iii) Si sabes que $f(0) = 0$, traza una gráfica posible de f.





i) crece: $(-\infty;0) \cup (4;+\infty)$

decrece: $(0;4)$

ii) máximo o mínimo: $x=0$, $x=4$

MÁXIMO: $x=0$

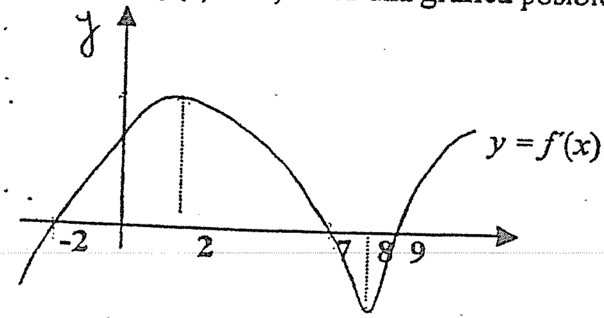
mínimo: $x=4$

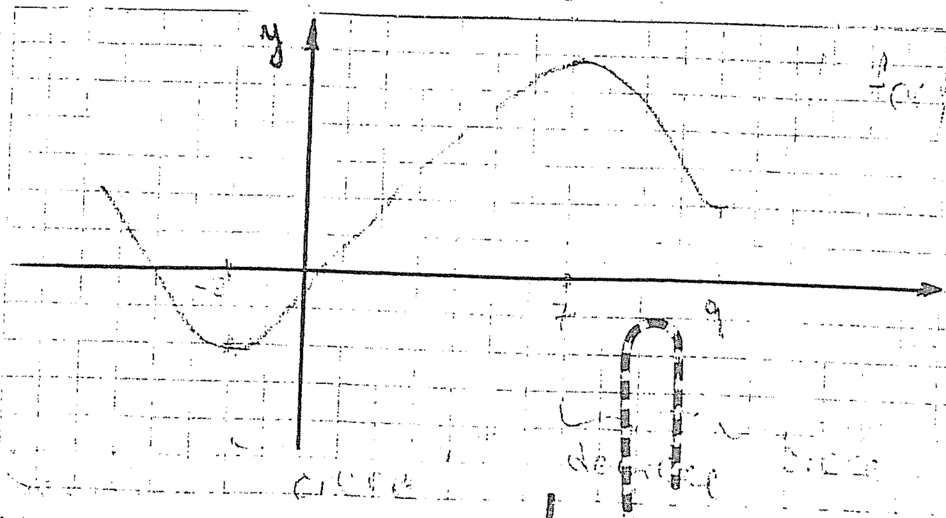
2.- Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f

i) ¿En qué intervalos crece y decrece la función?

ii) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o un mínimo locales?

iii) Si sabes que $f(0) = 0$, traza una gráfica posible de f.





i) crece: $(-2;7) \cup (9;+\infty)$

decrece: $(-\infty;-2) \cup (7;9)$

ii) MÁXIMO

$x = 7$

mínimo: $x = -2$

$x = 9$

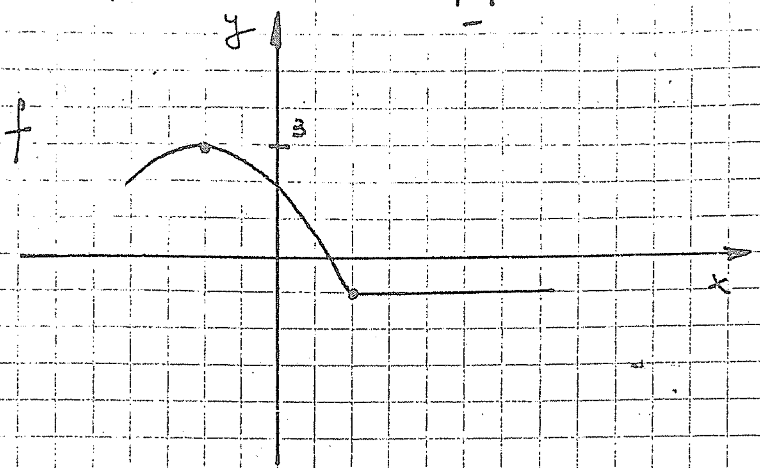
22 a) f es C en $\mathbb{R}$

$f(-2)=3$

$f(2)=-1$

$f'(x)=0 \quad \forall x>2 \Rightarrow f(x)$ es cte.

$f''(x)<0 \quad \forall x<2$ $\cap$ $-$



b) g es C en $\mathbb{R}$

$g(-1)=6$

$g(3)=-2$

$g'(x)<0$ si $x<-1$ decreciente $\forall x<-1$

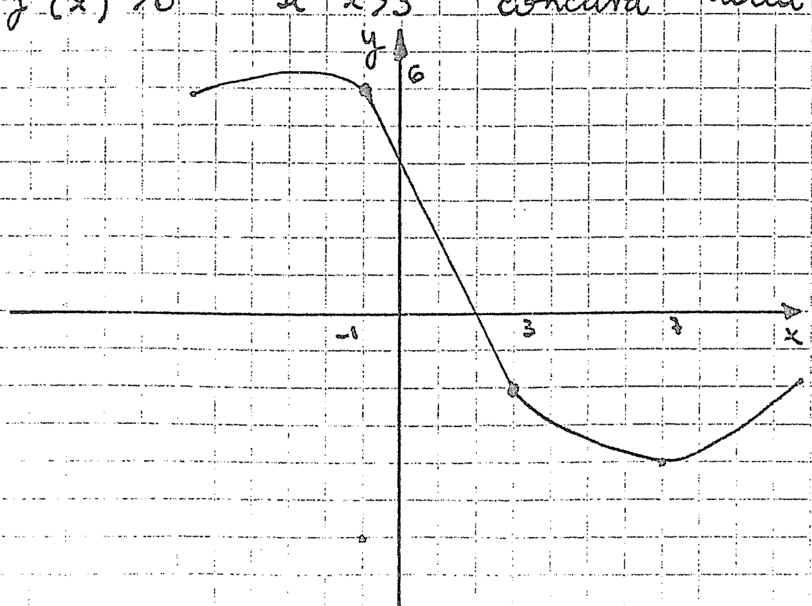
$g'(-1)=g'(3)=-2$

$g'(7)=0$ mínimo $(7; g(7))$

$g''(x)<0$ si $x<-1$ cóncava hacia $\cap$

$g''(x)=0$ si $x\in(-1;3)$ y recta

$g''(x)>0$ si $x>3$ cóncava hacia $\cup$



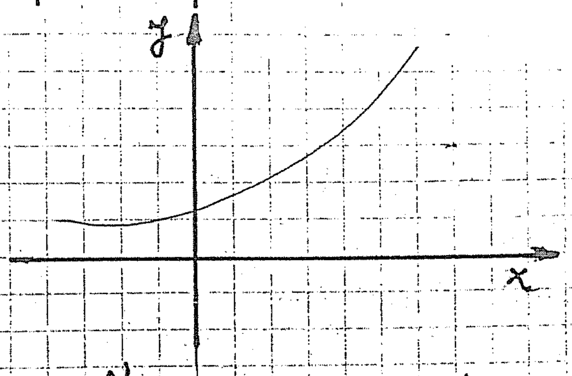
21.- Bosqueja la gráfica de <u>una</u> función tal que $\forall\, x$ se cumple:
$a)$ $f(x)>0$; $f'(x)>0$; $f''(x)>0$ $\qquad b)$ $f'(x)<0$; $f''(x)<0$

a) $f(x)>0$

$f'(x)>0 \rightarrow$ creciente

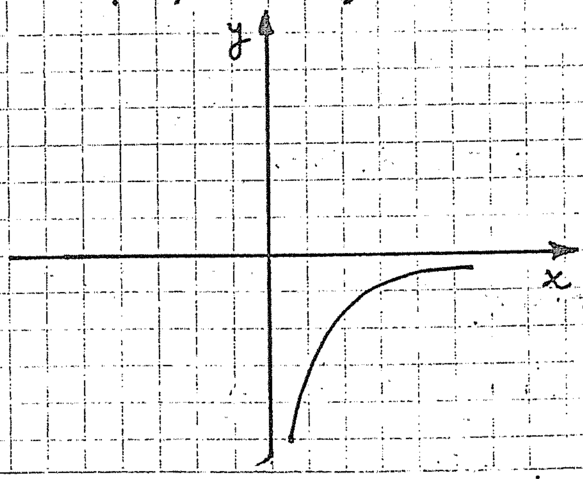
$f''(x)>0 \rightarrow$ cóncava hacia arriba

f es positiva creciente y cóncava hacia arriba



b) $f'(x)<0 \rightarrow$ decreciente

$f''(x)<0 \rightarrow$ cóncava hacia abajo



22.- Representa las funciones f y g cuyas características son:
$a) f$ *continua en* $\Re$; $f(-2)=3$; $f(2)=-1$; $f'(x)=0 \;\; \forall\, x>2$; $f''(x)<0 \;\; \forall\, x<2$

$b) g$ *continua en* $\Re$; $g(-1)=6$; $g(3)=-2$; $g'(x)<0$ *si* $x<-1$; $g'(-1)=g'(3)=-2$;
$g'(7)=0$; $g''(x)<0$ *si* $x<-1$; $g''(x)=0$ *si* $x\in(-1;3)$; $g''(x)>0$ *si* $x>3$

$c) f'(-1)=f'(1)=0$; $f'(x)<0$ *si* $|x|<1$; $f'(x)>0$ *si* $|x|>1$

$f(-1)=4$, $f(1)=0$; $f''(x)<0$ *si* $x<0$, $f''(x)>0$ *si* $x>0$

$d) f(2)=-1$, $f(0)=0$;
$f'(2)=0$, $f'(x)<0$ *si* $0<x<2$, $f'(x)>0$ *si* $x>2$
$f''(x)<0$ *si* $0\le x<1$ *o si* $x>4$, $f''>0$ *si* $1<x<4$;
$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$; $f(x)=f(-x) \;\; \forall\, x$

$y' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$

$y'' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2$

$y'' = e^x x^2 + 4x e^x + 2e^x$

$y'' = \underbrace{e^x}_{\neq 0} (x^2 + 4x + 2) = 0$

$x^2 + 4x + 2 = 0$ $\qquad x_{1-2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}}{2}$

$x_{1-2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$

$x_{1-2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \dfrac{\cancel{-4}^{\,2} + \cancel{2}^{\,1}\sqrt{2}}{\cancel{2}\ \ \cancel{2}} \Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{2}$

$x_2 = -\dfrac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} - \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow x_2 = -2 - \sqrt{2}$

$(-\infty; -2-\sqrt{2})$ $\quad (-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$ $\quad (-2+\sqrt{2}; +\infty)$

$-2-\sqrt{2} \approx -3{,}4$ $\qquad -2+\sqrt{2} \approx -0{,}58$

$f''(-4) > 0$ $\qquad f''(\ ) < 0$ $\qquad f''(0) > 0$

$+$ $\qquad\qquad -$ $\qquad\qquad +$

$Pi \ \left(-2-\sqrt{2};\ f(-2-\sqrt{2})\right)$

$Pi \ \left(-2+\sqrt{2};\ f(-2+\sqrt{2})\right)$

Abscisa del máximo $= 2$

$\dfrac{-2-\cancel{\sqrt{2}} - 2+\cancel{\sqrt{2}}}{2} = -2$

$\dfrac{-4}{2} = -2$ $\qquad$ ¡se verifica!

19.- Determina la ecuación de la parábola cúbica que pasa por (-1;1) y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en (-2;0).

$y = ax^3 + bx^2 + c$

Si pasa por el $(-1;1)$ $\quad f(-1) = 1$

$f(-1) = a(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c = 1$

$-a + b + c = 1$

$f(-2) = 0$

$f(-2) = a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c = 0$

$-8a + 4b + c = 0$

20.- Verifica que la abscisa del máximo de la curva $y = e^x x^2$ es la semisuma de los puntos de inflexión.

$y = e^x x^2$

$y' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$

$\underbrace{e^x}_{\neq 0}\,(x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0 \qquad x = 0$

$x = -2$

$(-\infty; -2) \qquad (-2;0) \qquad (0;+\infty)$

$-2 \qquad 0$

$f'(-3) > 0$ crece $\qquad f'(-1) < 0$ decrece $\qquad f'(2) > 0$ crece

máximo en $(-2; f(-2))$ $\qquad$ mínimo $(0; f(0))$

abscisa del máximo

$\boxed{x = -2}$

4.- Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f.

