UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA
ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA II - MATEMATICA DISCRETA II - 2009
CLASES LATERALES - TEOREMA DE LAGRANGE

Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Entonces para cualquier a $\in$G definimos dos conjuntos llamados clase lateral izquierda y clase lateral derecha de H en G.

Clase lateral izquierda de H en G es aH=$\{ah/h \in H\}$ y Clase lateral derecha de H en G es Ha=$\{ha/h \in H\}$, donde entendemos que cuando escribimos ah o ha estamos operando con los elementos a y h con la operación definida para el grupo.

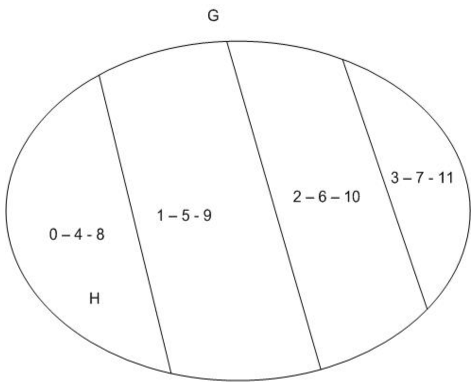
Supongamos el grupo $(Z_{12}, +_{12})$. Su tabla es la siguiente (donde por simplicidad no hemos colocado sobre cada número la barra de clase de equivalencia , o sea 3 indica $\overline{3}$)

$+_{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sea H el subgrupo $\left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\right\}$. Si hacemos las clases laterales por izquierda

0+H=4+H=8+H=H ; 1+H=5+H=9+H ; 2+H+6+H=+10+H ; 3+H=7+H=11+H

Luego las clases laterales a izquierda de H en G forman una partición de G. Podemos verificar que G = H $\cup$(1+H)$\cup$ (2+H) $\cup$(3+H)



Como el grupo G es conmutativo , las clases laterales a izquierda de H en G coinciden con las clases laterales a derecha de H en G.

Ahora veremos otra forma de expresar la clase lateral aH (o Ha).

aH=$\{b \in G/b = ah\} = \{b \in G/a^{-1}b = a^{-1}ah\} = \{b \in G/a^{-1}b = h\} = \{b \in G/a^{-1}b \in H\}$. O sea que la clase lateral izquierda de H en G por a es el conjunto de elementos b de G tal que multiplicando el inverso de a por b nos da por resultado un elemento de H (subgrupo)

PROPOSICION

Si establecemos la relación entre dos elementos a y b de G de tal forma que aRb $\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$, entonces esa relación es de equivalencia.

Para demostrarlo debemos que demostrar que la relación es reflexiva , simétrica y transitiva.

a) Reflexiva : $\forall a \in G,$ aRa.

Veamos aRa si $a^{-1}a \in H$, pero es evidente que si operamos un elemento con su inverso nos da por resultado el elemento neutro (que pertenece a H pues H es subgrupo)

b) Simétrica

Supongamos que aRb –> $a^{-1}b \in H --> (a^{-1}b)^{-1} \in H$ (pues H es subgrupo) –>($(b^{-1}a) \in H --> bRa$, por lo tanto es simétrica

c) Transitiva

Si aRb y bRc entonces $a^{-1}b \in H$ y $b^{-1}c \in H --> (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H --> (a^{-1}(bb^{-1})c) \in H --> (a^{-1}ec) \in H --> (a^{-1}c) \in H.$ Luego aRc.

Por lo tanto al establecer una clase lateral en realidad estamos determinando una relación de equivalencia en G.

¿Y cuales son las clases de equivalencia?. Una de ellas seá el propio subgrupo H , pues para todo par de elementos c y d de H se cumple que $c^{-1}d \in$ H y $d^{-1}c \in$ H

Luego todos los elementos de H están relacionados entre sí y pertenecen a una misma clase de equivalencia.

En el ejemplo de anterior , $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ es una clase de equivalencia que puede ser denominada $\overline{0}$ y las otras son $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{9}\}, \{\overline{2}, \overline{6}, \overline{10}\}, \{\overline{3}, \overline{7}, \overline{11}\}$ que pueden ser denominadas respectivamente por $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$.

¿Cuantos elementos habrá en cada clase de equivalencia? O lo que es lo mismo ¿cuál será el orden de cada clase de equivalencia? (lo estamos preguntando en un grupo G finito).

PROPOSICIÓN

Si G es un grupo finito y H un subgrupo entonces $|H| = |aH|$ para todo a$\in$ G

Establezcamos la aplicación f: H –> aH dada por f(h)= ah , para un dado a$\in$ G.

