AÑO 2009 PRECIO: ***$4,00***

Universidad Nacional de La Matanza

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA E INVESTIGACIONES TECNOLOGICAS

MATEMATICA DISCRETA

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS
INGRESANTES - CUATRIMESTRAL

PROF.: *ALICIA CICCHINI*

PARA TODAS LAS INGENIERIAS

Código Mat.	Código Ap
1028	1

Liga Federal Universitaria

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA E INVESTIGACIONES TECNOLÓGICAS

INGENIERÍA: INFORMÁTICA, INDUSTRIAL, ELECTRÓNICA

MATEMÁTICA DISCRETA

Cuatrimestral

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

AÑO: 2009

1.- BIBLIOGRAFÍA

1.1.- Básica

- Grimaldi Ralph P., *Matemática Discreta y Combinatoria*, México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.
- Kolman, B., Busby, R., Ross, K., *Estructuras de Matemática Discreta para la Computación*, México, Prentice Hall, 1997.
- Liú, C.L., *Elementos de Matemática Discreta*, México, McGraw-Hill, 1995.

1.2.- Alternativa

- Isasi, P., Martínez, P., Borrajo, D., *Lenguajes, Gramáticas y Autómatas, Un Enfoque Práctico*, España, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- Lipshutz, *Matemática Discreta*, Schaum McGraw-Hill.
- Ross, K.A., Wright, Ch.R.B., *Matemática Discreta*, México, Prentice Hall, 1990.

2.- CONTENIDO

2.1- Programa Analítico

Unidad N° 1

Elementos de lógica proposicional, conectores, leyes lógicas. Conjunto: propiedades, operaciones. Números Naturales: principio de inducción completa. Números Enteros: algoritmo de la división, divisibilidad, máximo común divisor mínimo común múltiplo.

Unidad N° 2

Producto Cartesiano: definición, propiedades.
Relación: definición, dominio, imagen, conjunto de partida, conjunto de llegada; relación intersección, unión, complemento, inversa: definición, propiedades. Representación gráfica, representación matricial. Composición de relaciones: definición, propiedades.
Operación binaria en conjuntos finitos y conjuntos infinitos, propiedades.
Relación Binaria: definición, propiedades, reconocimiento matricial y gráfico de las mismas, clasificación: orden amplio, orden estricto, equivalencia.
Partición: definición. Teorema Fundamental de Relaciones de Equivalencia.
Clausuras: definición, manejo matricial, propiedades, cálculo de trayectoria.

Unidad N° 3

Estructura de Grupo, elementos distinguibles. Subgrupo, teorema de condición necesaria y suficiente; subgrupo trivial, propio, normal. Morfismo. Compatibilidad: definición, teorema fundamental de compatibilidad entre una relación de equivalencia y una operación binaria, aplicado a grupo; relación congruencia módulo un subgrupo, clases laterales o coclases a derecha y a izquierda de un subgrupo, grupo cociente por un subgrupo.

Grupo cíclico: definición; orden del grupo, grupo cociente, teorema de Lagrange.

Unidad N° 4

Conjunto Ordenado: elementos distinguibles, diagrama de Hasse, red, propiedades.
Estructuras Algebraicas: Retículo, propiedades, clasificación, Álgebra de Boole, propiedades, vínculo entre las distintas estructuras.
Funciones booleanas: definición, formas normales, simplificación, uso de compuertas.

Unidad N° 5

Grafos: notación, vértices, aristas, caminos, grado, propiedades, subgrafos, matriz de adyacencia, grafo completo, grafo conexo.
Digrafo: matriz de incidencia, digrafos fuertemente conexas, búsqueda de componentes f.c., uso de relación de equivalencia, procedimiento matricial. Ordenamiento por niveles, relación de orden, procedimiento matricial.
Conjunto de corte, conjunto desconectante, istmo, puente, caminos y circuitos de Euler, Caminos y circuitos de Hamilton, propiedades.
Grafos planos, isomorfismo de grafos.
Árbol: definición, árbol no dirigido, árbol dirigido; definición de raíz, hoja, altura, árbol, antecesores, niveles, balanceados.
Recorrido de árboles: preorden, postorden, orden simétrico; notación polaca directa, notación polaca inversa, notación polaca infija.

Unidad N° 6

Estructura Algebraica: Grupo Libre, lenguajes, gramáticas: definición, clasificación, operatoria concatenación, intersección, unión, reversa; jerarquización de lenguajes.
Máquinas de estado finito: autómata finito y lenguajes regulares.

2.2.- Trabajos Prácticos: Guía impresa a continuación.

Práctico N° 1: Lógica, Conjuntos, Números Naturales, Números Enteros.
Prácticos N° 2 y 3: Relaciones, Operaciones Binarias, Operatoria Matricial, Relaciones Binarias, propiedades, clasificación. Relaciones Clausura.
Prácticos N° 4: Grupo.
Práctico N° 5: Conjunto Ordenado. Aplicación
Prácticos N° 6, 7: Grafos, Árboles
Práctico N° 8: Lenguajes, Autómatas

Se considera la realización por parte de los alumnos, en forma grupal, de algunos trabajos de aplicación para determinados temas.

2.3.- Cronograma:

Unidad N° 1: 2(dos) semanas
Unidad N° 2: 4 (cuatro) semanas
1° Parcial: 3° semana de mayo
Unidad N° 3: 2 (dos) semanas
Unidad N° 4: 2 (dos) semanas
Unidad N° 5: 2 (dos) semanas
Unidad N° 6: 1 (una) semana
2° Parcial: 2° semana de julio
Recuperatorio 1° o 2° parcial: 3° semana de julio

Los trabajos de aplicación tienen fecha de entrega a la semana siguiente de finalizada la unidad correspondiente, influyen con un porcentaje del 10% en la nota de los parciales.

3.- CONDICIONES REGLAMENTARIAS

Régimen de Aprobación
Existen tres formas de aprobación:
1.- Curso Regular y Examen Final
2.- Curso Regular y Promoción
3.- Examen Libre

1.- Régimen de Curso Regular y Examen Final

1.1.- Curso Regular: El curso regular de la materia consiste en cumplir con los siguientes requisitos:

1.1.1.- Asistencia: Tener el 75% de asistencia en las clases dictadas en la asignatura durante el año.

1.1.2.- Exámenes Parciales: Se deberá aprobar dos exámenes parciales en las fechas fijadas en el cronograma de la asignatura. La aprobación consiste en obtener una calificación 4 o más puntos en cada examen parcial sobre una escala de 0 a 10. El temario de cada parcial está indicado en el cronograma de la materia. El alumno tendrá la opción de recuperar cada parcial, existen tres oportunidades, en las fechas fijadas según el cronograma de la materia de acuerdo al calendario académico.

1.1.3.- Firma del Curso Regular: Cumplidos todos los requisitos, el alumno firmará la Libreta Universitaria con el profesor a cargo de la comisión quien consignará la aprobación de Trabajos Prácticos y de los Parciales.

1.2.- Examen Final:

1.2.1.- Las fechas de los exámenes finales son las establecidas en el calendario académico de la Universidad.

1.2.2.- Las condiciones para presentarse al examen final son: 1) La firma del Curso Regular en la Libreta Universitaria. 2) La inscripción en la Oficina de Alumnos en las fechas establecidas al efecto. 3) Presentarse en un llamado y sólo en uno de cada turno de exámenes de diciembre marzo, julio.

1.2.3.- Para ingresar al examen final deberá presentar: 1) Libreta Universitaria. 2) El comprobante de habilitación extendido por Oficina de Alumnos.

1.2.4.- El temario de examen final versará sobre el contenido total de programa en vigencia, teniendo en cuenta como referencia para la Teoría y Práctica la bibliografía básica propuesta.

1.3.- Perdida de la condición de Regularidad.

1.3.1.- En caso de perderse las condiciones de regularidad, el alumno deberá recursar la materia.

1.3.2.- Las condiciones de regularidad se pierden en las siguientes circunstancias: 1) Haber resultado aplazado en 3 (tres) exámenes parciales y/o recuperatorios 2) Haber vencido el plazo de 5 (cinco) turnos consecutivos de exámenes finales.

2.- Régimen de Curso Regular y Promoción

2.1.- Curso Regular: El curso regular de la materia consiste en cumplir con los siguientes requisitos:

2.1.1.- Asistencia: Tener el 75% de asistencia en las clases dictadas en la asignatura durante el año.

2.1.2.- Exámenes Parciales: Se deberá aprobar dos exámenes parciales en las fechas fijadas en el cronograma de la asignatura. La aprobación consiste en obtener una calificación de 7 o más puntos en cada examen parcial sobre una escala de 0 a 10. El temario de cada parcial está indicado en el cronograma de la materia. El alumno tendrá la opción de recuperar cada parcial, existen tres oportunidades, en las fechas fijadas en el cronograma de la materia, de acuerdo al calendario académico.

2.1.3.- Aprobación por Promoción: Cumplidos todos los requisitos, el alumno firmará la Libreta Universitaria con el profesor a cargo de la comisión quien consignará la aprobación de Trabajos Prácticos, de los Parciales y de la Asignatura siendo la calificación final el promedio de las notas obtenidas en los parciales y/o recuperatorios.

3.- Régimen de Examen Libre

Consiste en un examen de evaluación general de temas de Práctica y Teoría de acuerdo a los programas en vigencia y en las fechas establecidas por la Universidad.

Trabajo Práctico Nº 1

Lógica

1- Construir las tablas de verdad, para cada caso indicar si es tautología, contradicción o contingencia:

1.1 $(p \wedge q) \Rightarrow r$

1.2 $-(p \vee q) \Leftrightarrow (-p \wedge -q)$

1.3 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$

1.4 $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

1.5 $((p \Rightarrow q) \wedge (-q)) \Rightarrow (-p)$

1.6 $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

2- Conociendo los valores de verdad de las proposiciones simples V(p)=V(r)=V y V(q)=V(s) = F determinar el valor de verdad de la proposición compuesta:

2.1 $r \Rightarrow (s \wedge p)$

2.2 $(p \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg s)$

2.3 $s \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

3- Para las siguientes proposiciones compuestas dar todos los posibles valores de verdad de las proposiciones simples de modo que resulten falsas:

3.1 $[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow (s \vee t)$

3.2 $[p \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow (s \wedge \neg t)$

4- Simplificar las siguientes expresiones:

4.1 $-(-p \wedge -(q \vee -p))$

4.2 $-q \Rightarrow (-q \Rightarrow -p)$

4.3 $-(-p \Rightarrow -q) \Leftrightarrow ((-p \wedge -q) \Leftrightarrow -(p \vee q))$

5- Justificar el razonamiento:

5.1
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \underline{r \Rightarrow s} \\ s \end{array}$$

5.2
$$\begin{array}{l} \neg p \vee \neg q \vee r \\ r \Rightarrow t \\ \underline{\neg(q \Rightarrow t)} \\ \neg p \end{array}$$

5,3
$$\begin{array}{l} (q \wedge r) \Rightarrow p \\ \neg t \Rightarrow r \\ \neg t \vee s \\ \underline{q \wedge \neg s} \\ p \end{array}$$

Conjunto

6- Siendo A = { a, b, c, {a, b }, ∅}, evaluar :

