TRIGONOMETRÍA

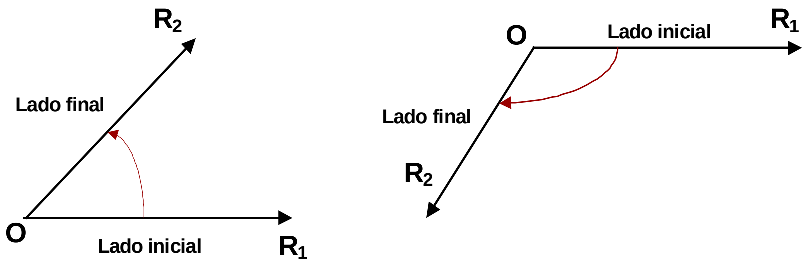
(Este apunte está basado en el capítulo 6 de Precálculo de Stewart , Redlin y Watson de Editorial Thomson , libro del cual se recomienda su lectura)

La Trigonometría es la rama de la Matemática que estudia las relaciones entre los ***lados*** y ***ángulos*** de un ***triángulo***. Su nombre deriva del griego (*trigonon* = triángulo y *metron*= medida). En la definición anterior hemos usado algunas palabras que definen elementos geométricos (ángulo , lado , triángulo). En lo que sigue y en la medida que sea necesario definiremos con mayor detalle algunas de las propiedades de los mismos.

ÁNGULO

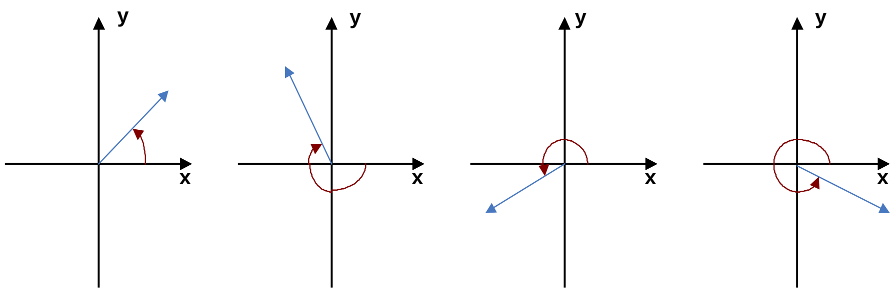
Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto. Podemos interpretar a un ángulo como la rotación de una de las semirrectas a la que denominamos lado inicial (**R_1**) hacia la otra que llamamos lado final (**R_2**). Al origen común se le denomina **vértice** del ángulo.

Por convención se determina que si el giro se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj el ángulo se considera positivo mientras que los ángulo negativos corresponden a un giro realizado en el mismo sentido horario.(fig. 1)



Ángulo positivo **Figura 1** Ángulo negativo

Un ángulo puede estar situado en cualquier parte del plano pero, a veces nos será útil trasladarlo a un sistema cartesiano de coordenadas de modo que el vértice del ángulo caiga sobre el origen de coordenadas y el lado inicial sobre el eje positivo de abscisas , a la cual suele denominarse posición estándar.(fig. 2)



Ángulos en posición estándar

Figura 2

La medida de un ángulo es saber "cuanto" debe girar $\mathbf{R_1}$ hasta alcanzar a $\mathbf{R_2}$. Para decirlo en una forma coloquial : medimos la "abertura" del ángulo. Podemos utilizar diferentes unidades de medida.

<u>GRADOS SEXAGESIMALES</u>

Cuando se mide un ángulo en grados sexagesimales , se establece que un giro completo se corresponde con una medida de 360º . En consecuencia medio giro mide (ángulo llano) 180º y un cuarto de giro (ángulo recto) 90º.
En este sistema de medida se define el minuto sexagesimal que equivale a 1/60 de grado y el segundo sexagesimal que equivale a 1/60 de minuto o 1/3600 de grado.
Sintetizando:
1º = 60`= 3600'' , 1`= 60``
Cuando medimos un ángulo con un transportador , el mismo cuenta con una escala graduada en grados y minutos sexagesimales.