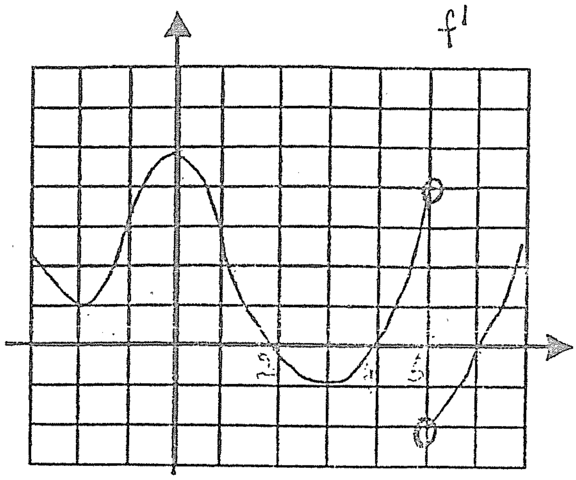
a) ¿en qué intervalos crece y en cuáles decrece f?

b) ¿En qué valores de x la función tiene un máximo o un mínimo locales?

c) ¿En qué intervalos la función tiene concavidad positiva y en cuáles negativa?

d) Indica cuáles son los valores de x para los cuales existen puntos de inflexión.

e) Grafica f



a) Crece : $(-3;2) \cup (4;5) \cup (6;7)$

decrece : $(2;4) \cup (5;6)$

b) Máximo : $x=2$

mínimo : $x=4$

$x=6$

c) Concavidad positiva : $(-2;0) \cup (3;5) \cup (5;7)$

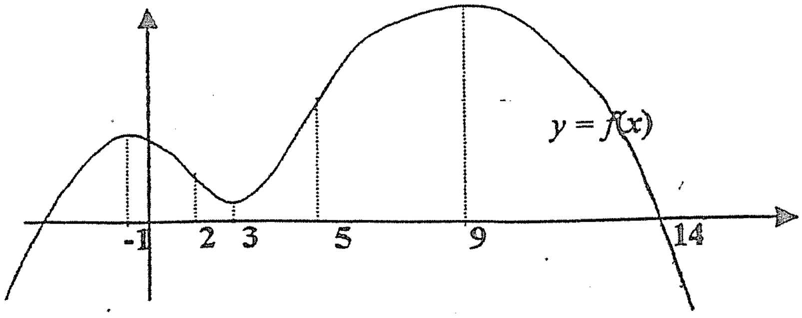
Concavidad negativa : $(-\infty;-2) \cup (0;3)$

d) Puntos de inflexión : $x=-2$

$x=0$

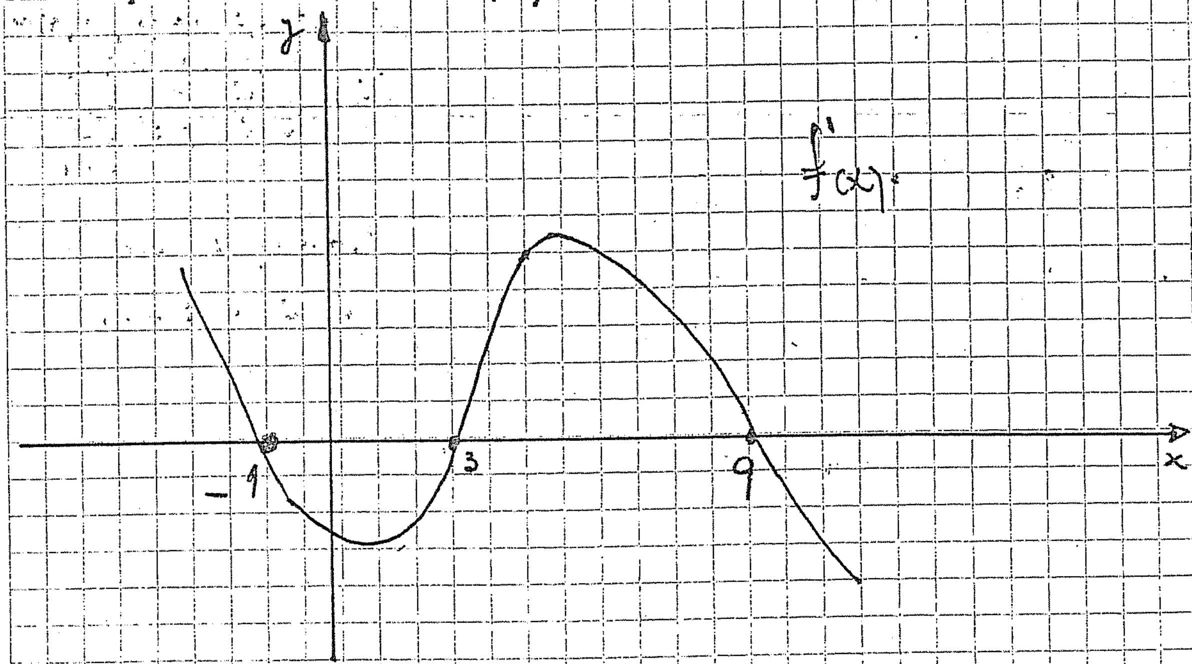
$x=3$

3.- Utiliza la gráfica de f para estimar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la derivada f' de f.

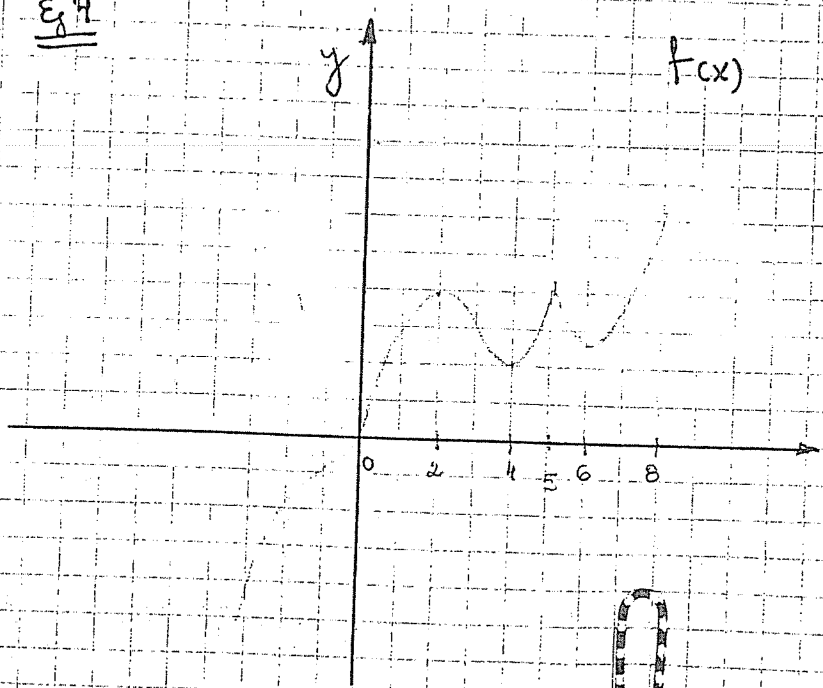


f' decrece: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$

f' crece: $(2; 5)$



Ej 4



22)

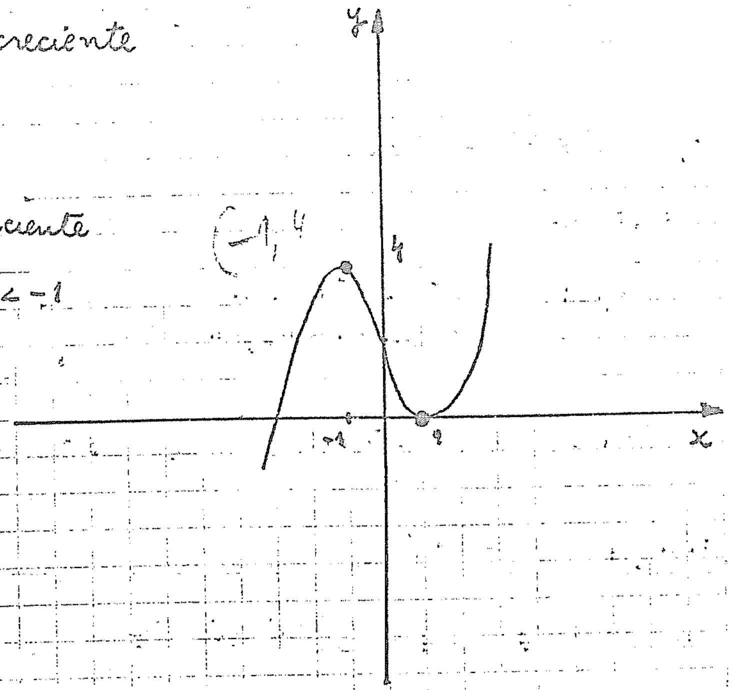
c) $f'(-1) = f'(1) = 0$

$f'(x) < 0$ si $|x| < 1$ decreciente

$f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$

$f'(x) > 0$ si $|x| > 1$ creciente

$f'(x) > 0$ $x > 1$ $\vee$ $x < -1$



$f(-1) = 4$, $f(1) = 0$

$f''(x) < 0$ si $x < 0$ ∩

$f''(x) > 0$ si $x > 0$ ∪

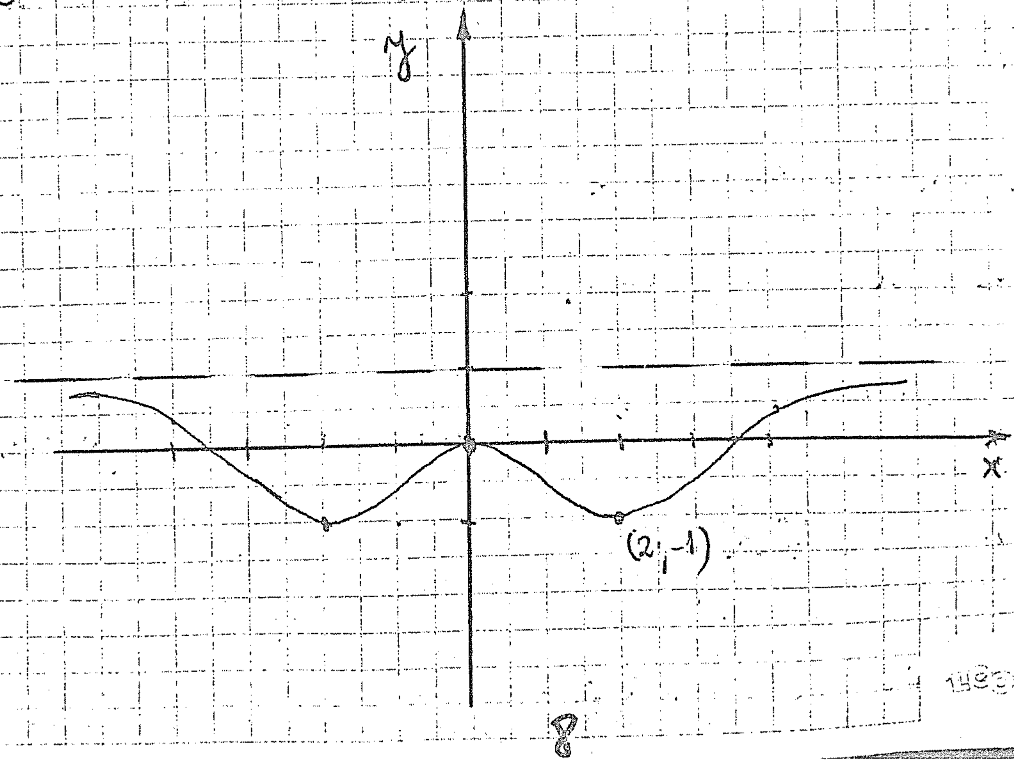
22 d) $f(2) = -1$ $f(0) = 0$

$f'(2) = 0$ $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ decrece

$f'(x) > 0$ si $x > 2$ crece

$f''(x) < 0$ si $0 \leq x < 1$ o si $x > 4$ $f''(x) > 0$ si $1 < x < 4$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ $f(x) = f(-x)$ $\forall x$



23.- Realiza el estudio completo de las siguientes funciones:

$a)\ y = x^3 - 3x^2 + 3x$ $\qquad b)\ y = \dfrac{1}{x^2+3}$ $\qquad c)\ y = \dfrac{x^2+1}{x}$

$d)\ y = x\,e^x$ $\qquad e)\ y = x.\ln x$ $\qquad f)\ y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ · no tiene simetría.