6.1 $\{a, b\} \in A$

6.2 $\{a, b\} \subseteq A$

6.3 $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ V
6.4 $\varnothing \subseteq \varnothing$ V
6.5 $\varnothing \subseteq A$ V
6.6 $\varnothing \in A$ V
6.7 $\{\varnothing, a, b\} \subseteq \{a, b\}$ F
6.8 $\{\varnothing, a, b\} \subseteq A$ V
6.9 $\{a, \varnothing, b, \varnothing, c, \varnothing, \{a, b\}, \varnothing\} = A$ V
6.10 $\{\{a, b\}\} \subseteq A$ V
6.11 $\{a, b, c\} \in A$ F
6.12 $\{a, b, c, \{a, b\}\} = A$ F
6.13 $\{\{a, b, c\}\} \subseteq A$ F

7- Siendo $A = \{\varnothing\}$, evaluar:
7.1 $\varnothing \in A$ V
7.2 $\varnothing \subseteq A$ V
7.3 $\varnothing \in P(A)$ V
7.4 $\varnothing \subseteq P(A)$ V
7.5 $\varnothing = A$ F
7.6 $\varnothing \in P(P(A))$ V

8- Dado $A = \{5\}$:
8.1 Hallar $P(P(A))$
8.2 Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones:
8.2.1 $5 \in P(P(A))$ F
8.2.2 $\varnothing \notin P(A)$ F
8.2.3 $\{\{5\}\} \in P(P(A))$ V
8.2.4 $\{5\} \subseteq P(A)$ F
8.2.5 $P(A) \subseteq P(P(A))$ V

$P(A) = \{\varnothing, \{5\}\}$
$P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing, \{5\}\}, \{\varnothing\}, \{\{5\}\}\}$

9- Demostrar las siguientes propiedades:
9.1 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
9.2 $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$
9.3 $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$
9.4 $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
9.5 $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$
9.6 $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
9.7 $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
9.8 $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
9.9 $P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y)$

NO

10- Definida $f: U \to \{0, 1\}$ de tal forma:
$\forall A \subseteq U$ y $\forall x \in U$ $\quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$
se denomina función característica restringida al conjunto A.
Verificar: siendo $A, B \subseteq U$
10.1 $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$
10.2 $f_{A \cap B} = f_A . f_B$

10.3 $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$

10.4 $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2 f_A \cdot f_B$

NO

11- Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $A = \{a, b\}$; $B = \{g\}$; $C = \{b, c, g\}$, hallar:

11.1 $f_B(g)$

11.2 $f_C(a)$

11.3 Representar f_A, f_B, f_C, f_U, $f_\varnothing$ usando arreglos de ceros y unos.

11.4 Representar $f_{A \cup B}$, $f_{B \cap C}$, $f_{A \cup C}$, $f_{U - C}$ usando arreglos de ceros y unos.

12- Usando la función característica verificar que la operación diferencia simétrica es asociativa.

Números Naturales

13- Probar utilizando el principio de inducción completa:

13.1 $\forall n \in N \ \sum_{i=1}^{n} (2/3)^i = 2 - 2^{n+1}/3^n$

13.2 $\forall n \in N \ \sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

13.3 $\forall n \in N_0 \ \sum_{i=0}^{n} r^i = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$ con $r \in R^+ - \{1\}$

13.4 $\forall n \in N \ \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

13.5 $\forall n \in N \ \sum_{i=n}^{2n} i = 3n(n+1)/2$

13.6 $\forall n, a, d \in N \ a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots + (a+nd) = (n+1)(2a+nd)/2$

13.7 $\forall n \in N \ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ con $\{A_i\}_{i=1}^{n}$

NO

13.8 $\forall n \in N \ a \in R^+ \ (1+a)^n \geq 1 + na$

13.9 Si $n > 4 \Rightarrow 2^n > n^2$

13.10 $\forall n \in N \ \sum_{i=1}^{n} 1/i^2 \leq 2 - 1/n$

13.11 Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Números Enteros

14- Hallar el cociente y el resto de la división de a por b en los siguientes casos:

14.1 $a = 3$, $b = 7$

14.2 $a = -8$, $b = -5$

14.3 $a = n^2 - 1$, $b = n$

15- Si $a \in Z$ y el resto de la división de a por 10 es 3, calcular:

15.1 el resto de dividir $3a + 1$ por 10

15.2 el resto de dividir a^2 por 10

15.3 el resto de dividir $10a - 3$ por 100

15.4 el resto de dividir $3a - 1$ por 5.

16- Escribir las tablas de suma y producto de restos de la división por 2, 3, 4 y 5.

17- Decir cuales de las siguientes relaciones son verdaderas y cuales son falsas; probar las V y indicar un contraejemplo para las F.

17.1 $2 \mid (a+b) \Rightarrow 2 \mid a \vee 2 \mid b$ F Contraejemplo: $2 \mid (7+13) \Rightarrow 2 \mid 7 \vee 2 \mid 13$

17.2 $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ $\quad a \neq 0$ F contra...

17.3 $a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow ab \mid c$ $\quad a \neq 0 \ b \neq 0$ F

17.4 $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b+c \quad a \neq 0$
17.5 $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid tb+sc \quad a \neq 0,\ t, s \in Z$
17.6 $5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b$
17.7 $a \mid b^2 \Rightarrow a \mid b \quad a \neq 0$
17.8 $2 \mid a^2+a$
17.9 $a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = |b| \quad a \neq 0 \quad b \neq 0$

Propiedades:
- $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$
- $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b \cdot c)$
- $a|b \vee a|c \Rightarrow a|b \cdot c$
- $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

18- Probar que $\forall\, n \in N$
18.1 $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$
18.2 $2^{4n} - 1$ es divisible por 15
18.3 $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7
18.4 $n \geq 10 \quad n^3 + 3n^2 + 2n$ es divisible por 3.

19- Sea m.c.d.{a, b} = (a, b). Calcular:
19.1 (a, b) y escribirlo como suma combinación lineal entera si $a = 168$ y $b = 180$
19.2 idem si $a = 92$ y $b = 26$
19.3 $(a, a + 1) = 1$
19.4 $(a, m) = (b, m) = 1 \Rightarrow (a\,b, m) = 1$
19.5 $(a, c) = d \wedge a \mid b \wedge c \mid b \Rightarrow a\,c \mid b\,d$ con $a \neq 0$ y $c \neq 0$

20- Sea n un número natural, se sabe que el resto de la división de 748 por n es 20 y el resto de la división de 1229 por n es 33, dar el valor de n.

21- Para cada una de las proposiciones indicar el valor de verdad, probar las verdaderas y dar un contraejemplo si son falsas:
21.1 Si n es un número entero, los números $n + 1$ y $n + 2$ son coprimos
21.2 Si a, b son números enteros, mcd{a, b} = mcd{ |a|, |b| }
21.3 Los números $21\,a - 8$ y $7\,a - 6$ no son primos, a es un número entero fijo

Aplicación Práctica: Análisis Combinatorio

22- Verificar: a) $\binom{n}{n} = 1$; b) $\binom{n}{0} = 1$; c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; d) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k}$
con $n, k \in N \quad n > k$.

23 – Utilizando el principio de inducción completa probar:
a) $V_{n,m} = n! / (n-m)!$ con $n, m \in N \quad n \geq m$
b) $V'_{n,m} = n^m$ con $n, m \in N$

24- Sea el conjunto formado por las tres primeras letras del alfabeto castellano A = {a, b, c} cual es el número de maneras en que podemos formar secuencias con dichas letras
a) cada secuencia debe tener las tres letras.
b) cada secuencia debe tener dos letras distintas de las tres que hay en A.
c) cada secuencia debe tener dos letras de las tres que hay en A.
d) cada secuencia debe tener cuatro letras de las que hay en A.
e) cada secuencia debe tener dos letras distintas de las tres que hay en A, se consideran dos secuencias iguales si las letras que las forman están dispuestas en otro orden.
f) cada secuencia debe tener dos letras de las tres que hay en A, se consideran dos secuencias iguales si las letras que las forman están dispuestas en otro orden.

Trabajo Práctico Nº 2

Producto Cartesiano

1- Probar:

1.1 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

1.2 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

1.3 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

1.4 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

2- Dado $A = \{3, 8\}$:

2.1 Hallar $P(A^2)$

2.2 Determinar el valor de verdad de las expresiones:

2.2.1 $\{(3,3)\} \subseteq A^2$ V

2.2.2 $\{(3,8)\} \in P(A)$ F

2.2.3 $\{(3,8), (8,3)\} \in P(A^2)$ V

2.2.4 $\{8\} \in P(A^2)$ F

2.2.5 $\varnothing \in A^2$ F

3- Sea $|A| = n$ y $|B| = m$, probar usando inducción: $|A \times B| = n\,m$

4- Sea $\{A_i\}$ con $1 \leq i \leq n$, $n \in N$, probar: $\left|\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

5- Sea $\{A_i\}$ con $1 \leq i \leq n$, $n \in N$, probar: $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \times B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B)$

Relaciones

6- Dado $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$

6.1 ¿Cuántas relaciones se pueden definir de A en B? $|R| = |P(R)| = 2^{n \cdot m}$ $n \cdot m = |A| \cdot |B|$

6.2 Para cada una de las relaciones de A en B indicar dominio e imagen:

$R = \{ (1, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

$S = \{ (2, a), (3, b) \}$

$T = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

$V = \varnothing$

$W = A \times B$

7- Sea $R \subseteq N \times N$ definida por: $R = \{(x, y) \;/\; x + 2y = 12\}$. Se pide:

7.1 Expresar R por extensión

7.2 Hallar D_R e I_R

7.3 Hallar D_R^{-1} e I_R^{-1}

7.4 Representar en un diagrama cartesiano

8- Sea $S \subseteq R \times R$ definida por $S = \{(x, y) / x \geq y\}$

8.1 Representar en un diagrama cartesiano

8.2 Hallar D_S e I_S

8.3 Hallar D_S^{-1} e I_S^{-1}

9- Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Sean $A, B \in P(X)$ expresar por extensión las siguientes relaciones:

9.1 $R_1 = \{(A, B) \;/\; A \subset B\}$

9.2 $R_2 = \{(A, B) \ / \ A = \bar{B}\}$

9.3 $R_3 = \{(A, B) \ / \ B \cap \bar{A} = \varnothing\}$

9.4 $R_4 = \{(A, B) \ / \ \bar{B} \subset A\}$

9.5 $R_5 = \{(A, B) \ / \ A \cap B = \varnothing\}$

10- Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones R y S definida de A en B:

$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$

$S = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2)\}$, hallar: $\overline{R}, R^{-1}, \overline{S}, S^{-1}, S \cap R, (R \cup S)^{-1}$

11- Sean R, S relaciones de A en B. Decir si son válidas y en caso afirmativo demostrar:

11.1 $D_{R \cap S} = D_R \cap D_S$ F

11.2 $I_{R \cap S} = I_R \cap I_S$ F

11.3 $D_{R \cup S} = D_R \cup D_S$ V

11.4 $I_{R \cup S} = I_R \cup I_S$ V

12- Sean R y S relaciones de A en B. Probar:

12.1 $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

12.2 $R \subseteq S \Leftrightarrow \bar{S} \subseteq \bar{R}$

12.3 $D_{R-1} = I_R$

12.4 $I_{R-1} = D_R$

12.5 $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

12.6 $\overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S}$

$\overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$

Funciones - Operaciones Binarias

13- Indicar cuáles de las siguientes son operaciones binarias en A. Justificar en cada caso.

