Números complejos

Susana Puddu

1. El plano complejo. En el conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definimos la suma y el producto de dos elementos de $\mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Dejamos como ejercicio verificar que estas operaciones son asociativas y conmutativas, que $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son los elementos neutros para la suma y el producto respectivamente, que $(-a, -b)$ es el inverso aditivo de (a, b) para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$ y que vale la propiedad distributiva, es decir, $z.(w_1 + w_2) = z.w_1 + z.w_2$ para todo $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.
Además, todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$ tiene un inverso multiplicativo, es decir, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z.w$ es igual al elemento neutro del producto. En efecto, si $z = (a, b)$ con $a \neq 0$ o $b \neq 0$ entonces $a^2 + b^2 \neq 0$ y vale $(a, b).\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$. Por lo tanto $w = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ es el inverso multiplicativo de z.
Notemos que, por la definición de suma y producto,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1)$$

Luego, denotando por i al elemento $(0, 1)$ resulta que $i^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$. Ahora, identificando los elementos de la forma $(a, 0)$ (es decir, que tiene segunda coordenada nula) con el número real a, de lo anterior resulta que $(a, b) = a + bi$ donde $i^2 = -1$.
Luego, $\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $i^2 = -1$ y la suma y el producto se traducen en

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Además los elementos neutros para la suma y el producto son 0 y 1 respectivamente, el inverso aditivo de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$ y, si $z \neq 0$, su inverso multiplicativo es $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Llamaremos *números complejos* a los elementos de $\mathbb{C}$ y llamaremos *forma binómica* a la escritura de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ en la forma $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Con esta escritura puede verse a $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \,/\, b = 0\}$.
Dado $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ diremos que a es la *parte real* de z y que b es la *parte imaginaria* de z y escribiremos $a = \mathrm{Re}\,(z)$, $b = \mathrm{Im}\,(z)$. Notemos que la parte real y la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Además, dados $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que $z = w$ si y sólo si $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(w)$ e $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(w)$.

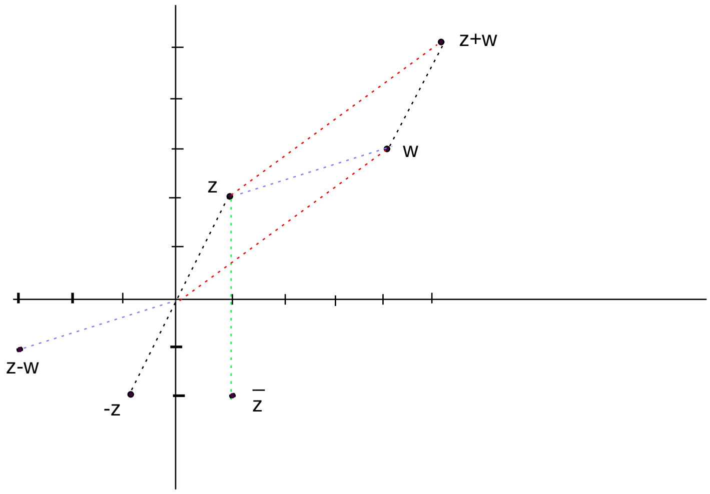
Dado $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, definimos el *conjugado* de z como el número complejo $\overline{z} = a - bi$ y definimos el *módulo* de z como el número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observemos que $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$ y que, si $z \neq 0$, entonces el inverso de z respecto del producto es $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Notemos además que $|z|$ es la distancia del número complejo $z = (a, b)$ al origen de coordenadas $(0, 0)$. En general, si $z, w \in \mathbb{C}$, $|z - w|$ es la distancia de z a w.