Df: $\mathbb{R}$

Ceros: $x^3 - 3x^2 + 3x = 0$

$x(x^2 - 3x + 3) = 0$ → $\boxed{x = 0}$; → $x^2 - 3x + 3 = 0$

$x_{1-2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 3}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$ raíces complejas

Polos: no tiene

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0$ $\qquad x_{1-2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4.3.3}}{2}$

$x_{1-2} = \underline{\underline{1}}$ PC.

$(-\infty; 1)$ $\qquad (1; +\infty)$

1

$f'(0) > 0$ $\qquad f'(2) > 0$

f es creciente $\forall x \in Df$ $\qquad$ no tiene máximo ni mínimo.

Intervalos de concavidad

$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$(-\infty, 1)$ $\qquad (1; +\infty)$

1

$x = 1$ PI en $(1; f(1))$

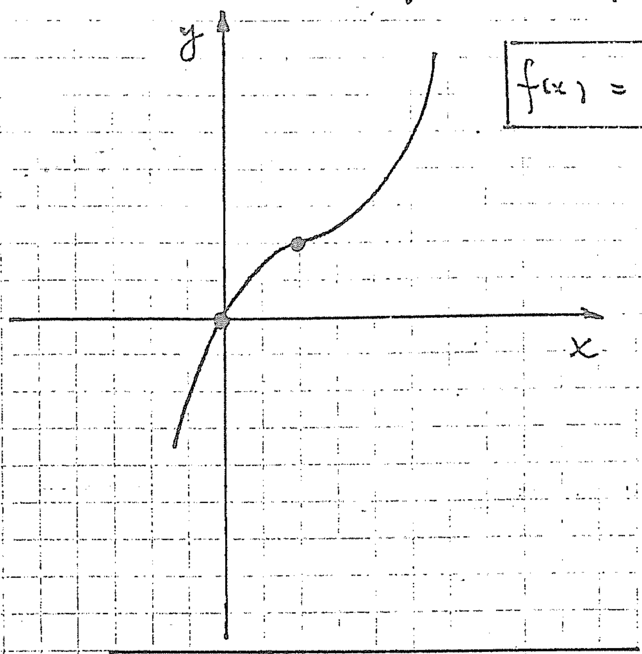
$f''(0) < 0$ $\qquad f''(2) > 0$

$\cap$ (−) $\qquad \cup$ (+)

cambia la concavidad.

Asíntotas: no tiene

Continuidad: f(x) es continua $\forall x \in Df$ pues es una función polinómica.



$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x}$$

b) $y = \frac{1}{x^2+3} \Rightarrow y = (x^2+3)^{-1}$

Df: $\mathbb{R}$ If: $\mathbb{R}^+$

CEROS: no tiene

POLOS: no tiene

- Intersección con los ejes: no tiene con el eje x; con el eje $y \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$
- es función par pues $f(x) = f(-x)$

ASÍNTOTAS

VERTICAL: no tiene ; OBLICUA: no tiene

HORIZONTAL

$$\left.\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+3} = 0 \; ; \; \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+3} = 0 \right\} \boxed{y=0} \text{ AH}$$

CONTINUIDAD: f(x) es continua $\forall x \in Df$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$y' = -1 \, (x^2+3)^{-2} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{-2x}{x^2+3} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ P.C.}$$

$(-\infty;0)$ $(0;+\infty)$ $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$

0

$f'(-1) > 0$ $f'(1) < 0$

crece decrece

Tiene un máximo en $(0; f(0))$

CRECE: $(-\infty;0)$

DECRECE: $(0;+\infty)$

Intervalos de concavidad

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+3)^2 - (-2x)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\cancel{(x^2+3)}\left[+(x^2+3) - 4x^2\right]}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(-3x^2+3)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0 \qquad x^2-1=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$(-\infty;-1)$ $(-1;1)$ $(1;+\infty)$

-1 1

$f''(-2) > 0$ $f''(0) < 0$ $f''(2) > 0$

$+$ $-$ $+$

11

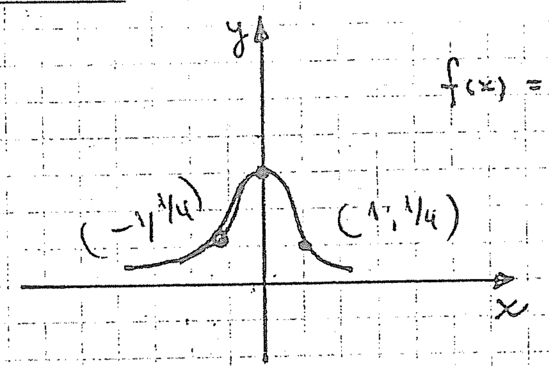
PUNTOS DE INFLEXIÓN:

$$P_i \begin{cases} (-1;\ f(-1)) \Rightarrow (-1;\ \frac{1}{4}) \\ (1;\ f(1)) \Rightarrow (1;\ \frac{1}{4}) \end{cases}$$

INTERVALOS DE CONCAVIDAD

CÓNCAVA POSITIVA: $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

CÓNCAVA NEGATIVA: $(-1;1)$



$f(x) = \frac{1}{x^2+3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(-1) = \frac{1}{4}$

$f(1) = \frac{1}{4} \qquad f(0) = \frac{1}{3}$

c) $y = \frac{x^2+1}{x}$

Df: $\mathbb{R} - \{0\}$

ceros: no tiene

Polos: $x = 0$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

CRECE: $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

DECRECE: $(-1;0) \cup (0;1)$

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$x^2 = 1$

$x = 1$

✓ $x = -1$

$(-\infty;-1) \quad (-1;0) \quad (0;1) \quad (1;+\infty)$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

$f'(-2) > 0 \quad f'(-0,5) < 0 \quad f'(0,5) < 0 \quad f'(2) > 0$

crece — decrece — decrece — crece

máximo — mínimo

Máximo en $(-1; f(-1))$ $\qquad f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = \boxed{-2}$

mínimo en $(1; f(1))$ $\qquad f(1) = \frac{1^2+1}{+1} = \boxed{2}$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Intervalos de concavidad

$$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2x.x^2 - (x^2-1).2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{x^4} \Rightarrow y'' = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} \neq 0$$

$(-\infty; 0)$ $\qquad (0; +\infty)$

0

$f''(-1) < 0$ $\qquad f''(1) > 0$

$-$ $\qquad +$

CONTINUIDAD : $f(x)$ es discontinua esencial para $\boxed{x=0}$

ASÍNTOTAS

AV. $\quad x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \boxed{x=0} \text{ es AV}$$

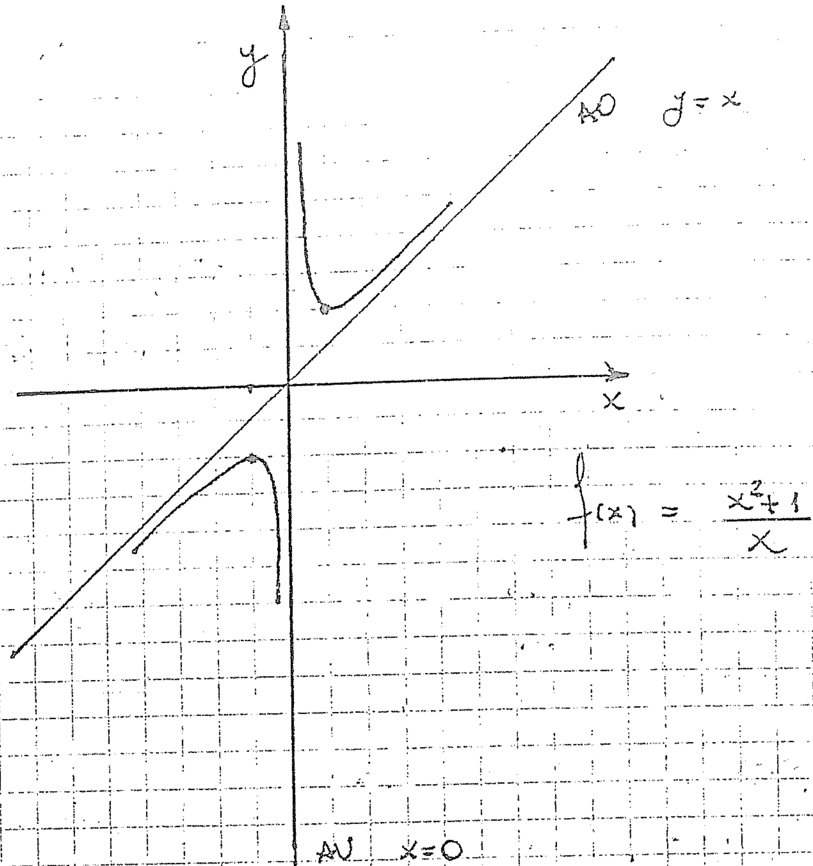
AH $\Rightarrow$ no tiene

AO : $\quad y = mx+b \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=x \quad \text{es AO}}$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \boxed{1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - m.x \right]$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2+1}{x} - x \right] \Rightarrow b = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x} = \boxed{0}$$



d) $y = xe^x$

<u>Ceros</u> : tiene $\boxed{x=0}$ <u>Df</u> : $\mathbb{R}$

<u>Polos</u> : no tiene

<u>Df</u> : $\mathbb{R}$

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento</u>

$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y' = \underbrace{e^x}_{\neq 0}(1+x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$(-\infty; -1)$ $(-1; +\infty)$

-1

$f(x) = xe^x$

$f(-1) = -1\,e^{-1}$

$\boxed{f(-1) = -e^{-1}}$

$f'(-2) < 0$ $f'(2) > 0$

decrece crece

CRECE: $(-1; +\infty)$

DECRECE: $(-\infty; -1)$

mínimo $(-1; f(-1))$

$\boxed{(-1; -e^{-1})}$

Intervalos de concavidad

$y' = e^x + xe^x$

$y'' = e^x + e^x + xe^x$

$y'' = 2e^x + xe^x \Rightarrow y'' = \underbrace{e^x}_{\neq 0}(2+x) = 0$

$\boxed{x = -2}$

$(-\infty; -2) \qquad (-2; +\infty)$

-2

$f''(-3) < 0 \qquad f''(3) > 0 \qquad f(-2) = -2e^{-2}$

CONCAVA POSITIVA: $(-2; +\infty)$
CONCAVA NEGATIVA: $(-\infty; -2)$
} cambia la concavidad

$\therefore (-2; f(-2))$ es PI

$\boxed{(-2; -2e^{-2})}$

ASINTOTAS

AV. no tiene (no tiene polos)

AH:

$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$ Aplico L'Hopital

$\cancel{\frac{x}{\frac{1}{e^x}}}\ \cancel{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

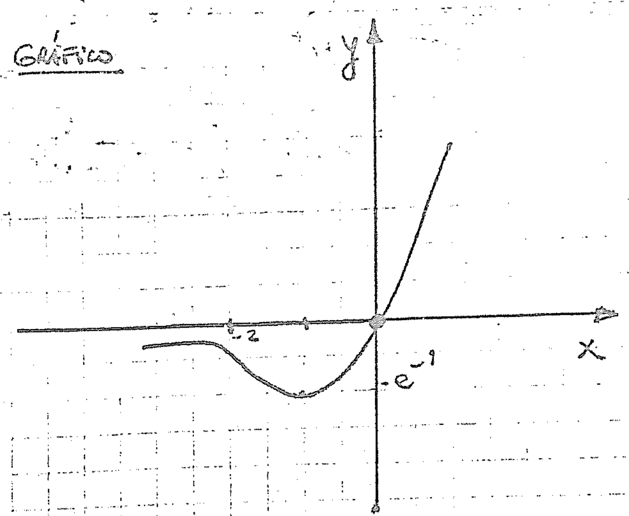
$\cancel{\frac{-1\,e^{x}}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{(e^x)^2} = e^{-x}}$

AH por izquierda

AO: no tiene

CONTINUIDAD: es continua para todo $x \in \mathbb{R}$

GRÁFICO



$f(x) = x\,e^{-x}$

e) $y = x.\ln x$ · Simetría: no tiene

Df: $\mathbb{R}^+$

Ceros: no tiene

Polos: no tiene

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$y' = \ln x + \cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}$

$f'(e^{-2}) = \ln e^{-2} + 1 = \boxed{-1}$

$f'(e) = \ln e + 1 = \boxed{2}$

$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\boxed{e^{-1} = x}$

$(0; e^{-1})$ $(e^{-1}; +\infty)$

0 e^{-1}

$f(e^{-1}) = e^{-1}.\ln e^{-1}$

$f'(e^{-2}) < 0$ $f'(e) > 0$

decrece crece

mínimo $(e^{-1}; f(e^{-1}))$

$(e^{-1}; -e^{-1})$

Intervalos de concavidad

CONCAVIDAD POSITIVA

$(0; +\infty)$

$y'' = \frac{1}{x}$

$(0; +\infty)$

0

$f''(2) > 0$ (+)