13.1 $A = Q$ $\quad a * b = b / a$

13.2 $A = Z$ $\quad a * b = a + b + a b$

13.3 $A = N$ $\quad a * b = c$ con $c = \max\{a, b\}$

13.4 $A = R$ $\quad a * b = a - b$

13.5 $A = P(B)$ $\quad X * Y = X \cup Y$

14- En $A = \{a, b, c, d, e\}$ se define * por la siguiente tabla:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

Calcular: $b * d$; $c * c$; $[(a * c) * e] * a$

Calcular: $(b * d) * c$ y $b * (d * c)$

¿Es * asociativa?

¿Es * conmutativa?

15- Estudiar conmutatividad, asociatividad, existencia de neutro y de simétrico para cada una de las siguientes * en A.

15.1 $A = Z^+$ $\quad a * b = a^b$

15.2 $A = R - \{-1\}$ $\quad a * b = a + b + a\,b$

15.3 $A = Z$ $\quad a * b = a + b + 2$

15.4 $A = R$ $\quad a * b = a\,|b|$

15.5.1 $A = \{x, y\}$, * dada por:

*	x	y
x	x	y
y	y	x

15.5.2 $B = A \times A \wedge \bar{*} : B \times B \to B \,/\, (a, b)\,\bar{*}\,(c, d) = (a * d, b)$ idem para $\bar{*}$ en B

15.6 $A = P(D)$, $D = \{a, b\}$ $\quad X * Y = X \Delta Y$

15.7 $A = \{1, -1, i, -i\}$ $\quad a * b = a \,.\, b$

16- Calcular $A \vee B$, $A \wedge B$

16.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$x + y + z + \square = 240$

$x = \cancel{\square}$

$2x = y$

$x = 2 . z$

17- Probar:

17.1 $A \vee A = A = A \wedge A$

17.2 $A \vee B = B \vee A$

$A \wedge B = B \wedge A$

17.3 $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

17.4 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

<u>Manejo Matricial de Relaciones</u>

18- Dado $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 9, 11\}$ y $R: A \to B$ definida por $a\,R\,b \Leftrightarrow$ "b es múltiplo de a" indicar:

18.1 R por extensión y la matriz M_R

18.2 $\bar{R}$ por extensión y la matriz $M_{\bar{R}}$

18.3 R^{-1} por extensión y la matriz M_R^{-1}

calcular:

18.4 $M_{\bar{R}} \vee \overline{M_R}$

18.5 $(M_{\bar{R}})^t \wedge M_R^{-1}$

19- Para los ejercicios 6), 10) hallar las matrices correspondientes

20- 20.1 Si $A = B = \{x \,/\, x$ es divisor positivo de $8\}$

20.1.1 Escribir por extensión R definida por: $a\,R\,b \Leftrightarrow a + b \leq 8$

20.1.2 Hallar el digrafo de R

20.1.3 Hallar el dominio y la imagen de R

20.1.4 Hallar la matriz de R

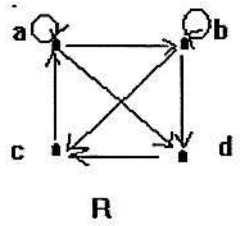
20.2 Si $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ y $B = \{1, 4, 6, 9\}$

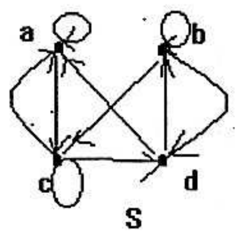
20.2.1 Escribir por extensión R: $A \rightarrow B$ tal que $a\,R\,b \Leftrightarrow a \mid b$
20.2.2 Hallar la matriz de R
20.2.3 Hallar el dominio y la imagen de R

20.3 Hallar R definida en A = {a, b, c, d}, dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20.4 Hallar R^{-1} y $\bar{R}$ para R definida en a), b) y c).

20.5 Calcular $R \cap S$, $R \cup S$, R^{-1}, $\bar{R}$, S^{-1}, $\bar{S}$ para R y S definidas por los siguientes esquemas:





21- Si R y S están definidas en A verificar:
21.1 $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$
21.2 $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$
21.3 $M_{R^{-1}} = (M_R)^t$
21.4 $M_{\bar{R}} = \overline{M_R}$

Trabajo Práctico N° 3

Relaciones Binarias - Propiedades

1- 1.1 Sea $A = \{0,1\}$ Estudiar las propiedades de

1.1.1 $R_1 = \{(0,0), (1,1)\}$
1.1.2 $R_2 = \{(0,1), (1,0)\}$
1.1.3 $R_3 = \{(0,0), (0,1)\}$
1.1.4 $R_4 = A \times A$

1.2 Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ Estudiar las propiedades de

1.2.1 $R_1 = \varnothing$
1.2.2 $R_2 = \{(0,0), (1,1)\}$
1.2.3 $R_3 = \{(0,1), (2,3)\}$
1.2.4 $R_4 = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$
1.2.5 $R_5 = \{(0,1)\}$
1.2.6 $R_6 = \{(0,1), (0,0), (1,1),(1,0)\}$
1.2.7 $R_7 = \{(2,2)\}$

1.3 Si $A = \{x / x$ es divisor positivo de $12\}$, se define: $a\,R\,b \Leftrightarrow 2 \mid (a-b)$, $a\,S\,b \Leftrightarrow 3 \mid (a-b)$: calcular $\bar{R}$, $R \cap S$, $R \cup S$, S^{-1} y estudiar sus propiedades

1.4 En el conjunto R de los números reales se definen: $a\,R\,b \Leftrightarrow a < b$, $a\,S\,b \Leftrightarrow a > b$: hallar $R \cap S$, $R \cup S$, R^{-1}, $\bar{S}$ y estudiar sus propiedades

1.5 Estudiar las propiedades, cuando corresponda, para las relaciones definidas en el ejercicio 20 del Trabajo Práctico N° 2.

2- Estudiar las propiedades de cada una de las relaciones R definidas en cada uno de los siguientes casos:

2.1 $x\,R\,y \Leftrightarrow x \mid y$ en Z
2.2 $x\,R\,y \Leftrightarrow x \mid y$ en N
2.3 $x\,R\,y \Leftrightarrow x = y^2$ en N
2.4 $x\,R\,y \Leftrightarrow x = y^2$ en $\{0,1\}$
2.5 $x\,R\,y \Leftrightarrow p \mid (x-y)$ en Z, $p \in$ N
2.6 $x\,R\,y \Leftrightarrow x \le y$ en Z

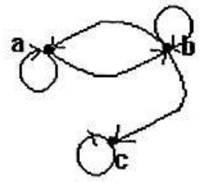
3- Sea A un conjunto, encontrar una relación que sea: 3.1 Simétrica y transitiva, pero no reflexiva;
3.2 Transitiva y reflexiva, pero no simétrica; 3.3 Simétrica y reflexiva, pero no transitiva;
3.4 Simétrica y antisimétrica; 3.5 Simétrica y asimétrica.

4- Sean R_1 y R_2 dos relaciones definidas sobre A. Probar:

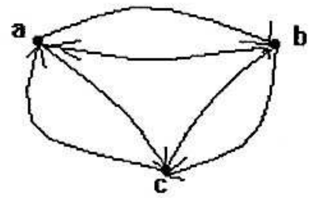
4.1 Si R_1 y R_2 son antisimétricas, entonces $R_1 \cap R_2$ es antisimétrica en A;
4.2 Si R_1 y R_2 son simétricas, entonces $R_1 \cap R_2$ es simétrica en A.

5- Dado $A = \{a, b, c\}$ y cada una de las siguientes relaciones $R: A \to A$, estudiar sus propiedades:

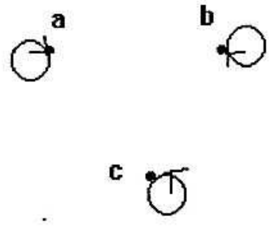
i)



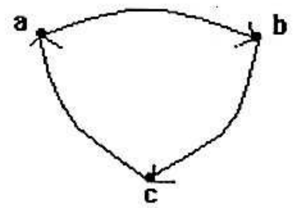
ii)



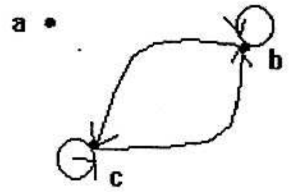
iii)



iv)



v)



vi)

$$M_R = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

6- 6.1 Sea $\Delta_A = \{(a, a) / a \in A\}$ Probar que R es reflexiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_A \subseteq R$;

6.2 Sea $R: A \rightarrow A$. Demostrar que R es simétrica $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$;

6.3 R es arreflexiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_A \cap R = \varnothing$;

6.4 R es antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;

6.5 Si R y S son relaciones de equivalencia $\Leftrightarrow$ $R \cap S$ es de equivalencia.

Relación de Equivalencia

7- Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sean $A_1 = \{a, b, c\}$; $A_2 = \{b, c, d\}$; $A_3 = \{a, e\}$; $A_4 = \{d, e\}$; $A_5 = \varnothing$

¿Cuáles de las siguientes son particiones de A?

7.1 $\{ A_1, A_2 , A_5 \}$

7.2 $\{ A_1, A_4 \}$

7.3 $\{ A_2, A_3 \}$

7.4 $\{ A_2, A_3, A_4 \}$

8- Justificar cuáles de los siguientes conjuntos son una partición de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

8.1 $\{\{1\},\{2, 3\},\{4, 5\}\} = P_1$

8.2 $\{\{1\},\{2\}, \varnothing, \{3, 4\},\{5\}\} = P_2$

8.3 $\{\{1\},\{2, 3\},\{3, 4\},\{5\}\} = P_3$

8.4 $\{\{1\},\{2, 3\},\{4\}\} = P_4$

8.5 $\{\{1, 2\},\{3, 4, 5\}\} = P_5$

9- Verificar si las siguientes relaciones son de equivalencia:

9.1 $R \subseteq N \times N$ $\quad R = \{ (a, b) \in N \times N / a + b \text{ es par}\}$

9.2 $R \subseteq Z \times Z$ $\quad a R b \Leftrightarrow (-1)^a = (-1)^b$

9.3 $x R y \Leftrightarrow x . y > 0$ en $Z - \{0\}$

9.4 $x S y \Leftrightarrow (x - y) \in Z$ en R

9.5 $x S y \Leftrightarrow |x - 2| = |y - 2|$ en R, interpretar geométricamente

9.6 $x S y \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{5} x = y^2 + \sqrt{5} y$ en R, interpretar geométricamente

10- Para todos los casos de los ejercicios anteriores 2 y 9 donde sea posible, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

11- Verificar si las siguientes relaciones son de equivalencia, en caso afirmativo, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, interpretar geométricamente éste último:

11.1 $(x, y)\ R\ (z, t) \Leftrightarrow x + t = y + z$ en $N \times N$
11.2 $(x, y)\ R\ (z, t) \Leftrightarrow x \,.\, t = y \,.\, z$ en $N \times N$
11.3 $(x, y)\ S\ (z, t) \Leftrightarrow y - x = t - z$ en R^2
11.4 $(x, y)\ S\ (z, t) \Leftrightarrow x = z$ en R^2
11.5 $(x, y)\ S\ (s, t) \Leftrightarrow (x - s) \in Z$ en R^2

12- 12.1 Si R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia definidas sobre A, probar que $R_1 \cap R_2$ también es de equivalencia.

12.2 Sea R_1 la relación módulo 2 y R_2 la relación módulo 3, definidas sobre Z; hallar $R_1 \cap R_2$ y el conjunto cociente: $Z \mid R_1 \cap R_2$.