<u>RADIÁN</u>

Podemos trazar un ángulo de tal forma que su vértice coincida con el centro de una circunferencia.
La intersección del ángulo con la circunferencia determina un segmento de arco , que se llama arco subtendido por el ángulo (fig. 3)

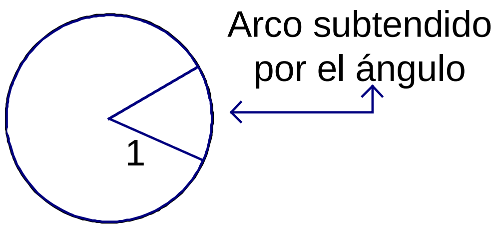


Figura 3

Se define como **1 Radián**. la medida del ángulo cuyo arco subtendido es igual a la longitud del radio de la circunferencia.
En la práctica es común trazar una circunferencia de radio unitario (de acuerdo a la unidad de medida de longitud que se esté usando) y el ángulo de 1 Radián subtenderá un arco cuya longitud tiene valor 1.
Como la longitud de la circunferencia (con radio unitario) es 2π , entonces el ángulo de un giro mide 2π radianes , el de medio giro π radianes y el ángulo recto medirá $\pi/2$ radianes.
¿Cuál es la relación entre la medida de un ángulo en radianes y en grados sexagesimales?
Sabemos que para el ángulo de un giro la medida en grados es 360º y en radianes es 2π.
Luego 1 radián = 360º / 2π = 57,29578º , que equivale a 57º 17`44.8``
Inversamente 1º = $2\pi/360$= 0,01745 rad.

<u>ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS , SUPLEMENTARIOS Y ADYACENTES</u>

Dos ángulos α y β son **complementarios** cuando su suma $\alpha + \beta$ es igual a 90º ($\pi/2$ rad)
Dos ángulos α y β son **suplementarios** cuando su suma $\alpha + \beta$ es igual a 180º (π rad)
Dos ángulos α y β son **adyacentes** cuando son consecutivos (tienen un lado en común) y sus lados no comunes son semirrectas opuestas . Los ángulos adyacentes son suplementarios (fig. 4).

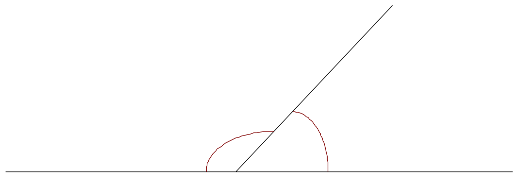


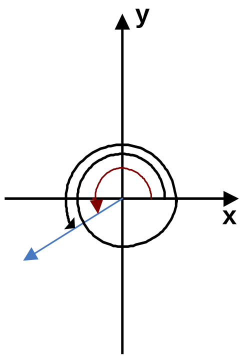
Figura 4

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

Agudo : menor que un ángulo recto **Recto**: ángulo de 90º **Llano** : ángulo de 180º
Obtuso : mayor que un ángulo recto y menor que un ángulo llano

ÁNGULOS COTERMINALES

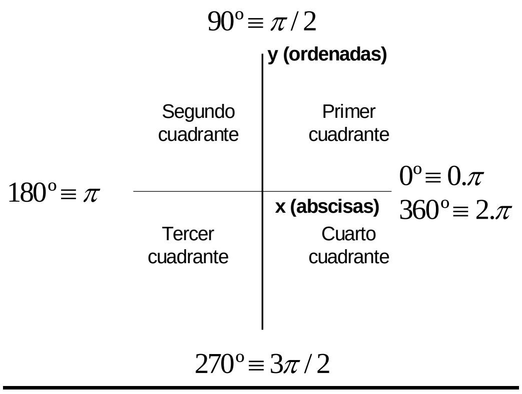
Dos ángulos para los cuales sus lados coinciden se llaman coterminales y difieren en su valor en un múltiplo entero de 360º o de 2π. La figura siguiente muestra dos ángulos coterminales .



CUADRANTES

En la figura siguiente se identifican los diferentes cuadrantes que se forman tomando las diferentes combinaciones de abscisas y ordenadas y los valores (expresados en grados sexagesimales y en radianes) de loa ángulos que marcan el límite entre un cuadrante y el sucesivo.

	Valor de la abscisa	**Valor de la ordenada**
Primer cuadrante	Positivo	Positivo
Segundo cuadrante	Negativo	Positivo
Tercer cuadrante	Negativo	Negativo
Cuarto cuadrante	Positivo	Negativo



LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

Sea un arco subtendido por un ángulo cuya medida en radianes es θ y el radio de la circunferencia r (fig. 5). Podemos determinar cual es la longitud de dicho arco.