Observación. Si $a \in \mathbb{R}$ entonces el módulo de a visto como número complejo es igual a

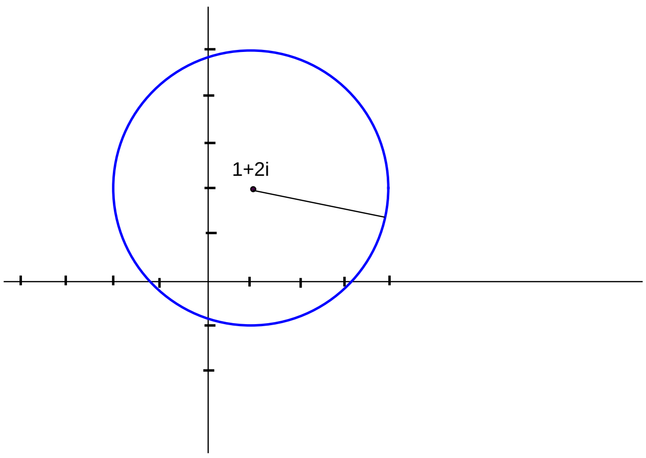
$$\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

es decir, coincide con el valor absoluto de a visto como número real. Por lo tanto la notación $|a|$ no es ambigua.

Ejemplos. 1) Grafiquemos en el plano complejo $z = 1 + 2i$, $w = 4 + 3i$, $-z$, $\overline{z}$, $z + w$ y $z - w$.



2) Grafiquemos en el plano complejo $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - (1 + 2i)| = 3\}$. Este es el conjunto de los z cuya distancia a $1 + 2i$ es igual a 3, es decir, la circunferencia de centro en $(1, 2)$ y radio 3.

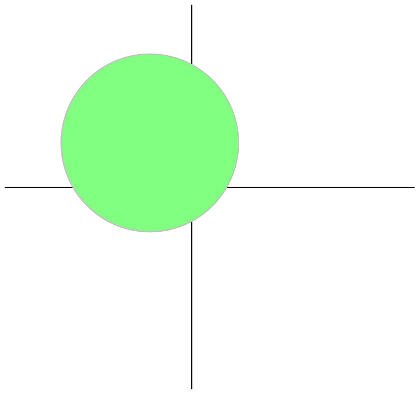


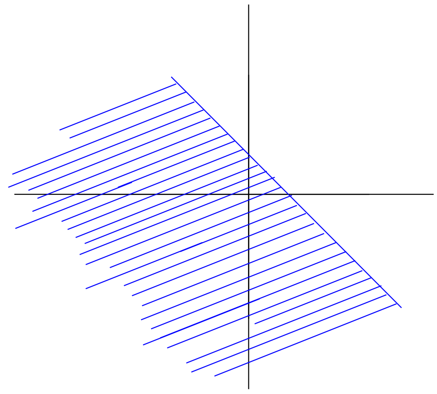
3) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $2i\overline{z} = |z + 2i|$.
Sean $a = \mathrm{Re}\,(z)$ y $b = \mathrm{Im}\,(z)$. Entonces $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Luego, $\overline{z} = a - bi$ y $z + 2i = a + (b + 2)i$. Por lo tanto

$$2i\overline{z} = |z + 2i| \Longleftrightarrow 2i(a - bi) = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2} \Longleftrightarrow 2b + 2ai = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$$

Luego, $a = 0$ y $2b = \sqrt{(b + 2)^2}$ de donde resulta que $a = 0$, $b \geq 0$ y $2b = b + 2$. Por lo tanto $a = 0$ y $b = 2$. Luego, hay un único $z \in \mathbb{C}$ que satisface lo pedido, $z = 2i$.

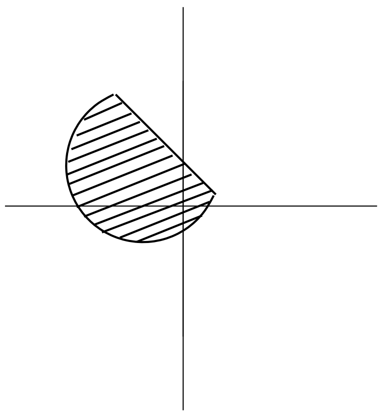
4) Grafiquemos el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z + 1 - i| \leq 2 \text{ y } \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) \leq 1\}$.
Primero graficamos los z que satisfacen cada una de las condiciones por separado. Los $z \,/\, |z - (-1 + i)| \leq 2$ es el círculo de centro en $-1 + i$ y radio 2, los $z \,/\, \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) \leq 1$ es el semiplano determinado por la recta $x + y = 1$ que contiene al origen.