12.3 Sea R_1 la relación módulo 6 y R_2 la relación módulo 10, definidas sobre Z; hallar $R_1 \cap R_2$ y el conjunto cociente: $Z / R_1 \cap R_2$.

13- Siendo $R \subseteq AxA$ una relación de equivalencia, probar: $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in A/R \wedge \bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \phi$.

14- Siendo $P = \{A_i\}$ una partición de A, probar: $R \subseteq A \times A$ tal que
$x\ R\ y \Leftrightarrow \exists\ A_i \in P \wedge x \in A_i \wedge y \in A_i$ es una relación de equivalencia tal que $P = A/R$

15- Con referencia al ejercicio 8) indicar, cuando corresponda, la relación de equivalencia asociada.

16- Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $P = \{\{a, b, c\},\{d, e\},\{f, g\}\}$: hallar la matriz de la relación $R: A \rightarrow A$ que define la partición P.

17- Sea $P = \{ A_k / k \in [0, +\infty)\}$, $A_k = \{k, -k\}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$: 17.1 ¿ Es P una partición de los R ?; 17.2 Indicar cuál es la relación de equivalencia S que queda inducida sobre R de tal forma que $P = R / S$.

18- Sea $P = \{ A_k / k \in R\}$, $A_k = \{ (x, x + k) / x \in R\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$: 18.1 ¿ Es P una partición de R^2 ?; 18.2 Indicar cuál es la relación de equivalencia de S que queda inducida sobre R^2 de tal forma que: $P = R^2 / S$.

Aplicación Práctica: Composición de Relaciones - Relaciones Clausura

19- Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, y, b\}$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ tal que
$R = \{(a, y), (b, x), (b, z)\}$, $S = \{(x, a), (y, y), (z, b)\}$, hallar $S \circ R$

20- 20.1 Sean A, B, C y D cuatro conjuntos, sean las relaciones $G_1 \subseteq A \times B$; $G_2 \subseteq B \times C$; $G_3 \subseteq C \times D$. Probar:

20.1.1. $(G_2 \circ G_1)^{-1} = G_1^{-1} \circ G_2^{-1}$
20.1.2 $(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$

20.2. Sean $R: A \rightarrow B$, $S: B \rightarrow C$, $T: B \rightarrow C$, probar: $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
20.3 Sean $R: A \rightarrow B$, $S: A \rightarrow B$, $T: B \rightarrow C$, probar: $R \subseteq S \Rightarrow (T \circ R) \subseteq (T \circ S)$

21- Hallar $S \circ T$ y $T \circ S$ en los siguientes casos:

21.1 $S = \{(x, y) \ / \ x \in N, y = x^2 + 1\}$

$T = \{(x, y) \ / \ x \in N, y = 3x + 2\}$

21.2 $S = \{(x, y) \ / \ x \in R, y = 2x - 1\}$

$T = \{(x, y) \ / \ x \in R, y = 3x^2\}$

22- Sean A, B, C matrices conformables para el producto, con elementos en $\{0, 1\}$, probar: $A \otimes (B \otimes C) = A \otimes (B \otimes C)$

23- Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, 4, 5\}$, $R: A \to B$, $S: B \to C$ con $R = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ $S = \{(a, a), (a, 4)\}$, hallar:

23.1 $S \circ R$

23.2 M_R

23.4 M_S

23.5 $M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S$

24- 24.1 Con referencia al ejercicio 1.2 hallar:

24.1.1 $R_4 \circ R_6$, 24.1.2 $R_6 \circ R_4$, 24.1.3 $R_3 \circ R_5$, 24.1.4 $R_5 \circ R_3$, 24.1.5 $R_5 \circ R_5$;

24.2 Para el conjunto A definido en el ejercicio 1.2, hallar:

24.2.1 $M_{R6 \circ R4}$, 24.2.2 $M_{R6 \circ R6}$, 24.2.3 $M_{R4 \circ R4}$, 24.2.4 $M_{R6 \circ R4}$;

24.3 Si R y S son relaciones de equivalencia en A

¿Es $R \circ S$ una relación de equivalencia en A?

25- Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación $R \subseteq A \times A$ tal que $R = \{(a, b); (a, c); (a, e); (e, d); (b, c); (e, c); (c, d); (d, a); (d, c)\}$, hallar: $R \cup \Delta_A$; $R \cup R^{-1}$; R^2; $R^3\{c\}$.

26- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones definidas sobre A:

$R_1 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

en cada caso indicar:

26.1 M_R, el digrafo de R

26.2 clausura reflexiva, clausura simétrica, clausura transitiva

26.3 M_R^*, el digrafo de R^*

27- Si $A = \{a, b, c\}$ y $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (c, b), (b, c)\}$:

27.1 Hallar M_R^{∞} usando : $M_R^{\infty} = M_R \vee (M_R)^2 \vee (M_R)^3$

27.2 Hallar R^{∞} usando el algoritmo de Warshall

27.3 Si $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = W_0$

Hallar W_1, W_2 y W_3 usando Warshall

Trabajo Práctico N° 4

Grupo

1- Indicar cuales de las siguientes operaciones binarias definen grupos en A

a) $A = Z$, $a * b = a . b$

b) $A = R - \{-1\}$, $a * b = a + b + a b$

c) $A = \{0,1\}$ $a * b = a + b$ $\forall x \in X$ con

+	0	1
0	0	1
1	1	0

d) $A = P(D)$ con $D = \{a, b\}$ $X * Y = X \Delta Y$

e) $A = \{ 1, -1, i, -i \}$ $a * b = a . b$

2- Dada la relación S de equivalencia tal que $a S b \Leftrightarrow |a| = |b|$ verificar que es compatible:

a) en R con la operación suma, b) en $R - \{0\}$ con la operación producto.

3-a) Sea $(Z,+)$ grupo abeliano y $n \in N$, probar: la congruencia módulo n es compatible con la +

b) Sea $(Z,.)$ semigrupo y $n \in N$, probar que la congruencia módulo n es compatible con el .

c) Probar las siguientes propiedades de la congruencia, $n \in N$

c_1) $\forall a \in Z: a \equiv a(n)$; c_2) $a \equiv b(n) \Rightarrow b \equiv a(n)$; c_3) $a \equiv b(n) \wedge b \equiv c(n) \Rightarrow a \equiv c(n)$

c_4) $a \equiv 0(n) \Rightarrow n \mid a$; c_5) $a c \equiv b c(n) \wedge (c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b(n)$

d) Sea Z_n el conjunto cociente de Z por la congruencia módulo n

d_1) Probar que $(Z_n, +_n)$ es grupo abeliano con $\bar{a} +_n \bar{b} = \overline{a+b}$

d_2) Probar que $(Z_n, ._n)$ es semigrupo abeliano con $\bar{a} ._n \bar{b} = \overline{a.b}$

4- a) Sea $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ grupos. Probar que $(G_1 \times G_2,*)$ es grupo con $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$

b) Sean $(Z_2, +_2)$ y $(Z_3, +_3)$ grupos, definir * en $Z_2 \times Z_3$ de forma tal que $(Z_2 \times Z_3 ,*)$ sea grupo. Estudiarlo completamente

c) $A = \{0,1\}^n$ $(a_0, \ldots, a_n) * (b_0, \ldots, b_n) = (a_0 + b_0, \ldots, a_n + b_n)$ según tabla en 1-c)

5- Si $(G,*)$ es semigrupo con neutro e. Probar que $G' = \{a \in G / a' \in G\}$ es grupo

6-Para cada uno de los siguientes semigrupos G, hallar el elemento neutro y el conjunto G'

a) $(G,*) = (Z, .)$

b) $(G,*) = (R^{nxn}, .)$

c) $(G,*) = (Z_5, ._5)$

d) $(G,*) = (Z_8, ._8)$

7- Indicar cuales de los siguientes subconjuntos de R son subgrupos de $(R,+)$:

a) Q

b) N

c) Z

d) $n Z = \{x \in Z / x = n . z \text{ con } z \in Z, n \in N, n \text{ fijo} \}$

8- a) Si $H_1, H_2, \ldots, H_n$ son subgrupos de $(G, *)$ grupo, probar $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ es subgrupo de G

b) Dar un ejemplo de un grupo G con dos subgrupos tales que su unión no sea un subgrupo

c) Sabiendo que $(\{0,1\}^4, +)$ (ver ejercicio 1-g) es grupo, verificar:

$H = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) / a_1 + a_2 = 0, a_0,a_1,a_2,a_3 \in \{0,1\} \}$ es subgrupo de $(\{0,1\}^4, +)$

d) Si $(G,*)$ es grupo, probar $C = \{a \in G / a * x = x * a, x \in G\}$es subgrupo de G
e) Verificar que $H = \{\emptyset, \{a\}\}$ es subgrupo de $(P(D), \Delta)$ con $D = \{a, b\}$

f) Comprobar que $H =\{ \overline{0}, \overline{2} \}$ es subgrupo de $(Z_4 , +_4)$ grupo conmutativo

9- a) Sea $(Z_{12}, +_{12})$ grupo abeliano, hallar todos los subgrupos y todos los generadores
b) Las mismas cuestiones que en a) para $(Z_7, +_7)$ y $(Z_{18}, +_{18})$
c) Idem a) para $(P(D), \Delta)$ con $D = \{a, b\}$
d) Sean $(Z_2, +_2)$ y $(Z_3, +_3)$ grupos conmutativos, en el grupo $(Z_2 \times Z_3 ,*)$ con * definida en el ejercicio 4-b), hallar todos los subgrupos

10- Sea $(G, *)$ y $(H, *')$ dos grupos con neutros e_G y e_H respectivamente, $f: (G,*)\rightarrow(H,*')$ un morfismo entre grupos, probar:
a) $f(e_G) = e_H$
b) $\forall a \in G: f(a') = [f(a)]'$
c) $N(f) = \{a \in G / f(a) = e_H\}$ es subgrupo de G
d) $I(f) = \{b \in H / \exists a \in G \wedge f(a) = b\}$ es subgrupo de H
e) f es monomorfismo $\Leftrightarrow N(f) = \{e_G\}$

11- a) Verificar si la siguiente función es un morfismo de grupo, hallar el núcleo y la imagen:
$f: (Z, +) \rightarrow (\{1, -1\}, .)$ tal que $f(x) = (-1)^x$
b) Hallar, de ser posible, un isomorfismo entre los grupos $(Z_6, +_6)$ y $(Z_2 \times Z_3 ,*)$ con * definida en el ejercicio 4-b)
c) Idem b) entre los grupos $(Z_4 , +_4)$ y $(\{1, -1, i, -i\}, .)$
d) Idem b) entre los grupos $(Z_8', ._8)$ y $(P(D), \Delta)$ con $D = \{a, b\}$

12- Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e. Sea H un subgrupo de G y sean $a, b \in G$:
a) Probar: $a \equiv b_{(H)} \Leftrightarrow a * b' \in H$ es una relación de equivalencia en G
b) Indicar para $a \in G$ $\bar{a} = \{x \in G / x \equiv a_{(H)}\} = H * a$
c) Sabiendo que $a \equiv b_{(H)} \Leftrightarrow a' * b \in H$ es una relación de equivalencia en G
Indicar para $a \in G$ $\bar{a} = a * H$
d) Probar: $H * e = e * H = H$
e) Probar $|H| = |H * a| = |a * H|$

13- a) Sea $(Z_{30}, +_{30})$ hallar las clases laterales determinadas por el subgrupo $H = < \overline{25} >$, indicar el conjunto cociente Z_{30} / H, justificar su estructura
b) Sea $(A, *)$ con $A = \{a, b, c, d, e, f\}$grupo, indicar si H es subgrupo normal de G,
$H = \{a, b, e\}$