El ángulo subtiende una fracción $\theta/2\pi$ de la longitud total de la circunferencia. Luego

$$\boxed{s = \frac{\theta}{2\pi}.2\pi r = \theta.r}$$

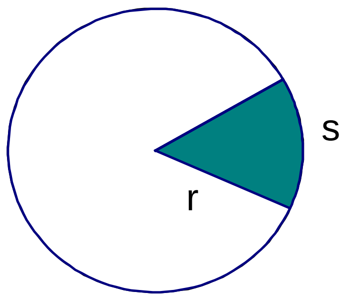


Figura 5

Lo que nos indica que la longitud del arco subtendido es igual al producto del radio de la circunferencia por la medida del ángulo (expresada en radianes).

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Procediendo análogamente a la sección anterior podemos calcular el área de un sector circular subtendido por un ángulo que mide θ radianes en un círculo de radio r.(fig. 6)

$$\boxed{A = \frac{\theta}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2}\theta.r^2}$$

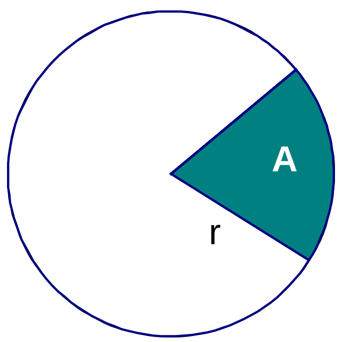


Figura 6

EJERCICIOS

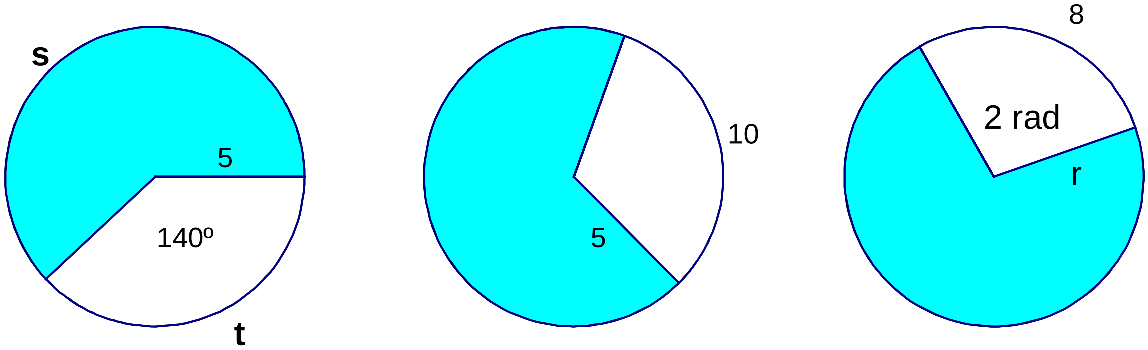
1) Determine la medida en radianes de los siguientes ángulos

1) 40º 2) 330º 3) 72º 4) –30º 5) 765º 6) –1457º

2) Determine la medida en grados sexagesimales de los siguientes ángulos

1) $3\pi/4$ 2) $-7\pi/2$ 3) $5\pi/6$ 4) 2 5) 1,5 6) $-\pi/12$

3) En las siguientes figuras determine el valor del elemento faltante (longitud de arco , ángulo o radio de la circunferencia)



4) Un sector circular tiene un ángulo central de 60º. Determine el área del sector si el radio mide 12 cm.

5) El área de un sector circular con ángulo central de 2 radianes es de 16 m^2 . Determine el radio del círculo.

6) El área de un sector circular es de 19,365 cm^2 . Si el radio del círculo es 10 cm , halle el valor del ángulo central en grados sexagesimales.

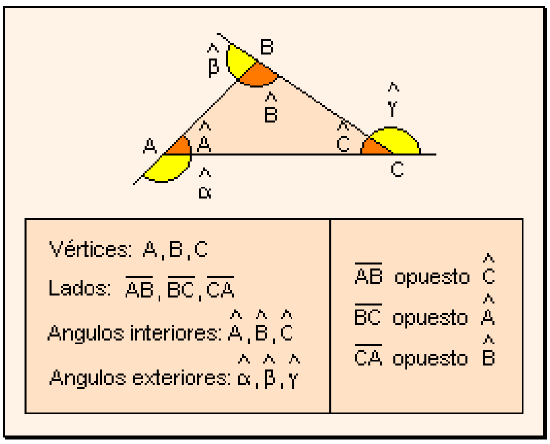
7) El área de un círculo es de 78,54 cm^2 . Determine el área de un sector circular perteneciente a dicho círculo cuyo ángulo central mida 30º.

RESUMEN DE PROPIEDADES DE TRIÁNGULOS

Antes de avanzar con los conceptos de trigonometría , haremos una pequeña síntesis acerca de los triángulos

.