ASÍNTOTAS

AV: no tiene (no tiene polos) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

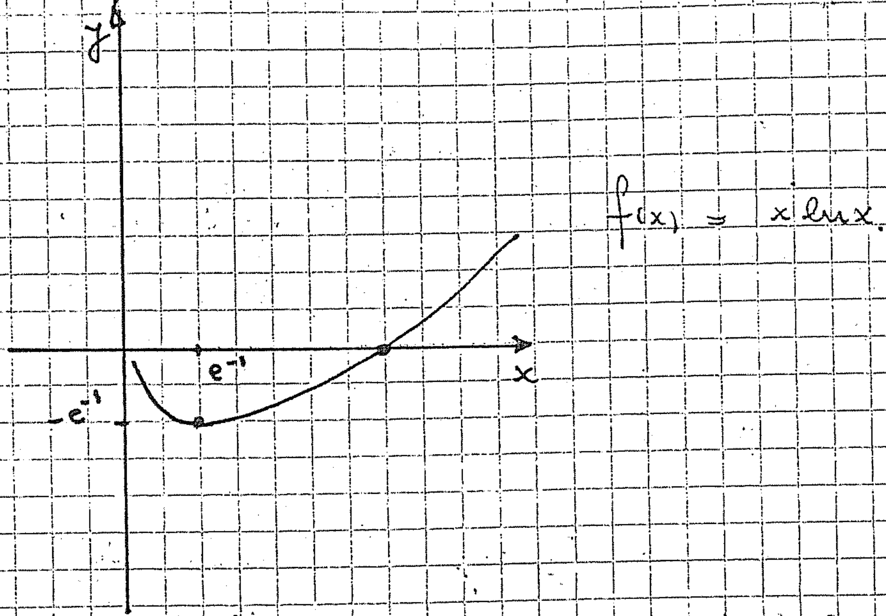
AH: no tiene

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

no tiene.

AO: no tiene

CONTINUIDAD: es continua $\forall x \in \mathbb{R}^+$



f) $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ Simetría: no tiene

Df. $x-1>0 \Rightarrow x>1$

Df: $(1; +\infty)$

Ceros: no tiene

Polos: $x = 1$

ASÍNTOTAS:

AV: $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ AO: no tiene

AH: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$y = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \qquad Df: \; x > 1$$

CRECE : $(2;+\infty)$

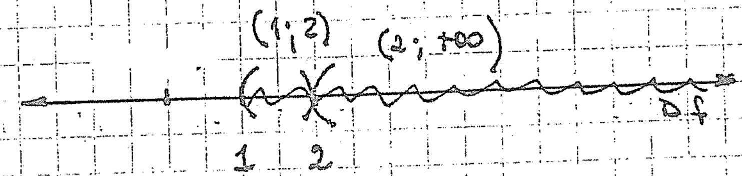
DECRECE : $(1;2)$

$$y' = \frac{\sqrt{x-1} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(\sqrt{x-1})^2}$$

$$y' = \frac{2(\sqrt{x-1})^2 - x}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)} \Rightarrow y' = \frac{2x-2-x}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)}$$

$$y' = \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)} = 0 \Rightarrow x-2=0$$

$$\boxed{x = 2}$$



$f(2) = 2$

$f'(1{,}5) < 0$ decrece $\qquad f'(3) > 0$ crece

mínimo en $(2; f(2)) = (2;2)$

Intervalos de concavidad

$$y' = \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)} = \frac{x-2}{2\,(x-1)^{3/2}}$$

$$y' = \frac{2(x-1)^{3/2} - (x-2)\,\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\left[2\,(x-1)^{3/2}\right]^2} = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}} - 3(x-2)(x-1)^{\frac{1}{2}}}{4\,(x-1)^3}$$

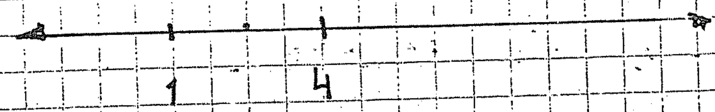
$$y' = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}\left[2(x-1) - 3(x-2)\right]}{4\,(x-1)^3} = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(-x+4)}{4\,(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(4-x)}{4(x-1)^3} = 0$$

$(x-1)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ pues $x=1 \notin Df$.

$f''(x) = 0 \therefore \boxed{x=4}$

$(1;4)$ $(4;+\infty)$

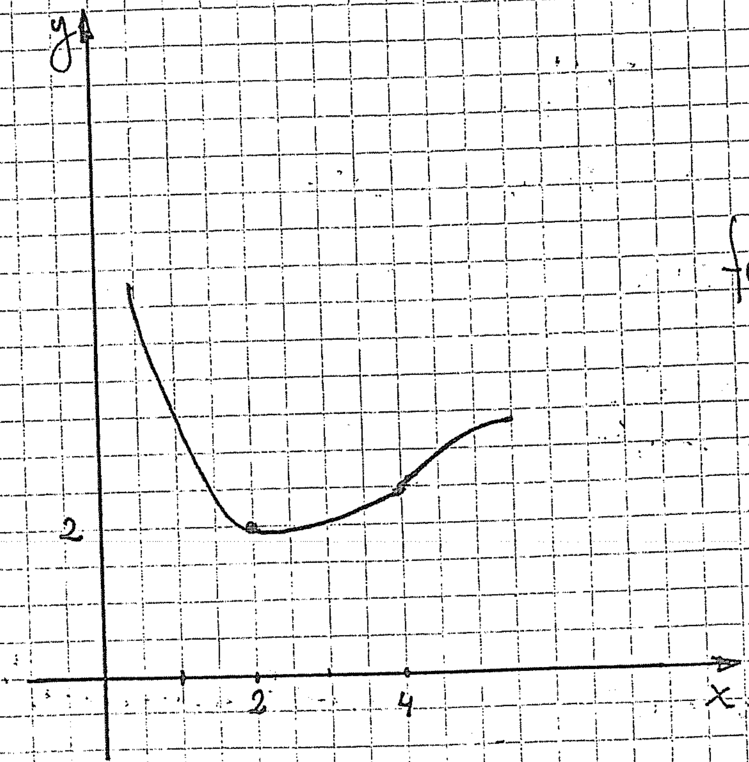


$f(4) = \frac{4}{\sqrt{4-1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$

$f''(2) < 0$ $f''(5) > 0$

$\cap$ $-$ $\cup$ $+$

cambia la concavidad en $x=4 \therefore (4; f(4))$ Pi.



$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

ASINTOTAS

1/8

$\boxed{\text{CÁLCULO I}}$ TP N° 8

FÓRMULA DE TAYLOR

1) Determinar el orden de contacto en el orígen para $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$

$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$g'(x) = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} \Rightarrow g'(0) = 1 + 0 + 0^2 = 1$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{f'(0) = g'(0)}$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$g''(x) = 1 + 2x \Rightarrow g''(0) = 1 + 2.0 = 1$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{f''(0) = g''(0)}$

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1.$

$g'''(x) = 2$ $g'''(0) = 2$ $\Big\} \to f'''(0) \neq g'''(0)$

CONTACTO DE ORDEN 2

—x—

2) ¿ Para qué valores de los coeficientes a, b y c las funciones :

a) $f(x) = ax + b$

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ tienen contacto superior a 1 ?

$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x$ $\Big\} \Rightarrow 3x^2 - 6x = a$

$3 \cdot 1^2 - 6.1 = a$

$-3 = a$

$\boxed{a = -3}$

$f''(x) = 0$

$g''(x) = 6x - 6$ $\Big\} \Rightarrow 6x - 6 = 0$ $\boxed{x = 1}$

$f(x) = g(x)$

$ax+b = x^3-3x^2+2$

$-3.1+b = 1^3-3.1^2+2$

$-\cancel{3}+b = 1-\cancel{3}+2$

$\boxed{b=3}$

b) $f(x) = ax^2+bx+c$

$g(x) = e^x$

tienen contacto de 2º orden en x_0?

$f(x) = g(x)$

$ax^2+bx+c = e^x$

$f'(x) = g'(x)$

$2ax+b = e^x \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cdot e^x}{\cancel{2}}x+b = e^x$

$\boxed{b = e^x - e^x x}$

$f''(x) = g''(x)$

$2a = e^x \Rightarrow \boxed{a = \frac{e^x}{2}}$

$f'''(x) \neq g'''(x)$ ORDEN 2º

$0 \neq e^x$

$ax^2+bx+c = e^x$

$\frac{e^x}{2}\cdot x^2 + (e^x-e^x x)x + c = e^x$

$\frac{e^x}{2}x^2 + e^x x - e^x x^2 + c = e^x$

$e^x\left(\frac{x^2}{2} - x^2 + x\right) + c = e^x$

$c = e^x - e^x\left(-\frac{x^2}{2} - x\right)$

$\boxed{c = e^x\left(1+\frac{x^2}{2}+x\right)}$

Serie de Taylor y Mac-Laurin

Si una función f tiene derivadas de todo orden en $x = c$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

2/8 se llama la serie de Taylor de $f(x)$ en c. $c=0 \to$ Mac Laurin.

3) Desarrollar el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 - 1$ en potencias de $(x-1)$ usando la fórmula de Taylor.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 - 1 \Rightarrow f(1) = -2$$
$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(1) = -2$$
$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f''(1) = 0$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 48x + 6 \Rightarrow f'''(1) = 18$$
$$f^{IV}(x) = 120x - 48 \Rightarrow f^{IV}(1) = 72$$
$$f^{V}(x) = 120 \Rightarrow f^{V}(1) = 120$$
$$f^{VI}(x) = 0 \Rightarrow f^{VI}(1) = 0$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + f^{IV}(1)\frac{(x-1)^4}{4!} + f^{V}(1)\frac{(x-1)^5}{5!}$$

$$f(x) = -2 - 2(x-1) + 0 + 18\frac{(x-1)^3}{3!} + 72\frac{(x-1)^4}{4!} + 120\frac{(x-1)^5}{5!}$$

$$f(x) = -2 - 2(x-1) + \frac{\cancel{18}^{3}(x-1)^3}{\cancel{6}_{1}} + \frac{\cancel{72}^{3}(x-1)^4}{\cancel{24}_{1}} + \frac{\cancel{120}^{1}(x-1)^5}{\cancel{120}_{1}}$$

$$\boxed{f(x) = -2 - 2(x-1) + 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5}$$

—x—

4) Hallar los polinomios de Taylor de grado $n = 1; 3; 6; 9$ en a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 1$

a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$

¿En qué casos son una aproximación exacta de $f(x)$?

$$f(x) = x^3 + 3x - 2 \Rightarrow f(0) = -2 \qquad f^{IV}(x) = f^{V}(x) = f^{VI}(x) = \dots = f^{IX}(x) = 0$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(0) = 3$$
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f''(0) = 6$$

Para $n=1$

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad a=0$$

$$P(x) = -2 + 6x$$

$$P(x) = -2+6x \Rightarrow \boxed{P(x) = 6x-2}$$

Para $n=3$

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$P(x) = -2 + 3x + 0 + \frac{\cancel{6}x^3}{\cancel{6}}$$

$$P(x) = -2+3x+x^3 \Rightarrow \boxed{P(x) = x^3+3x-2}$$

Para $n=6$ y $n=9$

$$P_6(x) = P_9(x) = x^3+3x-2$$

-- x --

b) $x_0 = 1$

$$f(x) = x^3+3x-2$$

$$f(1) = 1^3+3.1-2 = 1+3-2 = \boxed{2}$$

$$f'(1) = 3.1^2+3 = 6$$

$$f''(1) = 6.1 = 6$$

$$f'''(1) = 6$$

$n=1$ $P(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$

$$P_1(x) = 2 + 6(x-1)$$

$n=3$ $P_3(x) = 2 + 6(x-1) + 6\frac{(x-1)^2}{2!} + 6\frac{(x-1)^3}{3!}$

3/8

Para $n=6$ y $n=9$

$P_3(x) = P_6(x) = P_9(x)$

— x —

5) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en x_0 para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $x_0 = 0$

$f(x) = (x-1)^{-1} \Rightarrow f(0) = -1$

$f'(x) = -1\,(x-1)^{-2} \Rightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = 2\,(x-1)^{-3} \Rightarrow f''(0) = -2$