*	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

d) Sea $(R^2, +)$ grupo y el subgrupo $H = \{(a, 0) / a \in R\}$, hallar las clases laterales determinadas por H, indicar el conjunto cociente R^2 / H, justificar su estructura
e) Sea $(\{0,1\}^5, +)$ grupo conmutativo y el subgrupo $H = \{(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) / a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$ hallar las clases laterales por H, indicar el conjunto cociente $\{0, 1\}^5 / H$, justificar su estructura

f) Idem b) para $H = \{\varnothing\_, \{a\}\}$ del grupo conmutativo $(P(D), \Delta)$ con $D = \{a, b\}$
g) Idem b) para $H = <(0, \bar{2})>$ de $(Z_2 \times Z_3, *)$ con $*$ definida en el ejercicio 4-b)

Aplicación Práctica: Composición de Funciones

14-Verificar la estructura de grupo:
a) $A = \{f : X \to X / \ f \text{ es biyectiva}\}$ $\quad f * g = f[g(x)] \quad \forall x \in X$
b) $A = S_3$ donde $S_3 = \{f : X \to X / \ f \text{ es biyectiva}\}$ $\quad f * g = f[g(x)] \quad \forall x \in \{1,2,3\}$

15-Determinar si $H_1 = \{f \in S_3 / f(3) = 3\}$, $H_2 = \{f \in S_3 / f(1) \in \{1,2\}\}$son subgrupos de $(S_3, °)$

16-Hallar todos los subgrupos de $(S_3, °)$

17-a) Sea el conjunto de símbolos gráficos $A = \{ \Delta, O, \quad \}$y el conjunto de permutaciones de los símbolos gráficos $G = \{ f / f: A \to A, \text{ biyectiva}\}$,tal que:

x	Δ	O	
f_1	Δ	O	

x	Δ	O	
f_2	Δ		O

x	Δ	O	
f_3		O	Δ

x	Δ	O	
f_4	O	Δ	

x	Δ	O	
f_5		Δ	O

x	Δ	O	
f_6	O		Δ

con la operación o según la tabla:

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

a_1) verificar si (G, o) es grupo, a_2) hallar todos los subgrupos (H_i, o) de (G, o), a_3) (G, o) es cíclico?, (H_i, o) es cíclico?, a_4) hallar las clases laterales a izquierda de $H = <f_5>$, indicar G / H, a_5) hallar las clases laterales a izquierda y a derecha de $H = <f_2>$ ¿es H subgrupo normal?, justificar en todos los casos.

Trabajo Práctico N° 5

Conjunto Ordenado

1- a) En $N_0 = N \cup \{0\}$ se define la relación $\underline{\alpha}$ de la siguiente forma:
$x \ \underline{\alpha} \ y \Leftrightarrow \exists z \in N_0 \ / \ y = x + z$, probar que $\underline{\alpha}$ es un orden en N_0

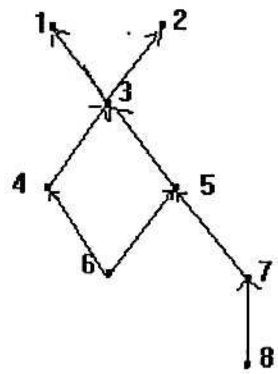
b) En N se define la relación $\underline{\alpha}$ en la siguiente forma: $x \ \underline{\alpha} \ y \Leftrightarrow \exists z \in N \ / \ y = x \, . \, z$
probar que es un orden en N. ¿ Queda Z ordenado por $\underline{\alpha}$?

c) En P(A) se define $\underline{\alpha}$: $X \ \underline{\alpha} \ Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$, probar que P(A) queda ordenado por $\underline{\alpha}$

d) Si (A, $\underline{\alpha}_1$) y (B, $\underline{\alpha}_2$) son conjuntos ordenados, probar que $\underline{\alpha}$ definida por
$(a, b) \ \underline{\alpha} \ (c, d) \Leftrightarrow a \ \underline{\alpha}_1 \ c \wedge b \ \underline{\alpha}_2 \ d$ ordena al A x B

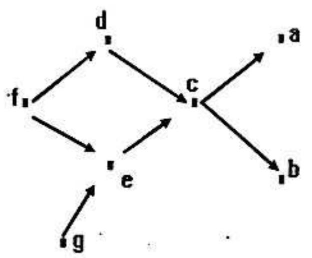
e) Indicar cuáles de las órdenes anteriores son órdenes totales y cuáles son buenos órdenes.

2- a) Sea D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ordenado como sigue



Considerar B = {4, 5, 6} y hallar cotas superiores e inferiores de B
¿Hay supremo para B? ¿Hay ínfimo para B?

b) En A = {a, b, c, d, e, f, g} ordenado como sigue:



Considerar B = {c, d, e} y hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, mínimo, supremo, máximo de B, maximales y minimales o primer y último elemento de A.

3- Sea $(A, \underline{\alpha})$ y $\varnothing \neq B \subseteq A$, sea m maximal de $(A, \underline{\alpha})$ y k cota superior de B: Demostrar que si se ordena a A con el orden recíproco $\underline{\alpha}^{-1}$ resulta m minimal y k cota inferior de B.

4- a) Sea $(D_6, |)$, $(P(B), \subseteq)$ con $B = \{a, b\}$ indicar los elementos de $D_6 \times P(B)$ relacionados con $(2, \{a\})$ con el orden producto;
b) determinar el orden lexicográfico de las cadenas de bits: 001, 111, 011, 000, 100 basado en el orden usual $1 \geq 0$, dibujar el diagrama de Hasse, con el orden producto.

5- Sobre D_{44} definir una relación de orden amplio no lineal; b) para el subconjunto $\{4, 22\}$ indicar las cotas inferiores, superiores, ínfimo, y supremo, de ser posible; c) para el subconjunto $\{2, 22, 44\}$ determinar si es bien ordenado, justificar.

6- Sean $A \neq \varnothing$ y $C = \{ P_i \,/\, P_i$ es una partición de $A\}$; en C se define la relación R:

$P_i \, R \, P_j \Leftrightarrow$ cada elemento de P_i está incluido en algún elemento de P_j

a) probar que R es una relación de orden; b) (C, R) es totalmente ordenado;

c) Aplicar a Realizar el diagrama de Hasse para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $C = \{ P_i \,/\, 1 \leq i \leq 4\}$

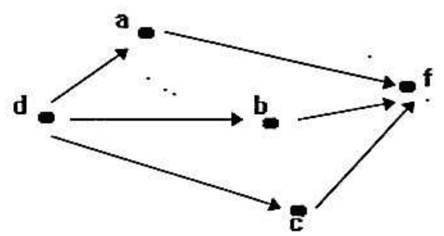
$P_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$; $P_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$; $P_3 = \{A\}$; $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

y realizar el diagrama de Hasse.

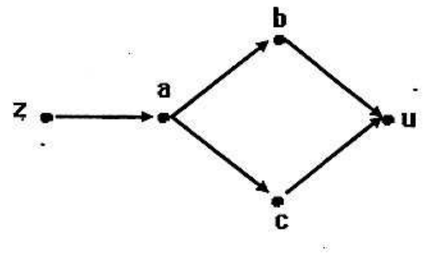
Red

7- Determinar si el conjunto con la relación dada es retículo:

a) $A = \{a, b, c, d, f\}$



b) $A = \{a, b, c, z, u\}$



8- a) En $A = \{0,1\}$ se definen $\underline{\alpha_1}$ y $\underline{\alpha_2}$ órdenes de la siguiente forma:

$a \, \underline{\alpha_1} \, b \Leftrightarrow a.b = a \quad \wedge \quad a \, \underline{\alpha_2} \, b \Leftrightarrow a + b = a$ con

.	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Probar que (A, $\underline{\alpha}_1$) y (A, $\underline{\alpha}_2$) son redes;

b) Sea $D_{30} = \{x \in N / x \mid 30\}$, probar (D_{30}, $\underline{\alpha}$) con $a \,\underline{\alpha}\, b \Leftrightarrow a \mid b$, es un red, dibujar el diagrama de Hasse, probar (D_{30}, + , .) / $a + b = [a, b]$ y $a . b = (a, b)$ es retículo algebraico;

c) Sea B = {a, b}, probar (P(B), $\subseteq$) es red, indicar las operaciones del retículo algebraico;

d) ¿(D_{12}, |) es red?

e) Dado (A, +, .) retículo algebraico y $\underline{\alpha} \subseteq A \times A$ tal que $a \,\underline{\alpha}\, b \Leftrightarrow a . b = a$, probar que $\underline{\alpha}$ es un orden amplio.

9- a) Dado (N, |) red:

a_1) calcular: 18.35, (74.24) + 5

a_2) resolver: 6.x = 2; 8 + x = 24

b) En el retículo (D_{30}, |): b_1) resolver: 10 + x = 30; 10. x = 5

b_2) calcular: 2 + 30, 6. 10, 6 + 15, 6. 30

c) Sea (A, + , .) el retículo distributivo y complementado si:

$$\begin{cases} x + a = y + a \\ x.a = y.a \end{cases} \Rightarrow x = y$$

d) Sea (A, + , .) el retículo distributivo y complementado.

d_1) Si y . z = 0 $\Rightarrow$ $y \,\underline{\alpha}\, \bar{z}$ ($\bar{z}$ complemento de z)

d_2) Si $x \,\underline{\alpha}\, y \wedge y . z = 0 \Rightarrow z \,\underline{\alpha}\, \bar{x}$

10- Indicar la red de subgrupos para los casos del ejercicio 9 del Trabajo Práctico N° 4.

Álgebra de Boole

11- Indicar cuales de los retículos propuestos en los ej. 7) y 8) son álgebras de Boole.

12- Hallar los átomos para cada una de las siguientes álgebras de Boole:

a) (P(A), $\subseteq$) considerar $A \neq \varnothing \wedge A = \varnothing$

b) ({0,1}, $\leq$)

c) Sean (B_1, $\underline{\alpha}_1$) y (B_2, $\underline{\alpha}_2$) dos álgebras de Boole y f: $B_1 \rightarrow B_2$ un isomorfismo

Probar: c_1) $x \,\underline{\alpha}_1\, y$ en B_1 $\Rightarrow$ $f(x) \,\underline{\alpha}_2\, f(y)$ en B_2

c_2) x es átomo en B_1 $\Rightarrow$ f(x) es átomo en B_2

13- Dado el conjunto A = {a, b, c, d, e} completar la tabla de $\vee$: $A^2 \rightarrow A$ y definir la operación $\wedge$: $A^2 \rightarrow A$ para que (A, $\vee$, $\wedge$) sea una red, indicar justificando adecuadamente si es álgebra de Boole.

$\vee$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	e	e	e
c	c	[illegible]	c	e	e
d	d	d	d	d	e
e	e	e	e	e	e

14- Definir un isomorfismo entre:

a) (D_{30} , |) y (D_{42} , |)

b) (D_6 , |) y (P(A), $\subseteq$) con A = {a, b}

15- Sea (D_{182}, mcm, mcd) álgebra de Boole: a) indicar los elementos neutros correspondientes a cada operación, el complemento para cada elemento, los átomos;
b) Siendo $B = \{e, f, g\}$ y ($P(B)$, $\cup$, $\cap$) álgebra de Boole, establecer un isomorfismo entre D_{182} y $P(B)$, justificar.