$|z + 1 - i| \leq 2$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) \leq 1$

Luego, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen ambas condiciones simultáneamente son los que pertenecen a la intersección:



5) Grafiquemos el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 1| = |z + i|\}$
Este conjunto está formado por todos los números complejos z cuya distancia a 1 es igual a su distancia a $-i$.

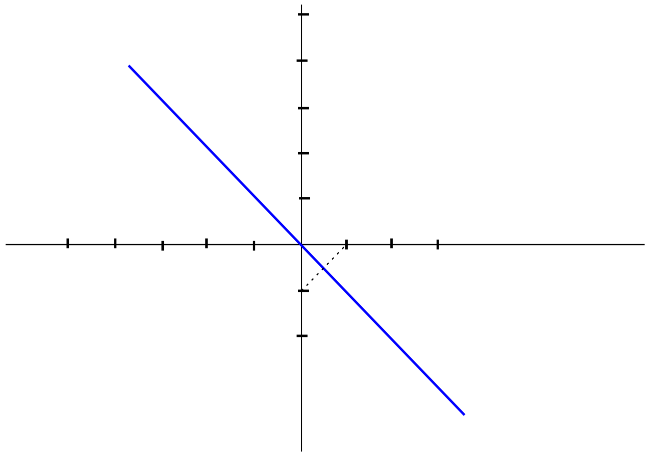
Primero hallemos los z que satisfacen lo pedido. Como $|z-1|$ y $|z+i|$ son números reales no negativos entonces

$$|z-1| = |z+i| \Longleftrightarrow |z-1|^2 = |z+i|^2$$

Luego, si $z = a + bi$ entonces

$$|z-1| = |z+i| \Longleftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b+1)^2 \Longleftrightarrow -2a = 2b \Longleftrightarrow a = -b$$

Por lo tanto los z que satisfacen lo pedido son los que pertenecen a la recta $x = -y$. Notar que esta es la recta perpendicular al segmento que une 1 con $-i$ y pasa por el punto medio de dicho segmento.



Propiedades. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces se verifican

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
ii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
iii) $\overline{\overline{z}} = z$
iv) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$ y $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}\,(z).i$
v) $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \overline{z}$
vi) si $z \neq 0$ entonces $(\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$
vii) $z.\overline{z} = |z|^2$
viii) $|\overline{z}| = |z|$
ix) $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$
x) $|z.w| = |z|.|w|$
xi) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (desigualdad triangular)
xii) si $z \neq 0$ entonces $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

Demostración: Sólo demostraremos vi), ix) y xi) y dejamos la demostración de las restantes propiedades como ejercicio.

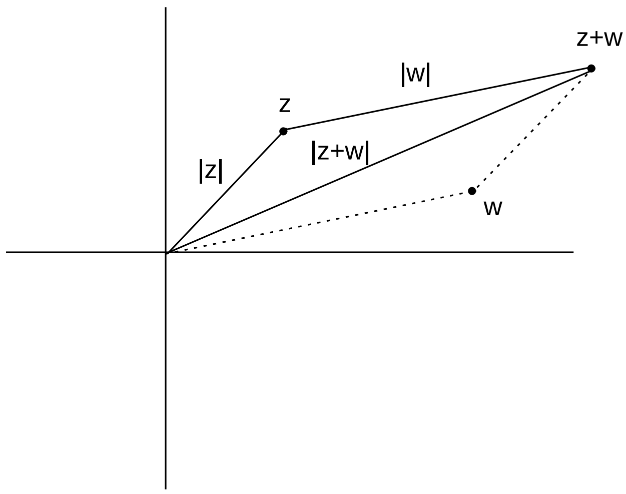
vi) Debemos ver que el inverso multiplicativo de $\overline{z}$ es $\overline{z^{-1}}$, es decir, debemos ver que $\overline{z}.\overline{z^{-1}} = 1$. Usando ii) se tiene que $\overline{z}.\overline{z^{-1}} = \overline{z.z^{-1}} = \overline{1} = 1$.