Veamos que si $f(h_1)=f(h_2)$ entonces $ah_1 = ah_2$ y como existe a^{-1} resulta que $h_1 = h_2$, por lo tanto la aplicacion es inyectiva.

Además cualquiera sea el elemento ah$\in$ aH , resulta que existe h $\in$ H tal que f(h)=ah , por lo tanto la aplicación es suryectiva. Y de ambas condiciones surge que f es biyectiva y de esta forma H y aH tienen el mismo número de elementos.

Luego todas las clases de equivalencia tienen el mismo número de elementos que concuerda con el orden de H. Por lo tanto la partición que hacemos de G será una partición finita y con un número finito e igual de elementos en cada clase de equivalencia. Esto justifica el siguiente teorema

TEOREMA DE LAGRANGE

Si G es un grupo finito y H un subgrupo de g , el orden de H divide al orden de G.

Por todo lo que vimos anteriormente resulta que en G podemos establecer una partición de tal forma que

G = (x_1H)∪ (x_2H)∪ ....∪(x_mH) , donde (x_1H)∩ (x_2H)=∅ (recordar que uno de los (x_iH) es el propio subgrupo H)

Pero todos los (x_iH) tienen el mismo orden , supongamos que es k. Luego la cantidad de elementos de G es k.m –> $|G|$=k.m y como $|H|$ = m , resulta que el orden de H divide al orden de G

Si volvemos a utilizar el grupo de movimientos en el plano que dejan invariante a un triángulo equilátero resulta que las mismas eran:

rotación de 360 º o I (identidad) , rotación de 120º , rotación de 240º y las simetrías respecto a la bisectriz que pasa por cada uno de los vértices S_1 , S_2 y S_3

La tabla que representa al grupo con la operación composición es

º	I	R_{120}	R_{240}	S_1	S_2	S_3
I	I	R_{120}	R_{240}	S_1	S_2	S_3
R_{120}	R_{120}	R_{240}	I	S_2	S_3	S_1
R_{240}	R_{240}	I	R_{120}	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	I	R_{240}	R_{120}
S_2	S_2	S_1	S_3	R_{120}	I	R_{240}
S_3	S_3	S_2	S_1	R_{240}	R_{120}	I

Los posibles subgrupos de G , dado que este es de orden 6 , serán de orden 1 , 2 , 3 y 6. El primero y el último son obvios (el elemento neutro y el propio G).Tomemos el subgrupo de orden · formado por H=$\{I, R_{120}, R_{240}\}$ y hallemos las clases laterales a izquierda y derecha respecto a H

IH=$\{I, R_{120}, R_{240}\}$, R_{120}H=$\{R_{120}, R_{240}, I\}$, R_{240}H=$\{R_{240}, I, R_{120}\}$ y forman una clase de equivalencia

S_1H=$\{S_1, S_2, S_3\}$, S_2H=$\{S_2, S_3, S_1\}$, S_1H=$\{S_3, S_1, S_2\}$, y forman la segunda clase de equivalencia.

Si hiciéramos las clases laterales a derecha obtendríamos el mismo resultado , o sea las clases de equivalencia serían las mismas.

Ahora si tomamos un subgrupo de orden 2 , por ejemplo H = $\{I, S_1\}$ y buscamos las clases laterales

IH=S_1H=$\{I, S_1\}$, S_2H=R_{240}H$\{R_{240}, S_2\}$,S_3H=R_{120}H$\{R_{120}, S_3\}$

Si lo hacemos por derecha

HI=HS_1=$\{I, S_1\}$, HS_2 =HR_{120} = $\{S_2, R_{120}\}$; HS_3 =HR_{240} = $\{S_3, R_{240}\}$

Por lo tanto las clases laterales a izquierda y a derecha no coinciden.

Cuando sí lo hacen , o sea cuando aH=Ha para todo a ∈G entonces se dice que el subgrupo H es normal.

El subgrupo $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ de$(Z_{12}, +_{12})$ es normal y crea una partición ($\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{9}\}$, $\{\overline{2}, \overline{6}, \overline{10}\}$, $\{\overline{3}, \overline{7}, \overline{11}\}$)en la cual podemos (utilizando los elementos representantivos) crear la siguiente tabla

$+_{12}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Como vemos se crea una nueva estructura de grupo ya que la operación es cerrada para las clases de equivalencia , tiene elemento neutro ($\overline{0}$) y cada uno tiene inverso. Por supuesto es asociativa porque ya lo es para el grupo.Luego la existencia de un subgrupo normal , crea sobre las clases de equivalencia una nueva estructura de grupo que se llama grupo cociente (generado por H) y se indica G/H.