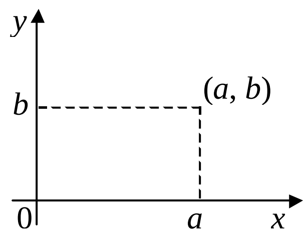
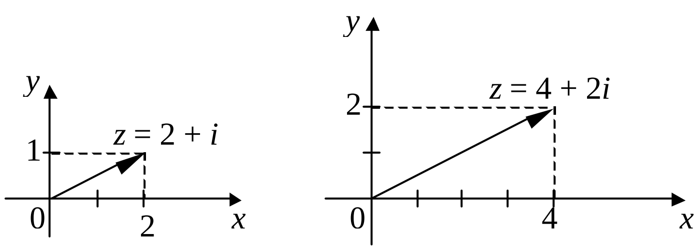
9. NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Recordemos que en la Unidad 1 vimos que a un número complejo podemos expresarlo en forma binómica $z = a + b\,i$ donde a, b son números reales, y que se representa gráficamente mediante un punto del plano de coordenadas $(a\,,\,b)$.

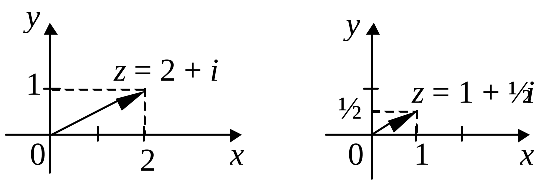


En la unidad anterior estudiamos las funciones trigonométricas, y ahora aplicaremos esto para expresar a los **números complejos en forma polar**, lo que nos posibilitará obtener mayor información respecto de ellos.

Consideremos el número complejo $z = 2 + i$. Si lo multiplicamos por un número real mayor que uno se produce una dilatación (también llamada homotecia) en la dirección de la recta que contiene al vector asociado al número complejo z. Por ejemplo, si multiplicamos z por 2 podemos observar dicho efecto comparando los gráficos que aparecen a continuación.



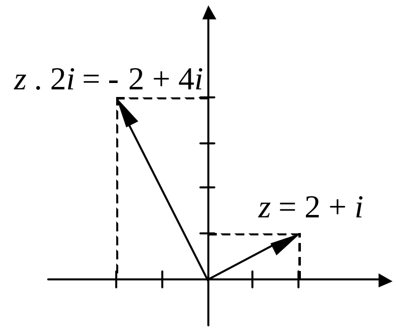
Por otro lado, si multiplicamos a z por un número real entre 0 y 1 se produce una contracción. Basta, por ejemplo, observar lo que ocurre cuando multiplicamos z por $\frac{1}{2}$.



¿Qué ocurrirá si multiplicamos ahora a z por un número imaginario puro? Por ejemplo,

$$z\,.\,2i = -2 + 4i.$$

Comparando gráficamente los vectores asociados a z y al resultado de $z\,.\,2i$ vemos que este último es el resultado de dilatar y luego rotar 90º en sentido antihorario al vector inicial.



A continuación veremos cómo comprobar esto formalmente.

Módulo de un número complejo

Consideremos un número complejo

$$z = a + b\,i$$

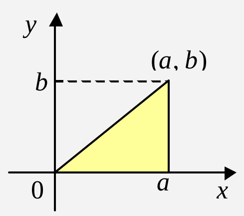
donde ***a, b*** **son números reales. Llamaremos** ***módulo de z*** **a la distancia entre el punto (*a* , *b*) y el origen 0.**

Al módulo del número complejo *z* lo denotaremos con

½z½.

Observemos que...

podemos hallar el valor de $|z|$ aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo que se obtiene a partir de la representación del número complejo *z*.



Así,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Argumento de un número complejo

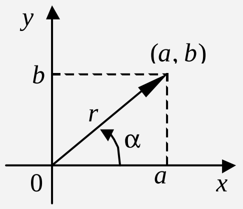
Consideremos un número complejo

$$z = a + b\,i$$

donde ***a, b*** **son números reales. Si** ***z*** **es un número complejo no nulo, denominamos** ***argumento de z*** **al ángulo a que forma el semieje positivo de las abscisas y la semirrecta de origen 0 que pasa por (*a* , *b*) .**

Observemos que...

podemos hallar el valor del argumento del número complejo *z* usando lo visto en la unidad anterior de trigonometría.