ix) Sea $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, como ambos miembros de la desigualdad son números reales no negativos resulta que

$$|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z| \iff |\mathrm{Re}\,(z)|^2 \leq |z|^2 \iff a^2 \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq b^2$$

cosa que ocurre pues $b \in \mathbb{R}$. De manera análoga se ve que $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

xi) Veremos que $|z + w| \leq |z| + |w|$. Gráficamente la desigualdad significa que en un triángulo la longitud de un lado es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos:



Probemos la desigualdad. Como $|z+w|$ y $|z|+|w|$ son números reales no negativos entonces

$$|z + w| \leq |z| + |w| \iff |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \iff |z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|.|w|$$

y usando ahora las propiedades anteriores resulta que

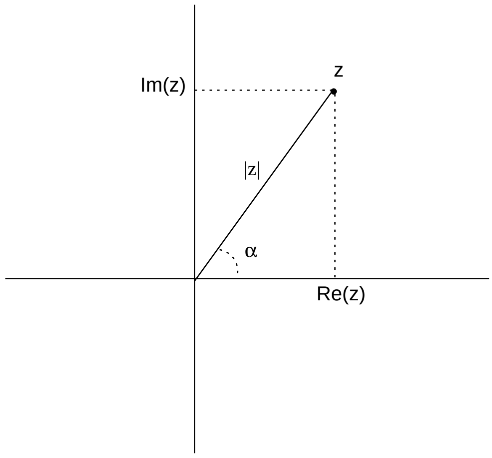
$$\begin{aligned}
&|z + w| \leq |z| + |w| \iff (z + w).\overline{(z + w)} \leq z.\overline{z} + w.\overline{w} + 2|z|.|w| \iff \\
&\iff (z + w).(\overline{z} + \overline{w}) \leq z.\overline{z} + w.\overline{w} + 2|z|.|w| \iff \\
&\iff z.\overline{z} + w.\overline{w} + z.\overline{w} + w.\overline{z} \leq z.\overline{z} + w.\overline{w} + 2|z|.|w| \iff \\
&\iff z.\overline{w} + w.\overline{z} \leq 2|z|.|w| \iff z.\overline{w} + \overline{z.\overline{w}} \leq 2|z|.|\overline{w}| \iff \\
&\iff 2\mathrm{Re}\,(z.\overline{w}) \leq 2|z.\overline{w}|
\end{aligned}$$

lo que es verdadero por ix). □

Ejercicio. Usando la desigualdad triangular, demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ vale $||z| - |w|| \leq |z - w|$. (Sugerencia: $|z| = |(z - w) + w|$).

2. Forma trigonométrica.

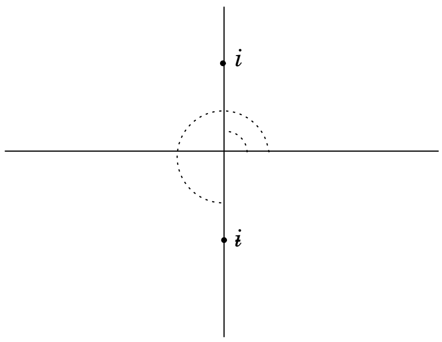
Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un único ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos \alpha = x = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|}$ y $\operatorname{sen} \alpha = y = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|}$. Diremos que α es el *argumento* de z y escribiremos $\alpha = \arg(z)$.