Aplicación Práctica

16- Sea $(A, +, .)$ álgebra de Boole con neutros 1_A, 0_A y $\bar{a}$ = "complemento de a" $\forall$ a.
Probar:

a) $\forall a \in A \Rightarrow a + a = a$

b) $\forall a \in A \Rightarrow \bar{\bar{a}} = a$

c) $\forall a, b \in A \Rightarrow a . b + a . \bar{b} = a$

d) $\forall a, b \in A \Rightarrow \overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$

e) $\forall a, b \in A \Rightarrow \overline{a . b} = \bar{a} + \bar{b}$

f) $\forall a \in A \Rightarrow a + 1_A = 1_A$

g) $\forall a, b \in A$: $a . b = a \Rightarrow a . \bar{b} = 0_A$

h) $\forall a, b \in A$: $a \; \underline{\alpha} \; b \Leftrightarrow a . b = a$ es una relación de orden amplio en A

i) $\forall a, b \in A$: $a \; \underline{\alpha} \; b \Leftrightarrow a + b = b$ es una relación de orden amplio en A

j) $\forall a, b \in A$ si $a \; \underline{\alpha} \; b \Rightarrow \bar{b} \; \underline{\alpha} \; \bar{a}$

k) $\forall a, b \in A$: $a \; \underline{\alpha} \; b \Rightarrow a . \bar{b} = 0_A \wedge \bar{a} + b = 1_A$.

17- Simplificar $f: B^3 \rightarrow B$ para cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_3 + x_2} + x_3 + x_1 (x_2 x_3 + \overline{x_2}\,\overline{x_3})$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_2} x_3 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

18- a) Escribir en la forma normal disyuntiva

a_1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_1} x_3$

a_2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$

a_3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2}$

b) Escribir en la forma normal conjuntiva

b_1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \; x_2$

b_2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + (\overline{x_1} x_2)$

b_3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 (\overline{x_2} + x_3)$

19- Construir el diagrama lógico para las funciones

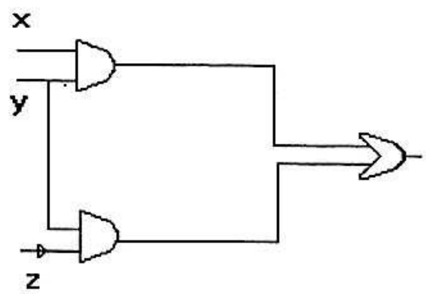
a) $f(x, y, z) = (x + y)(z + \overline{x})$

b) $f(x, y, z) = x.(y + \overline{z})$

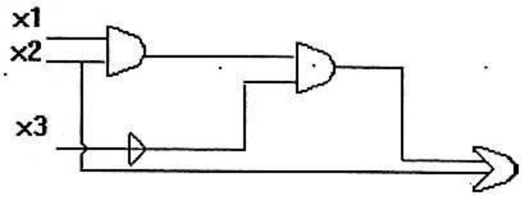
c) $f(x, y, z) = x \overline{y} + (y + x y)$

20- Dado el siguiente diagrama lógico determinar la función booleana correspondiente:

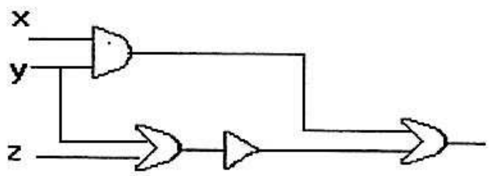
a)



b)



c)



Trabajo Práctico N° 6

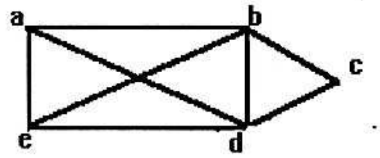
Grafo - Digrafo

1- Dibujar un grafo $G = (V, A, \varphi)$ con $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y φ dada por

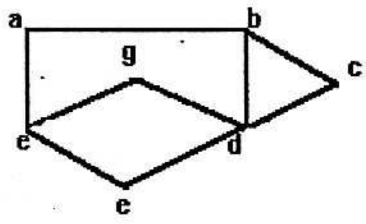
X	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\varphi(x)$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_4, v_1\}$	$\{v_4, v_2\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_2, v_4\}$	$\{v_3, v_4\}$

2- Hallar la matriz de adyacencia de los siguientes grafos y la función φ:

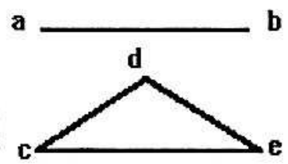
a)



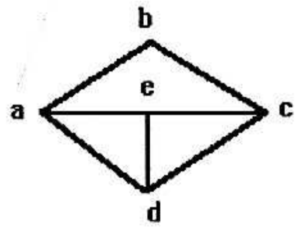
b)



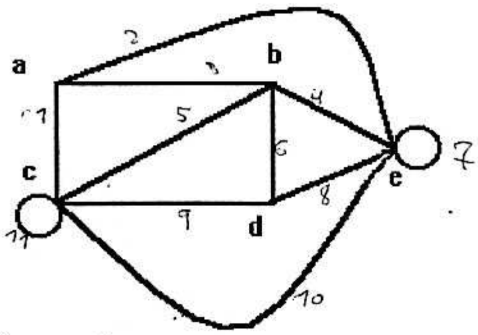
c)



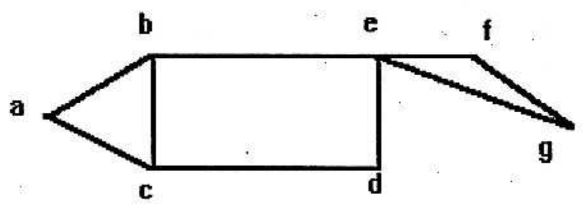
d)



3- Hallar la matriz de adyacencia, la función φ y la matriz de incidencia para el siguiente grafo:



4- Para el siguiente grafo G, determinar:



4-1 camino simple de b a d
4-2 camino no simple de b a d
4-3 ciclo simple de b a b
4-4 ciclo no simple de b a b
4-5 todos los caminos simples de b a f

4-6 Sabiendo que la distancia de x a y en un grafo no dirigido conexo G es la longitud del camino más corto de x a y, hallar la distancia desde d a los restantes vértices de G

5- Determinar el cardinal de V ($|V|$) para los siguientes grafos o multigrafos, G

a) G tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3
b) G es regular con 15 aristas
c) G tiene diez aristas con dos vértices de grado 4 y las restantes tienen grado 3

6- Hallar el diagrama y la matriz de incidencia para cada uno de los grafos cuyas matrices de adyacencia son:

a)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	1
v_2	1	0	1	0	0
v_3	0	1	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1
v_5	1	0	0	1	0

b)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1
v_4	0	0	1	0	1
v_5	0	0	1	1	1

7- Hallar las matrices de incidencia para los grafos de los ejercicios 1) y 2)

8- Diagramar los grafos representados por las siguientes matrices de incidencia

a)

	a	b	c	d	E	f
v_1	1	0	0	0	0	1
v_2	0	1	1	0	1	0
v_3	1	0	0	1	0	0
v_4	0	1	0	1	0	0
v_5	0	0	1	0	1	1

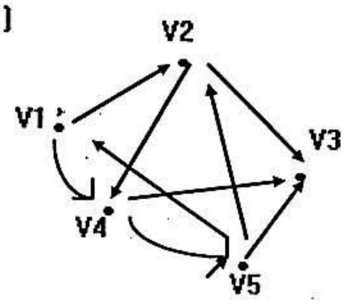
b)

	a	B	c
v_1	1	1	0
v_2	1	0	1
v_3	0	1	1

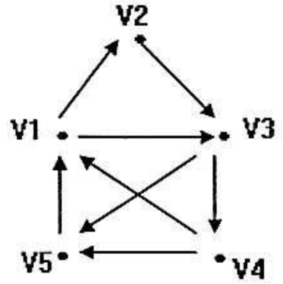
9- Sea G un grafo
a) ¿Qué particularidad tiene G si alguna fila de su matriz de incidencia sólo tiene ceros?
b) ¿Cómo se manifiesta esa particularidad en la matriz de adyacencia?.
c) ¿Puede ocurrir que en una matriz de incidencia haya una columna de ceros?

10- Definir el digrafo para cada uno de los siguientes diagramas:

i)



ii)



11- Dibujar el digrafo si G si A={a_1, a_2, a_3, a_4 , a_5, a_6, a_7}V={v_1, v_2, v_3, v_4} y δ dada por

X	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
δ(x)	(v_2, v_4)	(v_1, v_2)	(v_2, v_2)	(v_1 ,v_4)	(v_1 ,v_3)	(v_4, v_2)	(v_4, v_3)

12- Hallar el digrafo que corresponde a la matriz de incidencia para cada uno de los siguientes casos:

A)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	0	0	0	0	-1
v_2	0	1	0	0	0	1
v_3	0	0	-1	0	-1	0
v_4	0	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	-1	1	0

b)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	-1	0	0	-1	0
v_2	0	1	1	-1	0	0
v_3	-1	0	-1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	-1

13- Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes referidas a un grafo G Justificar en cada caso

a) Si hay un camino de v_i a v_j entonces hay un camino de v_j a v_i

b) Si hay un camino de v_i a v_j y un camino de v_j a v_k. Entonces hay un camino de v_i a v_k

c) Si hay un camino de v_i a v_j entonces hay un camino simple de v_j a v_i

d) Si v está en un ciclo entonces v está en un ciclo simple

e) Analizar las proposiciones anteriores en el caso que G sea un digrafo

14- Hallar la matriz de adyacencia par el grafo completo de 5 vértices K_5 y para el gráfico bipartito completo $K_{2,3}$.

15- Para los grafos de los ejercicios 1) y 11)

a) $\overline{G}v_1$; $\overline{G}v_3$; $\overline{G}a_7$; $\overline{G}a_2$

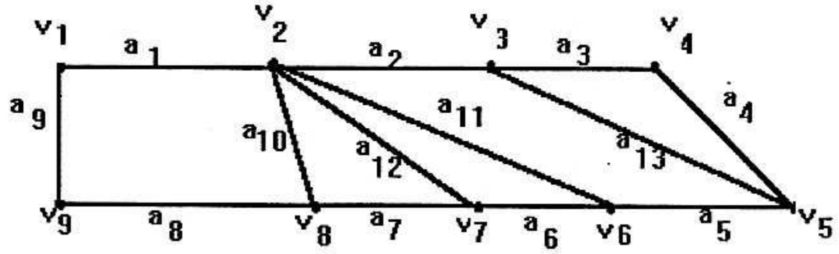
b) Indicar si hay istmos

c) Indicar si hay puentes

d) Hallar un conjunto desconectante

e) Hallar un conjunto de conectividad

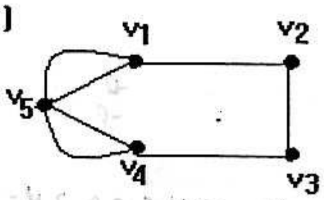
16- Para el siguiente grafo:



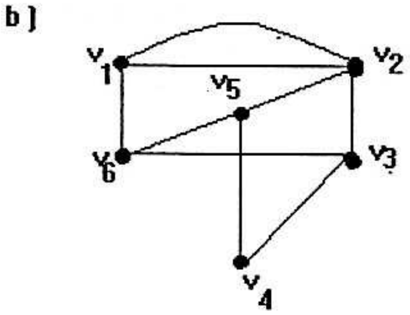
a) $\bar{G}v_1$; $\bar{G}v_3$; $\bar{G}a_7$; $\bar{G}a_2$
b) Indicar si hay istmos No
c) Indicar si hay puentes No
d) Hallar un conjunto desconectante
e) Hallar un conjunto de conectividad