Así,

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{b}{a}$$

El número complejo no nulo $z = a + b\,i$ queda determinado si indicamos su módulo y su argumento.

Forma polar de un número complejo

Denominamos *forma polar de un número complejo* a la expresión

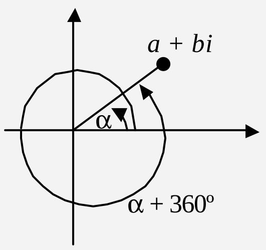
$$\mathbf{z = (r\ ,\ a\ )}$$

donde *r* es el módulo de *z* y a es un argumento de *z*.

Observemos que...

de acuerdo a lo visto en trigonometría,

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\alpha + 360^o)$$
$$= \text{tg}\ (\alpha + 2\ .\ 360^o)$$
$$= \ \ldots$$



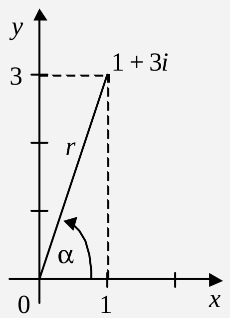
El argumento de un número complejo expresado en forma polar no es único.

Esto se debe al hecho que es lo mismo considerar

$$\alpha\ ,\ \text{ó}\ \ \alpha + 360^o,\ \ \text{ó}\ \ \alpha + 2\ .\ 360^o,\ \text{ó}\ \ ....$$

Ejemplo:

Expresaremos en forma polar los siguientes números complejos:



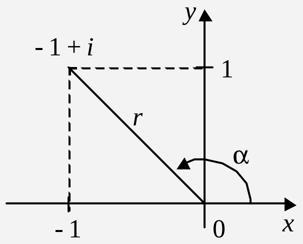
a) $z = 1 + 3\,i$

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{3}{1} = 71^o\ 33'\ 54''$$

Así, la forma polar de $z = 1 + 3\,i$ es

$$z = (\sqrt{10}\ ,\ 71^o\ 33'54'')$$



Recordemos que...

los ángulos se miden
en sentido
antihorario.

b) $z = -1 + i$

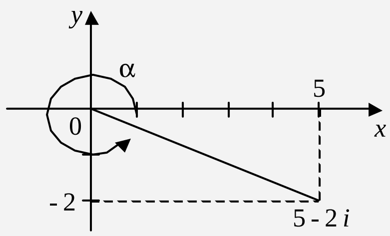
$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{1}{-1} = 135^{\circ}$$

(notar que α está en el segundo cuadrante)

Así, la forma polar de $z = -1 + i$ es

$$z = (\sqrt{2}\ ,\ 135^{\circ})$$



c) $z = 5 - 2\,i$

$$r = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{-2}{5} = 338^{\circ}\ 11'\ 55''$$

(notar que α está en el cuarto cuadrante)

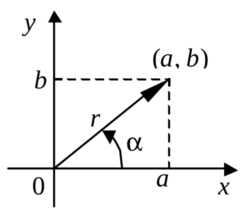
Así, la forma polar de $z = 5 - 2\,i$ es

$$z = (\sqrt{29}\ ,\ 338^{\circ}\ 11'\ 55'')$$

Observemos que...

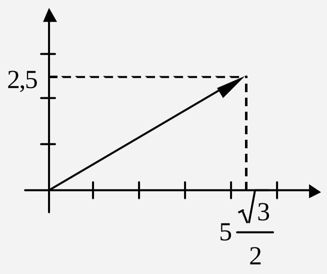
las funciones seno y coseno
nos permiten obtener
la forma binómica
de un número complejo
conociendo su forma polar.