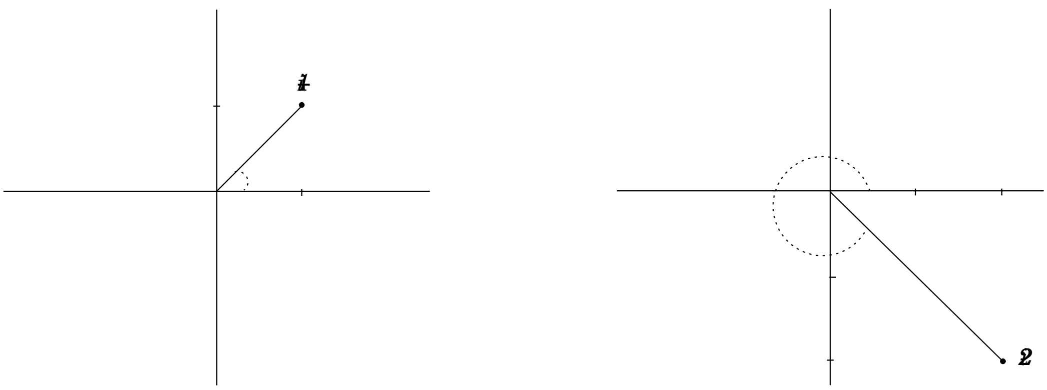
El argumento de z es el ángulo que forma el segmento que une z con el origen y el eje x positivo.

Ejemplos. 1) Si $z = r$, con $r \in \mathbb{R}$ entonces $\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \pi & \text{si } r < 0 \end{cases}$

2) Si $z = i$ entonces $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ y si $z = -i$ entonces $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$



3) Si $z = 1 + i$ entonces $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ y si $z = 2 - 2i$ entonces $\arg(z) = \frac{7\pi}{4}$



Observaciones. i) Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Si $\alpha = \arg(z)$ entonces $z = |z|\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$. Esta expresión se llama la *forma trigonométrica* de z.
ii) Si $z = r\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ con $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ entonces $r = |z|$ y $\beta = \arg(z) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Notar que si además $\beta \in [0, 2\pi)$ entonces debe ser $\beta = \arg(z)$.
iii) Dados $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos, $z = w$ si y sólo si $|z| = |w|$ y $\arg(z) = \arg(w)$.

Demostración: i) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\, i = |z|.\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} + \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\, i\right) = |z|.(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$
ii) Si $z = r\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ con $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ entonces $\operatorname{Re}(z) = r.\cos\beta$ e $\operatorname{Im}(z) = r.\operatorname{sen}(z)$. Luego

$$|z| = |r|.|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)| = r.\sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta} = r.\sqrt{1} = r$$

Además, si $\alpha = \arg(z)$ entonces

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} = \cos\beta \ \text{ y } \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} = \operatorname{sen}\beta$$

Luego, $\cos\alpha = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ de donde $\beta = \alpha + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$
iii) Es consecuencia inmediata de i). □

Notar que, por las observaciones anteriores, un número complejo z no nulo queda determinado conociendo $|z|$ y $\arg(z)$.

Ejemplos. Hallemos el módulo y el argumento de z en los casos
i) $z = 5i$
ii) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$
iii) $z = 1 + \sqrt{3}\, i$

i) Si $z = 5i$ entonces $|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$. Ahora calculemos $\alpha = \arg(z)$. Sabemos que $\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = 0$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = 1$. Luego $\alpha = \frac{\pi}{2}$
ii) Si $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$ entonces $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$. Calculemos $\alpha = \arg(z)$. Sabemos que $\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego $\alpha = \frac{\pi}{4}$
iii) Si $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ entonces $|z| = \sqrt{4} = 2$. Calculemos $\alpha = \arg(z)$. Sabemos que $\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego $\alpha = \frac{\pi}{3}$

3. El teorema de De Moivre.

Teorema. (De Moivre) Sean $z, w \in \mathbb{C}$, no nulos. Entonces $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $\alpha = \arg(z)$ y sea $\beta = \arg(w)$. Entonces

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$
$$w = |w|\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

Luego,

$$\begin{aligned} z.w &= |z|\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,|w|\,(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) = \\ &= |z|.|w|\,\left((\cos\alpha\,\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) + i\,(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\beta)\right) = \\ &= |z.w|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\,(\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

Luego, por la observación ii), $\alpha + \beta = \arg(z.w) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. □

Observación. Notemos que si $k \in \mathbb{Z}$ satisface $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$ entonces k debe ser tal que $0 \leq \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi < 2\pi$. Luego, el valor de $k \in \mathbb{Z}$ del teorema anterior queda determinado por esta condición: k es el único entero que satisface $0 \leq \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi < 2\pi$

Corolario 1. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\arg(z^n) = n\arg(z) - 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Dejamos la demostración como ejercicio. Sugerencia: usar el principio de inducción.