17- Para cada uno de los siguientes grafos hallar, si es posible, caminos de Euler, circuitos de Euler, caminos de Hamilton y circuitos de Hamilton

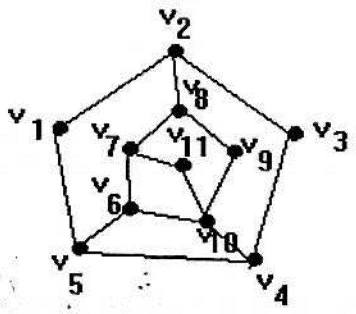
a)



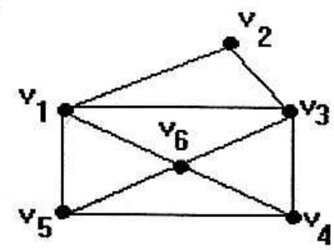
b)



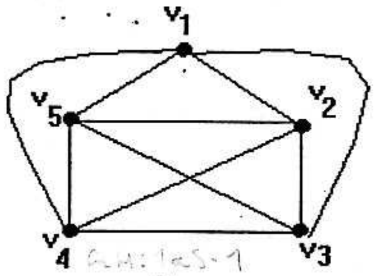
c)



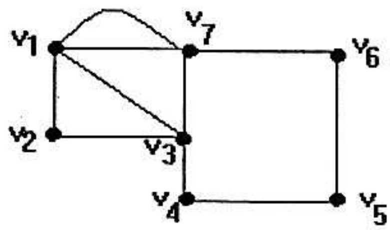
d)



e)



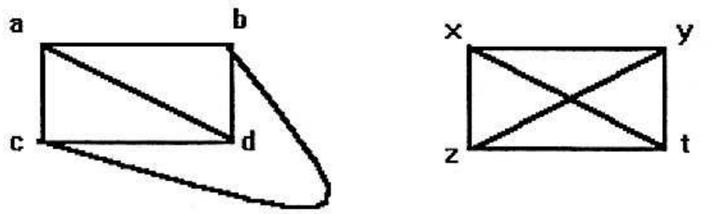
f)



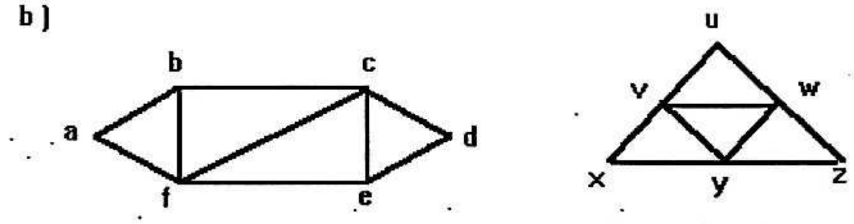
18- a) Dibujar un grafo con un circuito de Euler y un circuito de Hamilton
b) Dibujar un grafo que tenga un circuito de Euler y no un circuito de Hamilton
c) Dibujar un grafo sin circuito de Euler y con circuito de Hamilton
d) Dibujar un grafo sin circuito de Euler y sin circuito de Hamilton

19- Establecer si los siguientes pares de grafos son isomorfos

a]



b]



Aplicación Práctica

20- Sea G = (V, A, δ) un digrafo sin ciclos. En el conjunto V (vértices) se define la siguiente relación R: $v_i \ R \ v_j \Leftrightarrow \exists$ un camino de v_i a v_j

a) Estudiar las propiedades de R

b) Aplicar a G = (V, A, δ) tal que $V = \{v_i \,/\, 1 \le i \le 6\}$, $A = \{a_i \,/\, 1 \le i \le 5\}$

x	a_1	a_2	a_3	a_4	A_5
$\delta(x)$	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)

21- Sea G = (V, A, δ) un digrafo. En el conjunto V se define la siguiente relación R:

$v_i \ R \ v_j \Leftrightarrow v_i = v_j \ \vee (\exists$ un camino de v_i a v_j $\wedge \exists$ un camino de v_j a v_i)

a) Probar que es de equivalencia

b) Para G = (V, A, δ) con $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y δ dada por

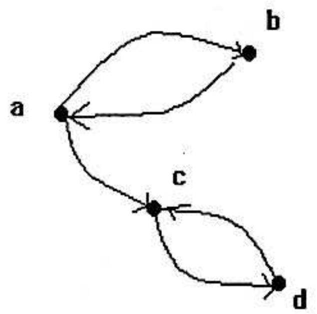
x	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\delta(x)$	(v_1, v_1)	(v_1, v_2)	(v_2, v_2)	(v_2, v_1)	(v_3, v_3)	(v_4, v_4)

Hallar las clases de equivalencia y la partición

22- Hallar matricialmente las componentes fuertemente conexas para los digrafos:

a) ejercicio 21-b

b)



c)

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

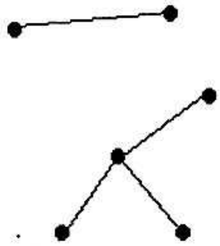
Trabajo Práctico N° 7

Árboles

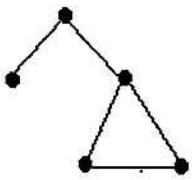
1- Indicar cuales de los siguientes grafos son árboles:

i]

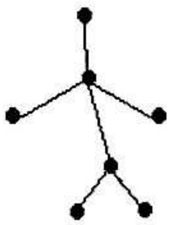
iv]



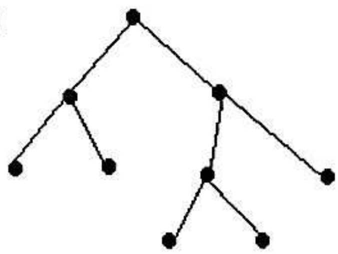
ii]



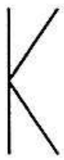
iii]

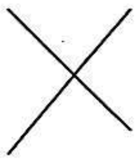


iv]



2- Indicar si los siguientes árboles son isómorfos





3- Hallar, para cada uno de los árboles del ejercicio1) dos árboles isomorfos

4- Dibujar los grafos de los árboles no isomorfos de seis vértices

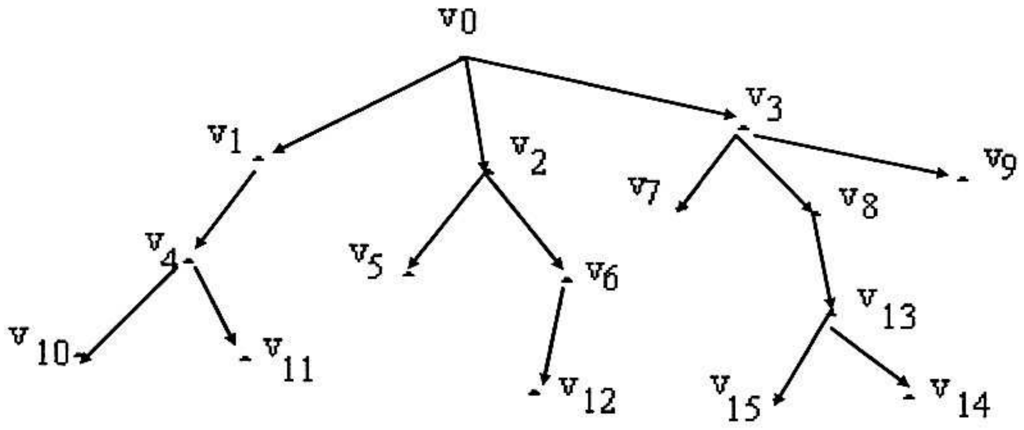
5- Indicar en cada caso cuando la relación R definida sobre A determina un árbol dirigido, en tal situación dar la raíz

a) A = {a, b, c, d, e, f }
   R = {(a, b), (c, e), (f, a), (f, c), (f, d)}

b) A = {i, j, k, l, m, n }
   R = {(i, i), (j, i), (j, k), (k, l), (l, m), (m, n)}

c) A = {1, 2, 3, 4,5, 6, 7 }
   R = {(1, 2), (2, 4), (2, 5), (2, 3), (3, 7), (3, 6)}

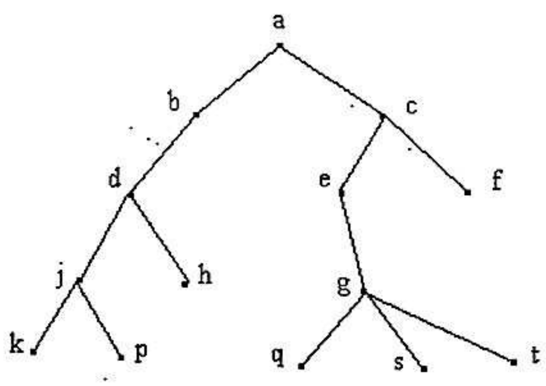
6- Dado el siguiente árbol T (v_0)



Hallar:

a) raíz
b) hojas
c) antecesores de v_1, v_6, v_8
d) vértices internos
e) los subárboles $T(v_1)$; $T(v_3)$; $T(v_8)$
f) altura del árbol
g) ¿está balanceado?
h) ¿$\exists$ m ε N / T (v_0) sea m-ario?

7- Dado el siguiente árbol indicar:



a) raíz, hoja
b) el padre de g; los hijos de g
c) los hermanos de s
d) el nivel de f
e) ¿qué vértices tienen nivel 4?
f) ¿el árbol es balanceado?

8- Construir todos los árboles binarios que posean 3 o menos arcos y exactamente dos niveles.

9- Si un árbol tiene 4 vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y otro de grado 5. ¿Cuántos vértices colgantes (hojas) tiene?

10- Sea G un grafo demostrar que G es un árbol si hay un camino único entre dos vértices cualesquiera.

11- Demostrar que un árbol de n vértices tiene n-1 aristas.