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO

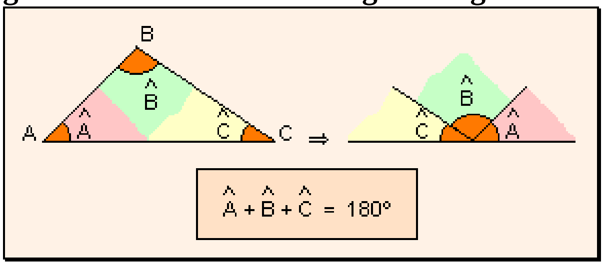


CLASIFICACION

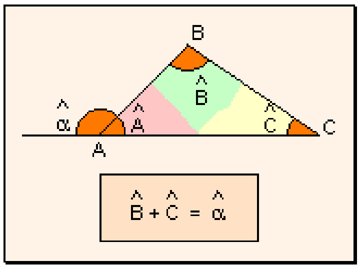
SEGÚN SUS LADOS	**SEGÚN SUS ÁNGULOS**
Equilátero : tres lados iguales	Acutángulo: los tres ángulos interiores agudos
Isósceles : al menos dos lados iguales	Rectángulo: un ángulo interior recto
Escaleno : los tres lados diferentes	Obtusángulo: un ángulo interior obtuso

PROPIEDADES

1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.



2) Un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes

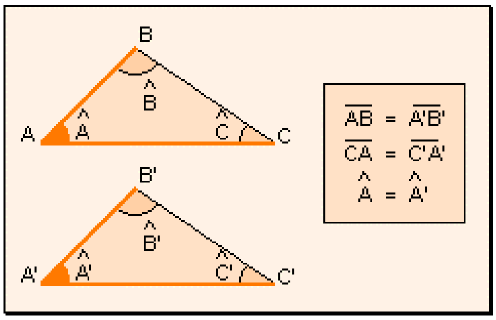


3) En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
4) A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.
5) En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de los mismos.

<u>**CRITERIOS DE IGUALDAD DE TRIANGULOS**</u>

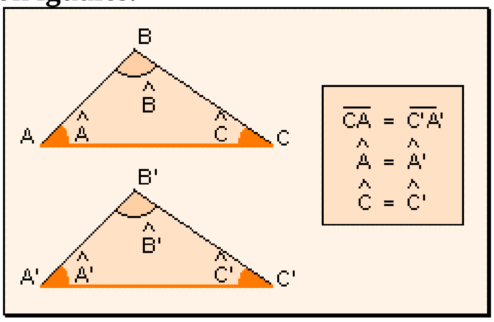
Es obvio que dos triángulos que tienen todos sus elementos iguales son necesariamente iguales. Pero es posible establecer la igualdad entre dos triángulos observando la igualdad entre algunos de sus elementos. A continuación se señalan los criterios para que dos triángulos sean iguales.

Primer criterio: Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, son iguales.

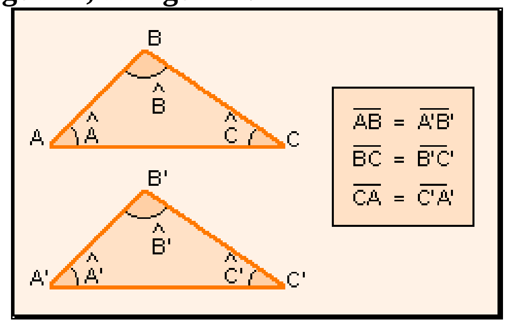


Segundo criterio: Dos triángulos que tienen un lado y los dos ángulos

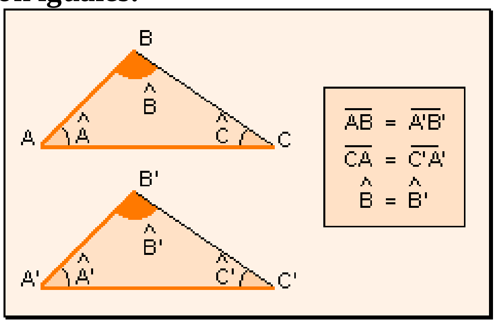
contiguos a él respectivamente iguales, son iguales.



Tercer criterio: Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente iguales, son iguales.