Corolario 2. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Entonces $\arg(z^{-1}) = -\arg(z) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Dejamos la demostración como ejercicio. Sugerencia: $z.z^{-1} = 1$.

Corolario 3. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $\arg(z^m) = m\arg(z) - 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego, si $\alpha = \arg(z)$, entonces $z^m = |z|^m\,(\cos m\alpha + i\,\mathrm{sen}\,m\alpha)$.

Dejamos la demostración como ejercicio.

Observación. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, ambos no nulos. Si $z = r.w$ con $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, entonces $\arg(z) = \arg(r) + \arg(w) - 2k\pi = \arg(w) - 2k\pi$ pues $\arg(r) = 0$. Y como $0 \leq \arg(w) < 2\pi$ entonces debe ser $k = 0$. Luego, como $\overline{z} = |z|^2.z^{-1}$, entonces $\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1})$. Por lo tanto, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos.

1) Hallemos los argumentos de $-1 - \sqrt{3}\,i$, $1 - \sqrt{3}\,i$ y $-1 + \sqrt{3}\,i$.
Sea $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. Vimos antes que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$. Luego

$$\arg(-1 - \sqrt{3}\,i) = \arg(-z) = \arg(-1) + \arg(z) - 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{3} - 2k\pi$$

donde k es el único entero que satisface $0 \leq \pi + \frac{\pi}{3} - 2k\pi < 2\pi$. Entonces $k = 0$ y por lo tanto $\arg(-1 - \sqrt{3}\,i) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Análogamente,

$$\arg(1 - \sqrt{3}\,i) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es el único entero que satisface $0 \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$. Entonces $k = 1$ y por lo tanto $\arg(1 - \sqrt{3}\,i) = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

Finalmente,

$$\arg(-1+\sqrt{3}\,i) = \arg(-\overline{z}) = \arg(-1) + \arg(\overline{z}) - 2k\pi = \pi + \frac{5\pi}{3} - 2k\pi$$

donde k es el único entero que satisface $0 \le \pi + \frac{5\pi}{3} - 2k\pi < 2\pi$. Entonces $k = 1$ y por lo tanto $\arg(-1+\sqrt{3}\,i) = \pi + \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

2) Hallemos $(1+i)^{3523}$

Como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ entonces $|(1+i)^{3523}| = |1+i|^{3523} = 2^{1761}\sqrt{2}$ y, por el corolario 3,

$$\begin{aligned}\arg((1+i)^{3523}) &= 3523 \arg(1+i) - 2k\pi = \frac{3523\pi}{4} - 2k\pi = \\ &= \frac{(8.440+3)\pi}{4} - 2k\pi = 2.440\pi + \frac{3\pi}{4} - 2k\pi\end{aligned}$$

donde k es el único entero que satisface $0 \le 2.440\pi + \frac{3\pi}{4} - 2k\pi < 2\pi$. Luego $k = 440$ y por lo tanto $\arg((1+i)^{3523}) = \frac{3\pi}{4}$.

Luego, $(1+i)^{3523} = 2^{1761}\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = 2^{1761}\sqrt{2}\,(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i) = 2^{1761}(-1+i)$

4. Raíces enésimas de un número complejo.

Primero veremos un ejemplo y luego veremos el caso general.

Ejemplo. Hallemos las raíces cuartas de $1+\sqrt{3}\,i$, es decir, todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = 1+\sqrt{3}\,i$.

Observemos que $z = 0$ no es solución. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,

$$z^4 = 1+\sqrt{3}\,i \Longleftrightarrow |z^4| = |1+\sqrt{3}\,i| \text{ y } \arg(z^4) = \arg(1+\sqrt{3}\,i) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |z|^4 = 2 \text{ y } 4\arg(z) - 2k\pi = \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow |z| = \sqrt[4]{2} \text{ y } \arg(z) = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}$$

donde k debe satisfacer $0 \le \dfrac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} < 2\pi$. Luego, $k = 0$, 1, 2 o 3. Por lo tanto, las raíces cuartas de $1+\sqrt{3}\,i$ son

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right)$$

Veamos ahora el caso general: sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Queremos hallar todos los $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^n = z_0$. Sea $r = |z_0|$ y sea $\alpha = \arg(z_0)$.