Si conocemos el módulo y el argumento de un número complejo podemos calcular las componentes real e imaginaria del número, de la siguiente manera:



$$a = r\ cos\,\alpha \quad , \quad b = r\ sen\,\alpha$$

Ejemplo:
Expresemos en forma binómica los siguientes números complejos:



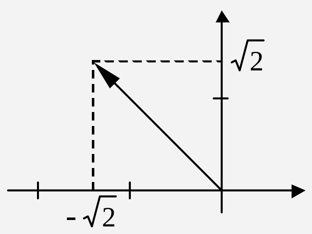
a) $z = (5\ ,\ 30º)$

$$a = 5\ cos\ 30º = 5\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = 5\ sen\ 30º = 5\ \frac{1}{2}$$

Así, la forma binómica de $z = (5\ ,\ 30º)$ es

$$z = 5\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\ i$$



b) $z = (2\ ,\ 135º)$

$$a = 2\ cos\ 135º = -\ 2\ \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ \sqrt{2}$$

$$b = 2\ sen\ 135º = 2\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Así, la forma binómica de $z = (2\ ,\ 135º)$ es

$$z = -\ \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$$

Por ejemplo, al número complejo

(2, 135º)

lo podemos escribir como

$z = 2\ (\cos 135º + i\ \text{sen}\ 135º)$.

Observemos que...

si efectuamos los cálculos en esta última expresión obtenemos

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$$

Cuando la forma polar de un número complejo z es $(r\ ,\ a)$, el número z se puede escribir como $z = r\ (cos\ a + i\ sen\ a)$, pues

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r\ cos\ a + i\ r\ sen\ a \\ &= r\ (cos\ a + i\ sen\ a) \end{aligned}$$

Por ello, encontrarás muchas veces expresiones de la forma

$$z = r\ cis\ a\ \ ,$$

que es una forma abreviada de escribir

$$z = r\ (cos\ a + i\ sen\ a).$$

A esta expresión se la conoce como *forma trigonométrica* del número complejo *z*.

Estamos ahora en condiciones de probar que cuando multiplicamos, al comienzo de esta unidad, el número complejo $z = 2 + i$ por $2i$, el resultado es un número complejo cuyo módulo es el doble del módulo de z (dilatación) y el vector asociado a éste forma un ángulo de 90º con el vector correspondiente a z.

La forma polar del número complejo $z = 2 + i$ es

$$z = (\sqrt{5}\ ,\ 26^o\ 33'\ 54'').$$

Si denotamos con z_1 al resultado de $z\ .\ 2i$, es decir, $z_1 = -2 + 4i$, la forma polar de z_1 es

$$z_1 = (\sqrt{20}\ ,\ 116^o\ 33'\ 54'') = (2\sqrt{5}\ ,\ 116^o\ 33'\ 54'').$$

Comparando la forma polar de z y de z_1 vemos de inmediato lo que queríamos probar.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Representar los siguientes números complejos

a) $z = 2 - 3i$ b) $z = -7i$ c) $z = 3 + 4i$ d) $z = -3 - 4i$
e) $z = -2$ f) $z = -1 + i$ g) $z = 4i$ h) $z = 2$

2) Expresar en forma polar los siguientes números complejos

a) $z = 6\,i$ b) $z = -5 + 2\,i$ c) $z = -4$ d) $z = 2 - 7\,i$

3) Expresar en forma binómica los siguientes números complejos

a) $z = (2\ ,\ 45^o)$ b) $z = (1{,}5\ ,\ 60^o)$
c) $z = (4\ ,\ 220^o)$ d) $z = \left(\dfrac{3}{4}\ ,\ 300^o\right)$

4) ¿Qué argumento tiene un número real positivo?. ¿Y un número real negativo?

5) Calcular tres argumentos del número complejo $1 + i$.

Ayuda
Es útil que recurras al gráfico de un número complejo y su conjugado.

6) ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo z no nulo?.

7) ¿Cuáles son el módulo y el argumento del opuesto de un número complejo z no nulo?.

8) Expresar en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto de $z = (5, 45^o)$.

9) ¿Cuál es el argumento del número complejo $8(\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i) + 5\sqrt{2}\,(-1 + i)$?

10) Obtener las dos raíces complejas de la ecuación de segundo grado $x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 9 = 0$, y expresarlas en forma polar. ¿Cómo son entre sí? ¿Se puede generalizar el resultado?

11) La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son los números complejos en cuestión?

12) Calcular el inverso de los números complejos siguientes y representar gráficamente los resultados:

a) $z = (3, 60º)$ b) $z = (2, 90º)$ c) $(\sqrt{2}, 135º)$

13) Sabiendo que $z_1 = (3, 60º)$, $z_2 = (2, 15º)$ y $z_3 = (6, 30º)$, calcular $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ (Nota: Expresar el resultado en forma polar y graficar).