$f'''(x) = -6\,(x-1)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = -6$

$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\,\frac{x^3}{3!}$

$P_3(x) = -1 - 1\,x + (-\cancel{2})\,\frac{x^2}{\cancel{2}} + (-\cancel{6})\,\frac{x^3}{\cancel{6}}$

$P_3(x) = -1 - x - x^2 - x^3$

— x —

b) $f(x) = \cos(x-2) \Rightarrow f(2) = 1$ $x_0 = 2$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x-2) \Rightarrow f'(2) = 0$

$f''(x) = -\cos(x-2) \Rightarrow f''(2) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen}(x-2) \Rightarrow f'''(2) = 0$

$P_3(x) = 1 + 0(x-2) + (-1)\,\frac{(x-2)^2}{2!} + 0\,\frac{(x-2)^3}{3!}$

$P_3(x) = 1 - \frac{(x-2)^2}{2}$

) $f(x) = \sqrt{1+x}$ $x_0 = 0$ $f(0) = 1$

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$

$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} + f'''(0)\,\frac{x^3}{6}$

$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{3}^{1}}{8}\,\frac{x^3}{\cancel{6}_2}$

$\boxed{P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}$

- x -

5) Obtener el polinomio de Taylor para los siguientes casos:

a) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ orden 5 $x_0 = 1$

$f(1) = \operatorname{sen}\pi = 0$

$f'(x) = \pi \cos \pi x \Rightarrow f'(0) = \pi$

$f''(x) = -\pi^2 \operatorname{sen}\pi x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x \Rightarrow f'''(0) = -\pi^3$

$f^{IV}(x) = -\pi^4 \operatorname{sen}\pi x \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \pi^5 \cos\pi x \Rightarrow f^{V}(0) = \pi^5$

$P_5(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + f^{IV}(1)\frac{(x-1)^4}{4!} + f^{V}(1)\frac{(x-1)^5}{5!}$

$P_5(x) = 0 + \pi(x-1) + 0 + (-\pi^3)\frac{(x-1)^3}{6} + 0 + \pi^5\frac{(x-1)^5}{120}$

4/8

$$\boxed{P_5(x) = \pi(x-1) - \pi^3 \frac{(x-1)^3}{6} + \pi^5 \frac{(x-1)^5}{120}}$$

— x —

b) $f(x) = e^x$ orden n $x_0 = 0$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots\ f^{n}(x) = e^x$$

$$\boxed{P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}$$

— x —

c) $f(x) = e^{-x}$ $x_0 = 0$

$$f'(x) = -e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x}$$
$$f'''(x) = -e^{-x}$$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{n}(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{P_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \quad \frac{x^n}{n!}}$$

— x —

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ orden n $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{P_n(x) = 1 + 0 + \frac{x^2}{2!} + 0 + \cdots \frac{x^n}{n!}}$$

1) Determinar el resto de q_u de las siguientes identidades:

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(x)$

RESTO: $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)\,(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}}$

$f'(x) = f''(x) = \text{-----} = f^{v}(x) = e^x$

$R_4(x) = \frac{e^{\xi} x^5}{5!} \qquad 0 < \xi < x$

$\boxed{R_4(x) = \frac{e^{\xi} x^5}{120}}$

b) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + R_6(x) \qquad x_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$f'(x) = -1\,(1-x)^{-2} \qquad f^{VII}(x) = -5040\,(x-1)^{-8}$

$f''(x) = 2\,(x-1)^{-3}$

$f'''(x) = -6\,(x-1)^{-4}$

$f^{IV}(x) = 24\,(x-1)^{-5}$

$f^{V}(x) = -120\,(x-1)^{-6}$

$f^{VI}(x) = 720\,(x-1)^{-7}$

5/8

$$R_6(x) = \frac{f^{VII}(z)}{7!}x^7$$

$$R_6(x) = \frac{\frac{-5040}{(x-1)^8}}{7!}x^7 \qquad 0 < z < x$$

$$R_6(x) = \frac{-5040}{7!}\frac{x^7}{(x-1)^8}$$

$$\boxed{R_6(x) = \frac{-x^7}{(x-1)^8}}$$

— x —

c) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$ hasta la derivada 6ª

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$
$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$
$f^{V}(x) = \cos x \Rightarrow f^{V}(0) = 1$
$f^{VI}(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f^{VI}(0) = 0$

$$\boxed{R_5(x) = -\operatorname{sen} z \frac{x^6}{6!}}$$

— x —

d) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + R_3(x)$

$f(x) = \ln x$ $\qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad R_3(x) = \frac{\frac{2}{z^3}x^3}{3!} \Rightarrow \boxed{R_3(x) = \frac{x^3}{3z^3}}$

) Las siguientes funciones admiten el desarrollo de Mac Laurin para todo x perteneciente a los reales. Hallar su desarrollo expresando también el resto.

a) $f(x) = e^x$

$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{n}(x) = e^x$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{n}(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = f^{n+1}(z)\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)\,(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{e^z\, x^{n+1}}{(n+1)!}} \qquad 0 < z < x$$

— x —

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$P(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{n}(0)\frac{x^n}{n!}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - f^{n}(0)\frac{x^n}{n!}$$

6/8

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen}\left[z + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]} \qquad 0 < z < x$$

— x —

9) ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor de e^x en el origen de modo de obtener un polinomio que aproxime dicha función en todo el intervalo $[-1;1]$ con un error menor que 10^{-4}? A partir del cálculo hecho hallar las tres primeras cifras del desarrollo decimal del número e.

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)\,(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad c=0$$

$$\varepsilon < 10^{-4} \qquad [-1;1]$$

$$e^x = P_n(x) + R_n(x)$$

$$0 < z < x$$

$$x < z < 0$$

$$R_n(x) = \frac{e^z\, x^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}$$

$$\frac{e^z\, x^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}0001$$

Tomamos: $|R_n(x)| = \left|\frac{e^z\, x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|e^z|\,|x^{n+1}|}{|(n+1)!|}$

$$|R_n(x)| = \frac{e^z\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}0001$$

$-1 \leq x \leq 1 \qquad |x| \leq 1 \Rightarrow |x|^{n+1} < 1$

acoto

$$|R_n(x)| = \frac{e^{z}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3 \cdot 1}{(n+1)!}$$

Si x esta $-1 \leq x \leq 1$

$0 < z < x \leq 1$

$-1 < z < 1 \Rightarrow e^{-1} < e^{z} < e^{1} = e < 3$

$-1 \leq x < z < 0$

$e^{c} < 3$

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10000}$$

$$|x|^{n+1} \leq 1^{n+1} = 1$$

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10000} \Rightarrow 30000 < (n+1)!$$

$8! = 40320$

$(7+1)! > 30.000 \Rightarrow \boxed{n=7}$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} \quad \text{en } [-1,1]$$

tiene un error menor que 1 diezmilésimo

$e^{x} = P_7(x) + R_7(x) \qquad x = 1$

$$P_7(1) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{685}{252}$$

$P_7(1) \simeq 2,718253968 \qquad e \simeq 2,718281828$

7/8

10) Sea $f(x) = 1 + 3x + \text{sen}\, x$

a) Escribir el polinomio de Taylor en $x=0$ de orden 4.

$$\begin{array}{llll} f(x) = 1 + 3x + \text{sen}\, x & & f(0) = 1 + 3.0 + \text{sen}\, 0 = \boxed{1} \\ f'(x) = 3 + \cos x & & f'(0) = 3 + \cos 0 = \boxed{4} \\ f''(x) = -\text{sen}\, x & & f''(0) = \boxed{0} \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = \boxed{-1} \\ f^{IV}(x) = \text{sen}\, x & & f^{IV}(0) = \boxed{0} \end{array}$$

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)\, x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} + f'''(0)\,\frac{x^3}{6} + f^{IV}(0)\,\frac{x^4}{24}$$

$$P_4(x) = 1 + 4x + 0 + (-1)\,\frac{x^3}{6} + 0$$

$$\boxed{P_4(x) = 1 + 4x - \frac{x^3}{6}}$$

- x -

b) Calcular, estimando el resto, el error que se comete al reemplazar $f(1/3)$ por $P(1/3)$

$$f(1/3) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + \text{sen}\,\frac{1}{3} = 2 + \text{sen}\,\frac{1}{3} = 2{,}0058$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{27 \cdot 6} = 2{,}327$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ $\qquad R_4 \leq 0{,}000035$

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| 1 + 3x + \text{sen}\, x - \frac{x^5}{5!} \right|$$

TERMINAR.

$f(x) = \sqrt{16+x}$ $\Rightarrow$ $x = 0,5$

$f(16,5) = \sqrt{16+0,5}$

Sea $f(x) = \sqrt{16+x}$, calcular aproximadamente $\sqrt{16,5}$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 en $x=0$, acotando el resto para estimar el error que se comete

$f(x) = (16+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(0) = 16^{1/2} = \boxed{4}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(16+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}\, 16^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(16+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}(16)^{-3/2} = \boxed{\frac{-1}{256}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(16+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(16+x)^5}}$

$0 < c < x$

$x < c < 0$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2}$

$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 \Rightarrow R_2(x) = \frac{f'''(c)}{6}x^3$ $\qquad \frac{\frac{\cancel{3}}{8\sqrt{(16+c)^5}}}{\cancel{6}\,2}$

$R_2(x) = \frac{\frac{\cancel{3}^{1}}{8\sqrt{(16+c)^5}}}{\cancel{6}\,2}$

con calculadora

$\sqrt{16,5} = 4,062019202\ldots$

$\boxed{R_2(x) = \frac{(16+c)^{-5/2}}{16}\,x^3}$

$P_2(x) = 4 + \frac{1}{8}x + \left(\frac{-1}{256}\right)\frac{x^2}{2}$

$P_2(x) = 4 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{512}x^2$

$\underbrace{P_2(0,5)}_{\sqrt{16,5}} = 4 + \frac{1}{8}\cdot 0,5 - \frac{1}{512}\cdot 0,5^2 \simeq 4,062011719$

5 decimales exactos

8|8

$$\sqrt{16+x} = P_2(x) + R_2(x)$$
$$\sqrt{16{,}5} = P_2(0{,}5) + R_2(0{,}5)$$

$\varepsilon < 0{,}00001$ $\qquad 0 < c < 0{,}5$

$$R_2(0{,}5) = \frac{1}{16}(16+c)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$R_2(0{,}5) = \frac{1}{128}(16+c)^{-\frac{5}{2}} < \frac{1}{128}\,16^{-5/2} = \frac{1}{\sqrt{16^5}}$$
$$R_2(0{,}5) = \frac{1}{128}(16+c)^{-5/2} < \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{1024} = \frac{1}{131072}$$

$$\underbrace{7{,}629394531106}_{\simeq 8}$$

$0 < c < 0{,}5$ $\qquad$ sumo 16
$$16 < 16+c < 16{,}5$$
$$16^{5/2} < (16+c)^{5/2} < (16{,}5)^{5/2}$$
$$(16{,}5)^{-5/2} < (16+c)^{-5/2} < 16^{-5/2}$$

$8\cdot10^{-6} <$

Para el resto:
$$R_2(0{,}5) < 8.10^{-6} < 10.10^{-6} = 10^{-5} < 0{,}00001$$

significa que tengo 5 decimales exactos.

$$\sqrt{16{,}5} \simeq \underbrace{4{,}06201}17$$

Con calculadora $\sqrt{16{,}5} \simeq 4{,}062019202$

b) Sabiendo que $a \ln(bx+1) \simeq \frac{15}{2}(2x+3x^2)$ hallar a y b.

$$f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} = -15x - \frac{75}{2}x^2$$

$f(0) = 0$

$f'(0) = -15$

$f''(0) = -75$

$$f(x) = a \ln(1+bx) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{ab}{1+bx} \Rightarrow f'(0) = a \cdot b = -15$$

$$f''(x) = \frac{-ab^2}{(1+bx)^2} \Rightarrow f''(0) = ab^2 = -75$$

$$\boxed{a = -3} \quad \wedge \quad \boxed{b = 5}$$

$$f(x) = a \ln(1+bx)$$

$$\boxed{f(x) = -3 \ln(1+5x)}$$

8/8

12) a) Si $f(x) = \text{sen}(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$
determinar a y b si su polinomio de Mac. Laurin de grado uno es $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+4x)$
$[x_0 = 0]$

$f(x) = \text{sen}(ax+b) \Rightarrow f(0) = \text{sen}\, b$
$f'(x) = a\cos(ax+b) \Rightarrow f'(0) = a\cos b$