Como antes, $w = 0$ no es solución pues $z_0 \neq 0$. Dado $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$,

$$w^n = z_0 \iff |w^n| = |z_0| \text{ y } \arg(w^n) = \arg(z_0) \iff$$
$$\iff |w|^n = r \text{ y } n \arg(w) - 2k\pi = \alpha \iff |w| = \sqrt[n]{r} \text{ y } \arg(w) = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

donde k debe satisfacer $0 \leq \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} < 2\pi$. Luego, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por lo tanto, las raíces enésimas de z_0 son

$$w_k = \sqrt[n]{|z_0|} \left(\cos \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} \right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dejamos como ejercicio verificar que estas n soluciones son todas distintas.

Ejemplo. Las raíces quintas de $z_0 = -2i$ son

$$w_0 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \right)$$

$$w_1 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10} \right)$$

$$w_3 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{10} \right)$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{10} \right)$$

pues $|z_0| = 2$ y $\arg(z_0) = \frac{3\pi}{2}$.

5. Raíces enésimas de la unidad.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Cuando $z_0 = 1$, se tiene que $|z_0| = 1$ y $\arg(z_0) = 0$. Luego, aplicando lo anterior obtenemos las raíces enésimas de la unidad, que son

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \qquad (0 \leq k < n)$$

Denotaremos por G_n al conjunto de raíces enésimas de 1, es decir,

$$G_n = \{w \in \mathbb{C} \,/\, w^n = 1\} = \{\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \,/\, 0 \leq k < n\}$$

Ejercicio. Verificar que

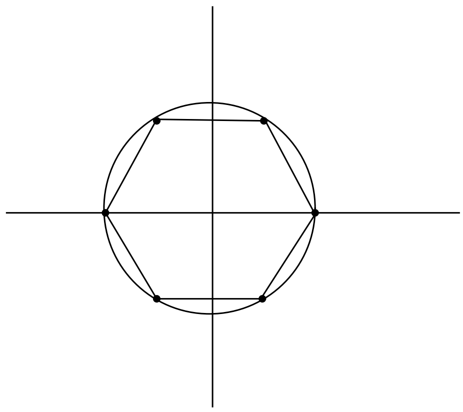
i) $G_2 = \{1, -1\}$
ii) $G_3 = \{1, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$
iii) $G_4 = \{1, i, -1, -i\}$
iv) $G_6 = \{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -1, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$

Ejercicio. Sea $z \in G_n$ y sea $m \in \mathbb{Z}$. Probar que si $m = nq + r$ entonces $z^m = z^r$.

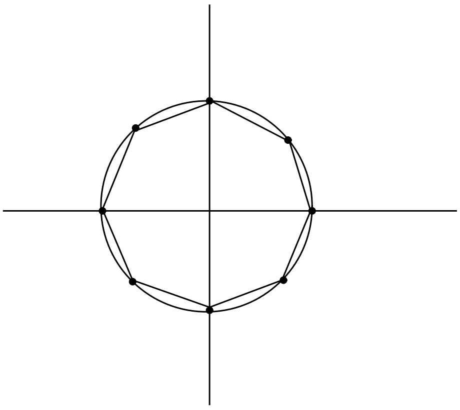
Ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) Si $z, w \in G_n$ entonces $z.w \in G_n$
ii) $1 \in G_n$
iii) Si $z \in G_n$ entonces $z^{-1} \in G_n$
iv) Si $z \in G_n$ entonces $\overline{z} \in G_n$
v) Si $z \in G_n$ entonces $\overline{z}^k = z^{-k} = z^{n-k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Observación. Las raíces enésimas de 1 son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de centro cero y radio 1. Por ejemplo, para $n = 6$, las raíces sextas de la unidad son $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -1, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ y $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ que son los vértices de un hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro cero y radio 1