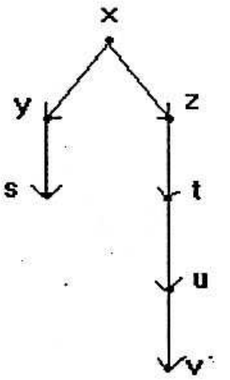
12- Con referencia a los ejercicios 6 y 7, listar sus vértices

a) preorden

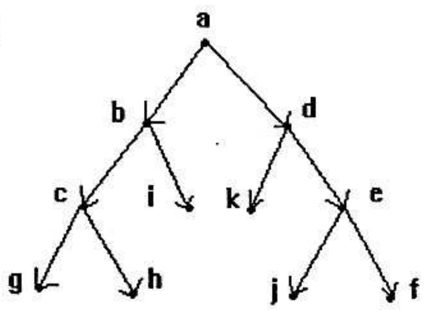
b) postorden
c) inorden

13- Dados los siguientes árboles repetir el ejercicio 11)

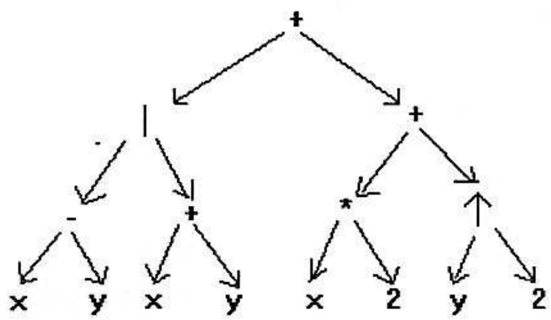
i]



ii]



14- Dado el árbol



a) Escribir la expresión en notación polaca
b) Escribir la expresión en notación polaca inversa
c) Escribir la expresión en notación infija usual

15- a) Calcular las siguientes expresiones dadas en notación polaca inversa:

a_1) $3\ 3 + 4 + 5 * 1 -$

a_2) $3\ 2 \uparrow 4\ 2 \uparrow - 5 / 2 *$

b) Calcular las siguientes expresiones dadas en notación polaca:

b_1) $* + / 6\ 3\ 3 - 7\ 3$

b_2) $/ * 2 + 2\ 5 \uparrow + 3\ 4\ 2$

16- Reescribir en notación infija usual y si es posible simplificar:

a) $p\ q \Rightarrow p \sim q \vee \Leftrightarrow$ (está dada en notación polaca inversa)

b) $\Rightarrow \wedge\ p \Rightarrow p\ q\ q$ (está dada en notación polaca)

Trabajo Práctico N° 8

Lenguaje

1- Dado el alfabeto $V = \{a, b\}$, hallar $|V|$, V^0 V^1, $|V^0|$, V^*, V^+

2- Sea x = abb, calcular:

a) x^R

b) x^0

c) x^1

d) x^2

e) x^3

f) $\prod_{i=1}^{3} x^i$

g) $\prod_{i=0}^{3} x^i$

3- Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones con $V = \{a, b\}$

a) $\lambda \in V$ c) $\lambda \in V^*$

b) $\lambda \subseteq V$ d) $\lambda \in V^+$

4- a) Dadas x = abb e y = acd calcular las siguientes hileras y dar sus longitudes:

a_1) xy a_5) $x^2\lambda^3y^2$

a_2) λx a_6) $(xy)^2$

a_3) λy a_7) y^Rx^R

a_4) $x\lambda y$

b) Sea $V = \{a, b\}$ con $a \underline{\alpha}\ b$:

b_1) Indicar en el diagrama de derivación de V^* la longitud de las hileras de nivel 4

b_2) Generalizar para un k

5- Sea V un alfabeto, $w \in V^*$, $n \in N$; probar, usando inducción matemática:

a) Si $long(x) = n \wedge long(y) = m$ entonces $long(xy) = long(x) + long(y)$

b) $long (w^n) = n .long (w)$.

6- Sea V un alfabeto, $y, x \in V^*$, $R \subseteq V^* \times V^*$ tal que $x R y \Leftrightarrow long (x) = long (y)$:

a) Estudiar las propiedades de la relación R, clasificarla;

b) En caso de ser una relación de equivalencia indicar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, si es una relación de orden indicar si es de orden total.

7- Sea el vocabulario $V = \{a, b, c\}$ y los lenguajes $L_1 = \Delta$, $L_2 = \{ac, ba\}$, $L_3 = \{aba, aca\}$: a) hallar: $L_3{}^2$, $L_2 \cup L_3$, $L_2 L_3$, $L_1{}^0$, $L_2{}^R$, $L_3{}^0$, $L_3{}^R$; b) indicar una gramática para generar L_3.

8- Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones

a) $\Delta \neq \varnothing$ g) $\varnothing^0 = \Delta$

b) $|\Delta| = 1$ h) $\varnothing^* = \Delta$

c) $\Delta L = L\Delta = L$ i) $L \subset L^*$

d) $L\varnothing = \varnothing L = \varnothing$ j) $\Delta \subseteq L^*$

e) $\Delta^0 = \Delta$ k) $\left|\bigcup_{k=0}^{3} \{a, b\}^k\right| = 7$

f) $\Delta^* = \Delta$ l) $\Delta L = L\Delta = \varnothing$

9- a) Sea $V = \{a, b\}$ alfabeto, $A = \{ab, ba\}$ y $B = \{\lambda, b^2\}$ lenguajes

a_1) Hallar A^2, AV

a_2) Describir B^*, AB

b) Dados los lenguajes $A = \{a, ab, aa\}$, $B = \{cab, bac, cc\}$ y el alfabeto $V = \{a, b, c\}$ y $E = \{\lambda\}$, calcular AB, VA, E^{96}

c) Explicar por que V^* no es grupo

d) Siendo A, B, C lenguajes de V, indicar el valor de verdad de:

d_1) $A \cap B \subseteq AB$

d_2) V^* es infinito

d_3) $AB = AC \Rightarrow B = C$

d_4) $AB = BA$

d_5) $A \subseteq B \Rightarrow A^2 \subseteq B^2$

d_6) $AA^* = A^*$

10- Indicar ejemplos de hileras $x \in L$

a) $L = \{a^k b^p \ / \ k \geq 0, p \geq 0\}$

b) $L = \{a^k b^p \ / \ k \geq 1, p \geq 1\}$

c) $L = \{a^k b^p \ / \ k \geq 0, p \geq 1\}$

d) $L = \{a^k b^p \ / \ k \geq 2, p \geq 1\}$

e) $L = \{a^k b^p \ / \ k \geq 1, p \geq 0\}$

f) $L = \{a^n b^n \ / \ n \geq 0\}$

g) $L = \{a^n b^n \ / \ n \geq 1\}$

h) $L = \{a^n b^p \, b^n a^p \ / \ n \geq 1, p \geq 0\}$

i) $L = \{a^n (ac)^p (bab)^q \ / \ n \geq 0, p \geq 1, q = p+2\}$

j) $L = \{a,b\}^3 \cup \Delta$

k) $L = \{xx^R \ / \ x \in \{a, b\}^+ \}$

l) $L = \{x \subset x^R \ / \ x \in \{a, b\}^+ \}$

m) $L = \{xyx \ / \ x \in \{a, b\}^+, y \in \{a, b\} \}$

Gramática

11- Clasificar las gramáticas de acuerdo a las derivaciones de las producciones indicadas:

$G = (\{X, Y, Z, T\}, \{0, 1\}, P, X)$

a)
$X \to TYZ$
$T \to 0 / 1$
$0Y \to 1$
$1Y \to 0$
$0Z \to 1$
$1Z \to 0 / 1$

b)
$X \to ZT$
$ZT \to TY$
$Y \to 1$
$T \to 0$

c)
$X \to ZY / YZ$
$Z \to 1$
$Y \to 0$

d)
$X \to 1Y / 1Z$
$Y \to 0$
$Z \to 0 / 1$

12- Para cada uno de los siguientes conjuntos de producciones, definir las gramáticas correspondientes y el lenguaje generado:

a) $S \rightarrow a / c / B$
$B \rightarrow b / Bbbb$

b) $P \rightarrow A$
$A \rightarrow aA / a$

c) $S \rightarrow aBb$
$B \rightarrow aBb / \lambda$

d) $T \rightarrow A / B$
$A \rightarrow \lambda / a$
$B \rightarrow b / BA$

e) $S \rightarrow BA$
$A \rightarrow 0 / 5$
$B \rightarrow \lambda / D$
$D \rightarrow 0 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 9$

f) $S \rightarrow a / b / bB / \lambda$
$B \rightarrow bB / a$

g) $R \rightarrow aA$
$A \rightarrow \lambda aB$
$B \rightarrow \lambda / bB$

h) $S \rightarrow (S) / a + S_1$
$S_1 \rightarrow a + S_2$
$S_2 \rightarrow a + S_2 / a$

13- Indicar si alguna de las siguientes filas corresponden a alguno de los lenguajes anteriores

a) $x = 1231$
b) $x = \lambda$
c) $x = cbb$
d) $x = bbba$
e) $x = 10$
f) $x = bbbaa$
g) $x = ((a + a + a))$

14- Construir las gramáticas de tipo 3 o tipo 2 para los siguientes lenguajes:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* / a^* b^*\}$
b) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* / w = a^* b^* c^*\}$
c) $L = \{w \in \{a, b\}^* / w = a^n b^n \wedge n \geq 0\}$
d) $L = \{w \in \{a, b\}^* / w = (ab)^n \wedge n \geq 0\}$
e) $L = \{w = xyz \in \{a, b, c\}^+ / x \in \{a, b\}^+ \wedge y \in \{b, c\}^+ \wedge z \in \{a^p b^q / p \geq 1, q \geq 0\}\}$
f) $L = \{x / x = (UaaT \vee UbbT) \wedge U, T \in \{a, b\}^*\}$
g) $L = \{a^{2k} b^{2p+1} / p \geq 0, k \geq 1\}$

h) L = {ab(bba)^p b^q / p≥0, q≥1}
i) L = {ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb }
j) L = {a, abba, babbab, ababbaba }
k) L = {a, b}^{3} ∪ Δ
l) L = {x / x ∈ {a, b}$^+$ ∧ |x |≤ 3 }
m) L = {a, b}$^+$ {a, aa}^{2}

Autómata Finito

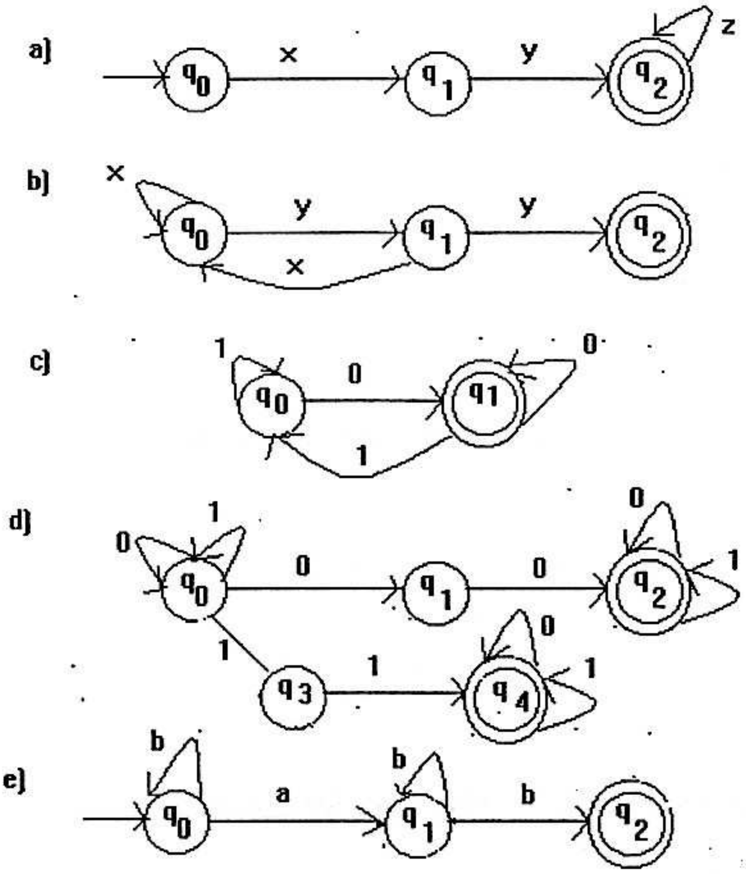
15- Dada la tabla de cambio de estado, definir el autómata finito e indicar el lenguaje que reconoce

δ	a	b
q_0	q_1	-
q_1	q_2	q_1

donde q_0 es estado inicial y q_2 es estado final

16- Definir y graficar los autómatas finitos en los casos que sea posible del ejercicio14

17- Dada la gráfica del autómata finito :
17.1.- Indicar el autómata finito AF
17.2.- Indicar la gramática regular G para el lenguaje que reconoce el AF



f)