$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot x$

$P(x) = \text{sen}\, b + (a\cos b)\, x$

$P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+4x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{4}^{2} x$

$P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\, x$

Igualamos:
$\text{sen}\, b + (a\cos b)\cdot x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\, x$

$\text{sen}\, b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{\pi}{4}}$

$a\cos b = 2\sqrt{2}$
$a\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$

$a\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = 2\cancel{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{a = 4}$

Luego $\boxed{f(x) = \text{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Resolver utilizando polinomios de Mac Laurin

) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}{x - \frac{x^3}{3!} \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} \ldots\right)} = 1$

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = 2$

$g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow g(0) = 0$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$

$g''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow g''(0) = 0$

$g'''(x) = -\cos x \Rightarrow g'''(0) = -1$

$\operatorname{sen} x \approx g(x) + g'(x)\, x + g''(x) \frac{x^2}{2!} + g'''(x) \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$\ln(1+x) \approx f(x) + f'(x)\, x + f''(x) \frac{x^2}{2!} + f'''(x) \frac{x^3}{3!} + \ldots$

9/8

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+2x^3/3!+\cdots}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(2+2x^2/3!+\cdots\right)}{\cancel{x}}=\boxed{2}$$

$$f(x)=e^{x}\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=e^{x}$$

$$g(x)=e^{-x}$$
$$g'(x)=-e^{-x}$$
$$g''(x)=e^{-x}$$
$$g'''(x)=-e^{-x}$$

$$e^{-x}\approx 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

ECORDAR

ORDEN DE CONTACTO

Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen contacto de orden n

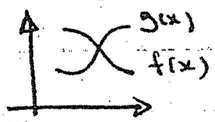
n x_0 si:

1) $f^{n}(x_0) = g^{n}(x_0)$

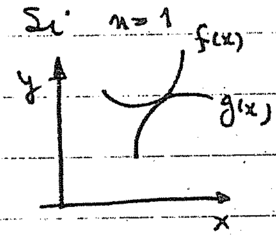
2) $f^{n+1}(x_0) \neq g^{n+1}(x_0)$

Si $n = 0$

$f(x) = g(x)$



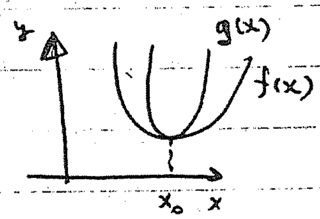
Si $n=1$



Las curvas son tangentes

Comparten hasta la 1ra derivada el crecimiento.

Si $n = 2$



comparten crecimiento y concavidad

Contacto de orden 2: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \\ f''(x_0) = g''(x_0) \\ f'''(x_0) \neq g'''(x_0) \end{cases}$

— x —

DEFINICIÓN DE LAS SERIES DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Si una función f tiene derivadas de todo orden en $x = c$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

se llama la serie de Taylor de $f(x)$ en c.

Si $c = 0$, tal serie se conoce como la serie de Mac Laurin.

Cálculo I
TP N°5

TRABAJO PRÁCTICO N° 5
TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

1) Compruebe si el Teorema de Rolle es válido para las funciones indicadas, hallando cuando sea posible los valores de c correspondientes:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0;\pi]$; b) $y = \dfrac{2-x^2}{x^4}$ en $[-1;1]$; c) $y = |x^2 - 1|$ en $[-1;1]$

no es cont en $x=0$
no cumple Rolle

Rolle
- f es cont. en $[a;b]$
- f es diferenciable en $(a;b)$
- $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a;b) \mid f'(c) = 0$

- $\operatorname{sen}^2 x$ es continua en $[0;\pi]$
- $\operatorname{sen}^2 x$ es diferenciable en $(0;\pi)$

$f(0) = 0$
$f(\pi) = 0$

$f(0) = f(\pi) \Rightarrow \exists\, c \mid 0 < c < \pi \wedge f'(c) = 0$

$f'(c) = 2 \operatorname{sen} c \cos c = 0$

$\operatorname{sen} c \cdot \cos c = 0$

$\operatorname{sen} c = 0 \vee \cos c = 0$

$c = 0 \notin (0;\pi)$ $\qquad c = \frac{\pi}{2} \in (0;\pi)$

— x —

b) $y = \dfrac{2-x^2}{x^4}$ en $[-1;1]$

$\dfrac{2-x^2}{x^4}$ no es continua en $[-1;1]$

$\therefore$ no cumple Rolle.

c) $y = |x^2 - 1|$ en $[-1, 1]$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1) & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 \geq 1$

$|x| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1 \lor x \leq -1$

$x^2 - 1 < 0$

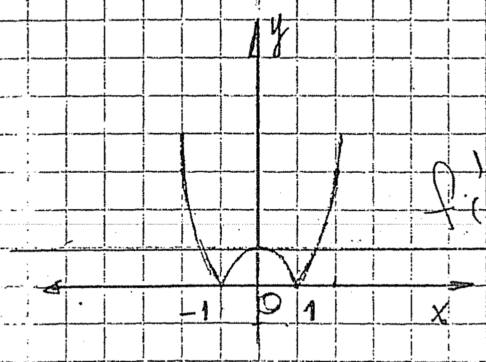
$x^2 < 0$

$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \lor x \leq -1 \\ -x^2+1 & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

f es continua en $[-1; 1]$

f es derivable en $(-1; 1)$



$f'(c) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(-1) = f(1)$$

$\Rightarrow \exists\, c \in (-1; 1) \,/\, f'(c) = 0$

$f(x) = -x^2 + 1$

$f'(c) = -2c = 0$

$\boxed{c = 0}$

$$\frac{4}{6-2\sqrt{5}} - 1 = c$$

$$\frac{4-6+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = c$$

$$\frac{-2+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = c \Rightarrow \frac{(-2+2\sqrt{5})\cdot(6+2\sqrt{5})}{6^2-4\cdot 5}$$

$$c = \frac{-12-4\sqrt{5}+12\sqrt{5}+\overbrace{4\cdot 5}^{20}}{36-20}$$

$$c = \frac{8+8\sqrt{5}}{16} = \frac{8}{16}+\frac{8}{16}\sqrt{5} \Rightarrow c = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

— x —

$y = \ln x \quad [1;e]$

f es cont. $[1;e]$

f es diferenciable en $(1;e)$

$f(1) = 0$

$f(e) = 1.$

$y' = \frac{1}{x}$

$$f'(c) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1-0}{e-1} \Rightarrow c = e-1$$

— x —

d) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \quad [1;2]$

$f(1) = 1$

$f(2) = \frac{1}{2}$

f es cont. $[1;2]$

f es dif. $(1;2)$

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{1/2-1}{1} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) sea $y = x^{\frac{2}{3}}$, determine el punto c del Teorema del Valor Medio de Lagrange en[0,1] y en [-2,2]. Fundamente su respuesta y realice la gráfica correspondiente.

en $[0;1]$

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

f es cont. en $[0;1]$

f es derivable en $(0;1)$

$\Rightarrow \exists c \mid f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0}$

$$f'(c) = \frac{1-0}{1-0}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2}{3} c^{-1/3} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{c}} = 1$$

$$\frac{2}{3} = \sqrt[3]{c}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = c \Rightarrow c = \frac{8}{27}$$

— x —

en $[-2;2]$

f es cont en $[-2;2]$

f es deriv. en $(-2;2)$

$\Rightarrow \exists c \mid f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)}$

$$\downarrow$$

$$\frac{2}{3} \frac{}{\sqrt[3]{c}} = 0 \quad \underline{\text{absurdo}}$$

$\therefore \nexists c.$

$f(2) = \frac{2}{3} 2^{2/3}$

$f(2) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{2^2} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{4}$

$f(-2) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{(-2)^2}$

$f(-2) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{4}$

Cálculo I

TP Nº5

2) Sea f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) , demostrar que la ecuación f '(x) = 0 tiene tres raíces reales distintas.

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f(x) = (x^2-x)(x^2-5x+6)$$

$$f(x) = x^4-5x^3+6x^2-x^3+5x^2-6x$$

$$f(x) = x^4-6x^3+11x^2-6x$$

$$f'(x) = 4x^3-18x^2+22x-6 = 0$$

$$x^3-\frac{18}{4}x^2+\frac{22}{4}x-\frac{6}{4}=0$$

$$x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

$\frac{3}{2}$ es raíz

Ya que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}=0$$

$$\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}\right):\left(x-\frac{3}{2}\right)=x^2-\cancel{\frac{6}{2}}^{\,3}x+1$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\
\frac{3}{2} & \downarrow & \frac{3}{2} & -\frac{18}{4} & \frac{3}{2} \\
\hline
 & 1 & -\frac{6}{2} & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$x^2-3x+1=0 \qquad \frac{3\pm\sqrt{9-4.1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Las raíces son:

$$x=\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x=3-\sqrt{5}$$

3) Compruebe si el teorema del Valor Medio de Lagrange es válido para las funciones siguientes, hallando cuando sea posible, los valores de **c** correspondientes: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

continua en $[a;b]$
derivable en $(a;b)$

a) $y = 2x - x^2$ en $[0;1]$; b) $y = \sqrt{x+1}$ en $[0;4]$
c) $y = \ln x$ en $[1;e]$; d) $y = 1/x$ en $[1;2]$

Lagrange

- f es cont. en $[a;b]$
- f es derivable en $(a;b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b) \mid f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

a) $y = 2x - x^2$ en $[0;1]$ — f es cont. en $[0;1]$, f es derivable en $(0;1)$

$y' = 2 - 2x$

$\Rightarrow \exists c \in (0;1) \mid f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0}$

$f(1) = 2 - 1 = 1$ — $2 - 2c = \frac{1-0}{1-0} \Rightarrow 2 - 1 = 2c$, $1 = 2c$

$f(0) = 0$ — $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

— x —

b) $y = \sqrt{x+1}$ en $[0;4]$ — $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(0) = 1$

$f(4) = \sqrt{5}$

f es cont $[0;4]$

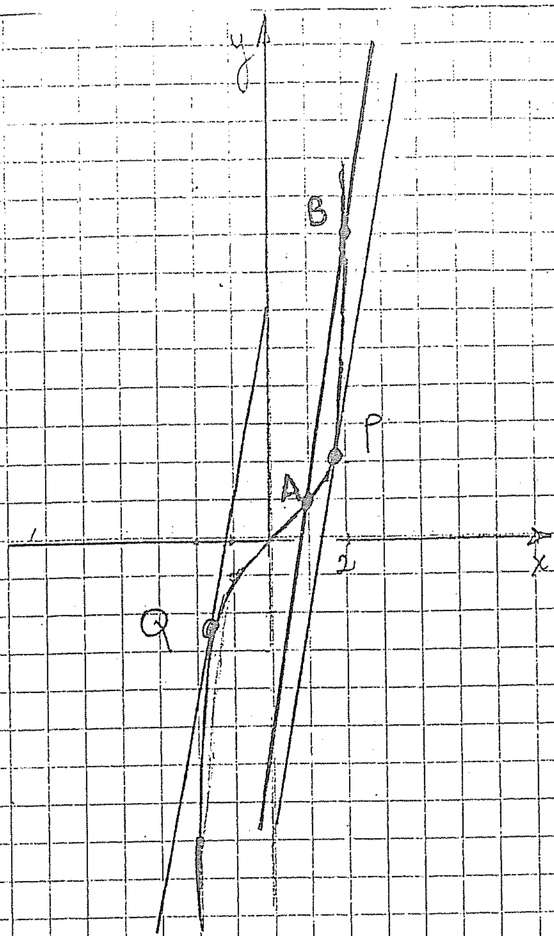
f es derivable en $(0;4)$

$\Rightarrow \exists c \in (0;4) \mid f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4-0}$

$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{c+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\cancel{4}\,2}$

$\Rightarrow \frac{2^2}{(\sqrt{5}-1)^2} = (\sqrt{c+1})^{\cancel{2}} \Rightarrow \frac{4}{5 - 2\sqrt{5} + 1} = c + 1$

5) Hallar sobre la curva $y = x^3$ un punto en el cual la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos A(1;1) y B(2,8)



$$\left.\begin{array}{l} A\ (1;1) \\ B\ (2;8) \end{array}\right\}\ m = \frac{8-1}{2-1}$$

$$\boxed{m = 7}$$

$$y = mx + b$$

$$1 = 7 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -7$$

$$\boxed{y = 7x - 7} \quad \text{recta } \underline{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y' = 3x^2 \\ m = 7 \end{array}\right\}$$

$$7 = 3x^2$$

$$\frac{7}{3} = x^2$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$P\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\ ;\ \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3\right)$$

$$Q\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\ ;\ \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3\right)$$

6) Dados los siguientes pares de funciones, halle el punto **c** del Teorema de Cauchy.