Las raíces octavas de la unidad son $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, i, \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -1, \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -i$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ que son los vértices de un octógono regular inscripto en la circunferencia de centro cero y radio 1



Observación. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \in G_n$. Entonces, por el corolario 3 del teorema de De Moivre, ${w_1}^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$. Luego

$$G_n = \{{w_1}^k \,/\, 0 \le k < n\}$$

Diremos que $w \in \mathbb{C}$ es una *raíz enésima primitiva de la unidad* si $w \in G_n$ y $\forall\, z \in G_n\ \exists\, r \in \mathbb{N}$ tal que $z = w^r$.

Ejercicio. Sea $w \in \mathbb{C}$. Probar que w es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si $G_n = \{w^k \,/\, 0 \le k < n\}$.

Ejemplos.

1) $w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$ es una raíz enésima primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Las raíces cúbicas primitivas de la unidad son $w_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ y $w_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

3) Las raíces cuartas primitivas de la unidad son $w_1 = i$ y $w_3 = -i$

4) Las raíces sextas primitivas de la unidad son $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ y $w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

5) Las raíces octavas primitivas de la unidad son $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $w_5 = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ y $w_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

Ejercicio. Probar que $w \in G_n$ es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si $w^n = 1$ y $w^k \ne 1$ para todo k tal que $1 \le k \le n-1$

Observación. Sea $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} \in G_n$. Entonces $w_k = {w_1}^k$. Si $d = (k : n)$ entonces $\frac{k}{d}$ y $\frac{n}{d}$ son enteros y

$${w_k}^{\frac{n}{d}} = ({w_1}^k)^{\frac{n}{d}} = ({w_1}^n)^{\frac{k}{d}} = 1^{\frac{k}{d}} = 1$$

Luego, si $d \ne 1$ entonces w_k no puede ser una raíz enésima primitiva.

Ejercicio. Probar que $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$ es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si k y n son coprimos.

Observación. Sea w una raíz enésima primitiva de 1. Luego $G_n = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$ y como $w^n = 1$ entonces

$$\sum_{z \in G_n} z = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$$

Ejemplos. 1) Calculemos la suma de las raíces onceavas primitivas de la unidad.

Sea $w_k = \cos \frac{2k\pi}{11} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{11}$ $(0 \leq k < 11)$. Entonces $G_{11} = \{1, w_1, w_2, \dots, w_{10}\}$ y las raíces primitivas son $w_1, w_2, \dots, w_{10}$. Luego, la suma de las raíces onceavas primitivas de la unidad es

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_{10} = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{10} - 1 = \sum_{z \in G_{11}} z - 1 = 0 - 1 = -1$$

2) Calculemos la suma de las raíces 35-avas primitivas de la unidad.

Sea $w_k = \cos \frac{2k\pi}{35} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{35}$ $(0 \leq k < 35)$. Entonces $G_{35} = \{1, w_1, w_2, \dots, w_{34}\}$ y las raíces primitivas son todas menos w_0, w_5, w_{10}, w_{15}, w_{20}, w_{25}, w_{30}, w_7, w_{14}, w_{21} y w_{28}. Notando que

$$w_{5q} = \cos \frac{2.5q\pi}{35} + i \operatorname{sen} \frac{2.5q\pi}{35} = \cos \frac{2q\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{2q\pi}{7}$$

y

$$w_{7q} = \cos \frac{2.7q\pi}{35} + i \operatorname{sen} \frac{2.7q\pi}{35} = \cos \frac{2q\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2q\pi}{5}$$

se tiene que $\{w_0, w_5, w_{10}, w_{15}, w_{20}, w_{25}, w_{30}\} = G_7$ y $\{w_0, w_7, w_{14}, w_{21}, w_{28}\} = G_5$. Luego, la suma de las raíces 35-avas primitivas de la unidad es

$$\sum_{z \in G_{35}} z - \sum_{z \in G_5} z - \sum_{z \in G_7} z + w_0 = 1$$