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{3} \\ g(x) = 2x^3 \end{cases}$ en $[0;1]$, b) $\begin{cases} f(x) = 4\operatorname{sen} x \\ g(x) = 2\cos x \end{cases}$ en $[0; \pi/2]$; c) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2 \\ g(x) = x^3 - 1 \end{cases}$ en $[1,2]$

f y g continuas en $[a;b]$

diferenciales en $(a;b)$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow \exists\, c \in (a;b) \,/$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

TEOREMA DE CAUCHY.

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{3} \\ g(x) = 2x^3 \end{cases}$ en $[0;1]$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2}{3}x$

$g'(x) = 6x^2$

f y g continuas en $[0;1]$

f y g diferenciables en $(0;1)$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}$$

$$\frac{\cancel{\frac{2}{3}}^{1} \cancel{c}}{\cancel{6}_{3}\, c^{\cancel{2}}} = \frac{\frac{1}{3} - 0}{2 - 0} \Rightarrow \frac{1}{{}_{3}\cancel{9}c} = \frac{1}{\cancel{6}\,2}$$

$$\frac{2}{3} = c$$

Cálculo I
TP N° 5

b) $\begin{cases} f(x) = 4\,\text{sen}\,x \\ g(x) = 2\cos x \end{cases}$ en $[0; \frac{\pi}{2}]$

$f(\frac{\pi}{2}) = 4$
$f(0) = 0$
$g(\frac{\pi}{2}) = 0$
$g(0) = 2$

f y g cont en $[0; \frac{\pi}{2}]$

f y g deriv. en $(0; \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = 4\cos x$

$g'(x) = -2\,\text{sen}\,x$

$$\frac{4\cos c}{-2\,\text{sen}\,c} = \frac{4-0}{0-2}$$

$$\frac{\cancel{4}\cos c}{-\cancel{2}\,\text{sen}\,c} = \frac{\cancel{4}}{-\cancel{2}}$$

$$\frac{\cos c}{\text{sen}\,c} = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} \in (0; \frac{\pi}{2})$$

— x —

c) $\begin{cases} f(x) = x^2+2 \\ g(x) = x^3-1 \end{cases}$ en $[1; 2]$

$f(2) = 6$ $\quad g(2) = 7$

$f(1) = 3$ $\quad g(1) = 0$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(c) = 2c$

$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(c) = 3c^2$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{6-3}{7-0} \Rightarrow \frac{2\cancel{c}}{3c^{\cancel{2}}} = \frac{3}{7}$$

$$c = \frac{14}{9}$$

7) Verificar los siguientes límites indeterminados aplicando la Regla de L'Hopital.

0/0:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5-\sqrt{2-x}}{x^5-\sqrt[3]{x}} = \frac{33}{28}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

correg

e) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = 2$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = -\frac{1}{6}$

∞/∞

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} 2x)}{\ln(\operatorname{sen} x)} = 1$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\ln x}{e^{1/x}} = 0$

j) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+\ln x}{x+2} = 2$

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4 \qquad \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x-5} = \frac{4}{-1} = \boxed{-4}$

— x —

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5-\sqrt{2-x}}{x^5-\sqrt[3]{x}} = \frac{33}{28} \qquad \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 1} \frac{5x^4+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}}{5x^4-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}$

$\lim_{x \to 1} \frac{5x^4+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}}{5x^4-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{5+\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{14}{3}} = \boxed{\frac{33}{28}}$

— x —

c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} \to 1 = \frac{1}{2}$

Cálculo I
TP N° 5

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} x = \boxed{1}$

— x —

e) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \boxed{2}$

— x —

corregir el ejercicio

f) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, (1 + \cos x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, (1 + \cos x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}}{3 \cancel{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x \, \underbrace{(1 + \underbrace{\cos x}_{1})}_{2}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

0.∞

k) $\lim_{x \to 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x) = 0$

l) $\lim_{x \to 1} \ln x . \cot g(1-x) = -1$

m) $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1) = 1$

n) $\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = \infty$

∞−∞

o) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right) = 1/5$

p) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = 1/2$

q) $\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{x - \pi/2} - \operatorname{tg} x \right) = \infty$

r) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = 1/2$

Verificar por L'Hopital las indeterminaciones exponenciales siguientes

s) $\lim_{x \to \infty} (3+x)^{2/x} = 1$

t) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-4} \right)^x = e^{5/3}$

u) $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$

v) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = 1$

k) $\lim_{x \to 0} x \ln(\operatorname{sen} x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \quad \frac{0}{0}$

→ Aplico L'H.

$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-2x \to 0}{\frac{1}{\cos^2 x} \to 1} = \boxed{0}$

$0 \cdot \infty$.

l) $\lim_{x \to 1} \ln x \cdot \operatorname{cotg}(1-x) = -1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{cotg}(1-x)}} = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}(1-x)} = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\sec^2 x} = \boxed{-1}$$

$\infty \cdot 0$

m) $\lim_{x \to \infty} x \left(e^{1/x} - 1\right) = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \boxed{1}$$

n) $\lim_{x \to 0} x\, e^{1/x} = \infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x} \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \boxed{\infty}$$

$\infty - \infty$

1) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right) = \frac{1}{5}$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{1-4.(-6)}}{2}$

$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{(x-3)(x+2)} \right)$

$\frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)}$

$\frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$

$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x+2)} = \boxed{\frac{1}{5}}$

2) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - x - 1}{(x-1) \ln x}$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x + \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{1}}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{x+1}{x^{\cancel{2}}}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

— x —

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} - \operatorname{tg} x \right) = \infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - (x - \pi/2) \cdot \operatorname{tg} x}{x - \pi/2}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{tg} x - (x - \frac{\pi}{2}) \sec^2 x}{1}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right]$

Cálculo I
TP N° 5

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-\overset{1}{\widehat{\operatorname{sen} x}} \cdot \overset{0}{\widehat{\cos x}} - \overset{\pi/2}{\widehat{x}} + \pi/2}{\cos^2 x} \right] \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cdot(-\operatorname{sen} x) - 1}{2\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x + \overbrace{\operatorname{sen}^2 x - 1}^{\cos^2 x}}{2\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x + \cos^4 x}{2\cos x \operatorname{sen} x} = 0$$ no ~~no~~ da

r) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(2 + x)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{(3+x)^{2/x}}_{y} = 1$

$$y = (3+x)^{2/x}$$

$$\ln y = \frac{2}{x} \ln(3+x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} \ln(3+x)$$

$$= 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(3+x)$$

$$= 2 \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3+x)}{x}$$

$$2 \lim_{x\to\infty} . \frac{\frac{1}{3+x}}{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3+x} = 0$$

$$\ln y = 0 \Rightarrow \boxed{e^0 = 1}$$ se verifică

— x —

t) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^x}_{y} = e^{5/3}$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln \frac{3x+1}{3x-4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x+1) - \ln(3x-4)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{3x+1} - \frac{3}{3x-4}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Cálculo I

TP N°5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3(3x-4)-3(3x+1)}{(3x+1)(3x-4)}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-(\cancel{9x}-12-\cancel{9x}-3)\,x^2}{(3x+1)\cdot(3x-4)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2}{9x^2-12x+3x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{15\cancel{x^2}/\cancel{x^2}}{\dfrac{9\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \underbrace{\dfrac{9\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}_{\to 0} - \underbrace{\dfrac{4}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \frac{5}{3}$$

$$\ln \lim_{x\to\infty} y = \frac{5}{3} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^{5/3}$$

— x —

u) $\lim_{x\to 0} \underbrace{x^x}_{y} = 1$ $\qquad x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\ln x}$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{e^{x\ln x}}_{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln e^{x\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \ln x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{0}$$

$\lim_{x\to 0} \ln y = 0 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0} y = 0$ $\qquad \boxed{0^0 \ \ 1} \Rightarrow \lim x^x = 1$

v) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$$

$$= \lim_{x\to 0} tg\,x \ \ln \frac{1}{x}$$

$tg\,x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{tg\,x}}$$

$(tg\,x)' = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}{\cancel{\frac{1}{x}}}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$-\operatorname{cosec}^2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1/x}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \to 1 = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = 0$$

$$\ln \lim_{x\to 0} y = 0 \Rightarrow e^0 = \lim_{x\to 0} y.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} y = 1}$$

Cálculo I

TP Nº 5

8) ¿Cómo deben ser $a, b, c \in \Re \,/\, \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ siendo $f(x) = \dfrac{e^{ax} - bx + c}{x^2}$?

$$f(x) = \frac{e^{ax} + bx + c}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} + bx + c}{x^2} = 2 \qquad 1 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \cdot e^{ax} + b}{2x} = 2 \qquad a + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^2 e^{ax}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2$$

$$a^2 = 4$$

$$|a| = 2 \quad \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

$$(a; b; c) = (-2; 2; -1)$$

$$\checkmark \quad (a; b; c) = (2; -2; -1)$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7
LINEALIZACIÓN Y DIFERENCIALES

Obtén la linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ ✓

Linealización : $L(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ $\qquad a = x \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$

$L(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})\,(x - \frac{\pi}{2})$

$L(x) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})}_{-1}\,(x - \frac{\pi}{2})$

$L(x) = -\,(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{L(x) = -x + \frac{\pi}{2}}$

2.- Encuentra la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, en $a = 0$, y utilízala para hallar aproximaciones de los números $\sqrt[3]{0,95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$ ✓

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} \Rightarrow f(x) = (1+x)^{1/3}$

$f(0) = \sqrt{1+0}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1}$

$f(0) = 1$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$

$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ $\qquad a = 0$

$L(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0)$

$\boxed{L(x) = 1 + \frac{1}{3}x}$

$\sqrt[3]{0,95} = \sqrt[3]{1+(-0,05)} \approx 1 + \frac{1}{3}(-0,05)$ $\qquad \boxed{x = -0,05}$

Luego $\sqrt[3]{0,95} \approx 0,9833$

$\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1+0,1} \approx 1 + \frac{1}{3}(0,1)$ $\qquad \boxed{x = 0,1}$

Luego: $\sqrt[3]{1,1} \approx 1,033$

3.- Sea f una función tal que $f(1) = 2$, y cuya derivada se sabe que es $f'(x) = \sqrt{x^3+1}$, utiliza una aproximación lineal para estimar el valor de $f(1,1)$.

$f(1) = 2$

$f'(x) = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow f'(1) = \sqrt{1^3+1} \Rightarrow f'(1) = \sqrt{2}$

Aproximación lineal:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)\,(x-1)$$

$$f(x) \approx 2 + \sqrt{2}\,(x-1)$$

Si $x = 1,1$

$$f(1,1) \approx 2 + \sqrt{2}\,(1,1-1)$$

$$\underline{f(1,1)} \approx 2 + \sqrt{2}\cdot(0,1) \approx \underline{2,1414}$$

4.- ¿Para qué valores de x la aproximación $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ es exacta con una diferencia menor que 0,5?

5.- Dada la función $y = x^2$, completa el siguiente cuadro:

	x_0	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
a)	1	0,1	0,21	0,2	0,01
b)	1	0,01	0,0201	0,02	0,0001
c)	1	0,001	0,002001	0,002	0,000001
d)	1	0,0001	0,00020001	0,0002	0,00000001
e)	1	0,00001	0,0000200001	0,00002	0,0000000001

$f(x) = x^2$ $\qquad dy = f'(x_0)\,dx$ $\qquad dx \approx \Delta x$

$f'(x) = 2x$ $\qquad dy = 2x_0\,dx$

a)

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y = f(1 + 0,1) - f(1)$

$\Delta y = f(1,1) - f(1)$

$\Delta y = (1,1)^2 - 1^2$

$\boxed{\Delta y = 0,21}$

$dy = f'(x_0)\,dx$

$dy = 2x_0\,dx$ $\qquad dx \approx \Delta x = 0,1$

$dy = 2 \cdot 1 \quad 0,1$

$\boxed{dy = 0,2}$

b)

$\Delta y = f(1 + 0,01) - f(1)$

$\Delta y = f(1,01) - f(1)$

$\boxed{\Delta y = 0,0201}$

$dy = 2 \cdot 1 \cdot 0,01$

$\boxed{dy = 0,02}$

c)

$\Delta y = f(1 + 0,001) - f(1)$

$\Delta y = f(1,001) - f(1)$

$\boxed{\Delta y = 0,002001}$

$dy = 2 \cdot 1 \cdot 0,001 \Rightarrow \boxed{dy = 0,002}$

d) $\Delta y = f(1+0{,}0001) - f(1)$

$$\boxed{\Delta y = 0{,}00020001}$$

$\underline{dy} = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}0001 = \underline{0{,}0002}$

e) $\underline{\Delta y} = f(1+0{,}00001) - f(1) = \underbrace{0{,}0000200001}$

$\underline{dy} = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}00001 = \underline{0{,}00002}$

6.- Calcula Δy ; dy para $y=\sqrt[3]{x}$ si $a)\ x_0=8, \Delta x=0{,}1$; $b)\ x_0=64, \Delta x=0{,}1$ ✓

$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}}$

$y' = x^{\frac{1}{3}-1} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$dx \approx \Delta x$

$dy = f'(x_0) \cdot dx$

$dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \cdot dx \Rightarrow dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \cdot 0{,}1$

$dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0{,}1$

$$\boxed{dy = 0{,}008\overset{\frown}{3}}$$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y = f(8+0{,}1) - f(8)$

$\Delta y = \sqrt[3]{8{,}1} - \sqrt[3]{8}$

$$\boxed{\Delta y \approx 0{,}008298}$$

b) $x_0 = 64$

$\Delta x = 0{,}1$

$dy = f'(x_0) \cdot dx$

$dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot 0{,}1 \Rightarrow \boxed{dy = 0{,}002083}$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y = f(64 + 0{,}1) - f(64)$

$\Delta y = \sqrt[3]{64 + 0{,}1} - \sqrt[3]{64} \Rightarrow \boxed{\Delta y = 0{,}002822492}$

7.- Halla las diferenciales de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arctg}\,(x/a)$ b) $y = x\,e^x$ c) $y = \ln \text{sen}\, x$ d) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$dy = f'(x)\, dx$

a)

$y = \text{arctg}\, \dfrac{x}{a} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} \cdot \dfrac{1}{a}\, dx$

$\boxed{dy = \dfrac{a^{\cancel{2}}}{x^2 + a^2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}}\, dx}$

b) $y = x e^x$

$dy = (e^x + x e^x)\, dx \Rightarrow \boxed{dy = (1+x) e^x\, dx}$

c) $y = \ln(\text{sen}\, x)$

$dy = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \cdot \cos x\, dx \Rightarrow dy = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}\, dx$

$\boxed{dy = \text{cotg}\, dx}$

d) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow dy = \dfrac{1}{\frac{1-x}{\cancel{1+x}}} \cdot \left[\dfrac{(-1)(1+x) - (1-x)}{(1+x)^{\cancel{2}}}\right] dx$

$dy = \dfrac{-1 \cancel{-x} - 1 \cancel{+x}}{1 - x^2}\, dx \Rightarrow \boxed{dy = \dfrac{-2}{1-x^2}\, dx}$

3.- Calcula en forma aproximada usando diferenciales y verifica con calculadora:

a) $\sqrt{82}$ ✓ b) $\sqrt{127}$ ✓ c) $e^{0,03}$ ✓ d) tg 46° ✓ e) sen 29°

a) $\sqrt{82}$ $\qquad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$x_0 = 81$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Delta x = 1$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\sqrt{82} = f(81+1) \approx f(81) + f'(81) \cdot 1$$

$$\sqrt{82} \approx \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{81}} \cdot 1$$

$$\boxed{\sqrt{82}} \approx 9 + \frac{1}{18} \approx \frac{163}{18} \approx \boxed{9{,}0555}$$

— x —

b) $\sqrt{127}$ $\qquad f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$x_0 = 121$

$\Delta x = 6$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$dy = f'(x_0)\, dx \quad dx = \Delta x$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(121 + 6) \approx f(121) + f'(121) \cdot 6$$

$$\boxed{\sqrt{127}} \approx \sqrt{121} + \frac{1}{2\sqrt{121}} \cdot 6 \approx \boxed{11{,}2727}$$

— x —

c) $e^{0,03}$ $\qquad f(x) = e^x$

$x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = e^x$

$\Delta x = 0{,}03$

$$e^{0,03} \approx f(0) + f'(0) \cdot 0{,}03$$

$$\boxed{e^{0,03}} \approx e^0 + e^0 \cdot 0{,}03 \approx \boxed{1{,}03}$$

$$e^{0,03} \approx 1{,}0304545$$

d) $tg\, 46° = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$ $f(x) = tg\, x \Rightarrow f'(x) = sec^2 x$

$\frac{1}{cos^2 x}$

$45° - \frac{\pi}{4}$

$1° - \frac{1° \cdot \pi/4}{45°} = 0{,}017453292$

$x_0 = 45° \Longrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}$

$\Delta x = 1° \Rightarrow \Delta x = 0{,}017453292$

$\Delta x = \frac{\pi}{180}$

$f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$sec\frac{\pi}{4} = \frac{1}{cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$sec\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

2

$sec\frac{\pi}{4} = 2$

$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx tg\frac{\pi}{4} + \left(sec\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{180}$

$tg\, 46° \approx 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180}$

$sec^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}^2}{2^2}}$

$tg\, 46° \approx 1{,}$

$sec^2\frac{\pi}{4} = 2$

— x —

e) $sen\, 29°$ $f(x) = sen\, x$

$f'(x) = cos\, x$

$x_0 = 30°$

$\Delta x = -1°$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$

$\Delta x = -\frac{\pi}{180}$

$f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$sen\, 29° \approx sen\frac{\pi}{6} + \left(cos\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$sen\, 29° \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$

$sen\, 29° \approx 0{,}515114994$

9.- Da una interpretación geométrica del incremento y la diferencial de la función $y = x^2$ (área del cuadrado de lado x).

10.- a) Utilizando diferenciales obtén la derivada primera de las funciones definidas paramétricamente, y calcula su valor para el parámetro indicado.

$$i)\ \begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases} \quad t = 3 \qquad ii)\ \begin{cases} x = a.\cos t \\ y = a.sent \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{4}$$

$$iii)\ \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \quad t = 0 \qquad iv)\ \begin{cases} x = e^{t}.\cos t \\ y = e^{t}.sent \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{6}$$

b) Obtén las coordenadas del punto donde la curva tiene una tangente horizontal.

$$i)\ \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases} \quad t = 3$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$dy = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2t\,dt$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,2t\,\cancel{dt}}{\frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,\cancel{dt}}$$

$$\boxed{y' = 2t} \rightarrow \boxed{y'_{(3)} = 6}$$

ii) $\begin{cases} x = a\cos t & \Rightarrow \quad dx = -a\,\text{sen}t\,dt \\ y = a\,\text{sen}t & \Rightarrow \quad dy = a\cos t\,dt \end{cases}$

$t = \frac{\pi}{4}$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\cancel{a}\cos t\,\cancel{dt}}{-\cancel{a}\,\text{sen}t\,\cancel{dt}} \Rightarrow y'_{(\frac{\pi}{4})} = -\frac{\cos \pi/4}{\text{sen}\,\pi/4}$$

$$y' = -\text{cotg}\,t \Rightarrow y'_{(\frac{\pi}{4})} = -\text{cotg}\,\frac{\pi}{4}$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\boxed{y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1}$$

iii) $\begin{cases} x = e^{-2t} & \Rightarrow \quad dx = -2e^{-2t}\,dt \\ y = e^{2t} & \Rightarrow \quad dy = 2e^{2t}\,dt \end{cases}$

$t = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\cancel{2}e^{2t}\,\cancel{dt}}{-\cancel{2}e^{-2t}\,\cancel{dt}}$$

$$y' = -\frac{e^{2t}}{e^{-2t}} \Rightarrow y' = -e^{2t}\cdot e^{2t}$$

$$y' = -(e^{2t})^2$$

$$y' = -e^{4t}$$

$$y'_{(0)} = -e^{4\cdot 0} \Rightarrow \boxed{y'_{(0)} = -1}$$

iv) $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t & \Rightarrow \quad dx = [e^t \cos t + e^t(-\text{sen}t)]\,dt \\ y = e^t\,\text{sen}t & \quad\quad dx = e^t(\cos t - \text{sen}t)\,dt \end{cases}$

$t = \frac{\pi}{6}$

$$dy = (e^t\,\text{sen}t + e^t\cos t)\,dt$$

$$dy = e^t(\text{sen}t + \cos t)\,dt$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\cancel{e^t}(\text{sen}t + \cos t)\,\cancel{dt}}{\cancel{e^t}(\cos t - \text{sen}t)\,\cancel{dt}}$$

$$y'_{(\frac{\pi}{6})} = \frac{\text{sen}\,\pi/6 + \cos\pi/6}{\cos\pi/6 - \text{sen}\,\pi/6} = \frac{0,5 + \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2 - 0,5} = \boxed{3,73}$$

b) coordenadas del punto donde la curva tiene tangente horizontal

i) $y' = \frac{1}{2t} \neq 0$ no tiene tg horizontal

ii) $y' = -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = 0$

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

iii) $y' = -e^{4t} \neq 0$ no tiene tg horizontal

iv) $y' = \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t} = 0$

$\operatorname{sen} t + \cos t = 0$

$\operatorname{sen} t = -\cos t$

$\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -1$

11.- a) Utilizando diferenciales halla la derivada segunda de las funciones definidas paramétricamente:

$$i)\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} x = \sec t \\ y = tgt \end{cases} \qquad iii)\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$$

b) Halla las coordenadas de los puntos de las funciones dadas donde se anula la segunda derivada.

i) $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$

$y = t^2 \Rightarrow dy = 2t\,dt$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2t\,\cancel{dt}}{\frac{1}{t}\,\cancel{dt}} \Rightarrow y' = 2t^2$

$\begin{cases} x = \ln t \\ y' = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = \frac{1}{t}\,dt \\ dy' = 4t\,dt \end{matrix} \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{4t\,\cancel{dt}}{\frac{1}{t}\,\cancel{dt}}$

$$\left\{ y'' = 4t^2 \right\} \Rightarrow y''=0 \Rightarrow \boxed{t=0}$$

— x —

ii) $\begin{cases} x = \sec t & \Rightarrow dx = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt \\ y = \operatorname{tg} t & \Rightarrow dy = \sec^2 t \; dt \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 t}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} t} = (\operatorname{sen} t)^{-1}$$

$$\left[(\operatorname{sen} t)^{-1}\right]' = -1\, \operatorname{sen} t . \cos t$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{\cos^2 t} . \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cancel{\cos^2 t}}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \boxed{\operatorname{cosec} t}$$

$\begin{cases} x = \sec t & \Rightarrow dx = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt \\ y' = \operatorname{cosec} t & \Rightarrow dy' = -\operatorname{sen} t \cos t \; dt \end{cases}$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{-\cancel{\operatorname{sen} t} . \cos t \; \cancel{dt}}{\dfrac{\cancel{\operatorname{sen} t}}{\cos^2 t}\; \cancel{dt}} \Rightarrow y'' = \cos^3 t$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \cos^3 t = 0$$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

— x —

iii) $\begin{cases} x = e^{-t} & \Rightarrow dx = -e^{t}\, dt \\ y = t^3 & \Rightarrow dy = 3t^2 dt \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 \cancel{dt}}{-e^t \cancel{dt}} \Rightarrow y' = -\frac{3t^2}{e^t}$$

$\begin{cases} x = e^{-t} & \Rightarrow dx = -e^t\, dt \\ y' = -\dfrac{3t^2}{e^t} & \Rightarrow dy' = \dfrac{-6t\, e^t + 3t^2 e^t}{e^{2t}} \end{cases}$

$$dy' = \frac{3t\cancel{e^t}(-2+t)}{(e^t)^{\cancel{2}}} \Rightarrow dy' = \frac{3t(t-2)}{e^t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{3t(t-2)\, e^{-t}}{-e^t}$$

$$y'' = \frac{\frac{3t(t-2)}{e^t}}{-e^t}$$

$$y'' = \frac{3t(t-2)}{-(e^t)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \quad \boxed{t=2}$$

$x = e^{-t}$ $\quad dx = -e^{-t}\,dt$

$y = t^3$ $\quad dy = 3t^2\,dt$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-e^{-t}\,\cancel{dt}}{-3t^2\,\cancel{dt}} = \frac{-e^{-t}}{-3t^2}$$

$$\begin{cases} x = e^{-t} & dx = \\ y' = \dfrac{-e^{-t}}{-3t^2} & dy' = \end{cases}$$