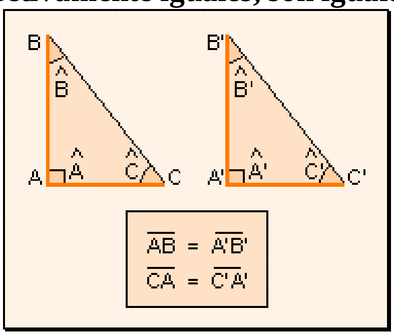
Cuarto criterio: Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo opuesto al lado mayor respectivamente iguales, son iguales.



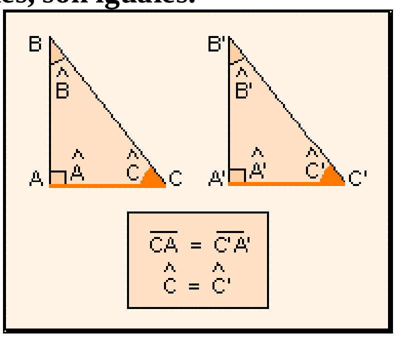
En el caso que los triángulos sean rectángulos ya hay un elemento igual , por lo tanto en dicho caso los criterios son los siguientes:

<u>Criterios de igualdad de triángulos rectángulos</u>

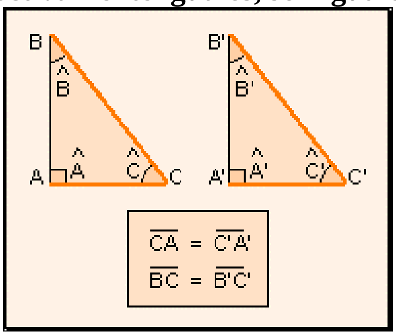
Primer criterio: Dos triángulos rectángulos que tienen sus catetos respectivamente iguales, son iguales.



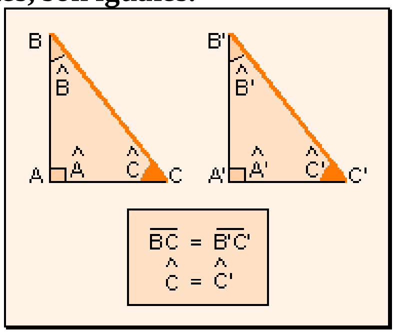
Segundo criterio: Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo y un cateto respectivamente iguales, son iguales.



Tercer criterio: Dos triángulos que tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente iguales, son iguales.

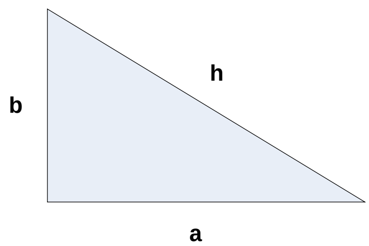


Cuarto criterio: Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo y la hipotenusa respectivamente iguales, son iguales.



TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h = +\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = +\sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = +\sqrt{h^2 - a^2}$$

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

¿Qué significa que dos figuras geométricas sean semejantes?

En el lenguaje cotidiano usamos la palabra “semejante” con el significado de “similar , parecido , igual , etc”. aplicados a objetos o personas.

En Matemática el concepto de semejanza está ligado al concepto de **proporcionalidad**.

Recordemos algunas definiciones

Razón: es el cociente entre magnitudes a y b que pueden ser números , distancias , peso , etc.

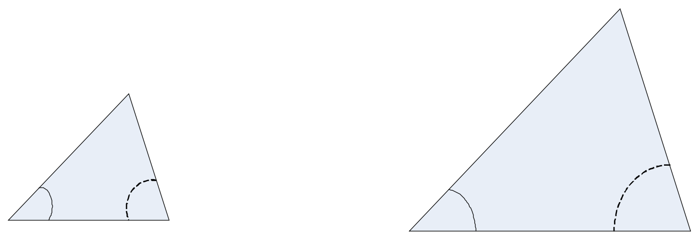
$$\frac{a}{b}$$

Proporción : es la igualdad de dos razones : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

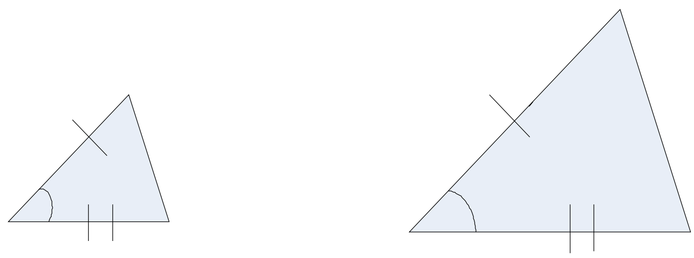
En toda proporción se cumple que el producto de los términos medios es igual al producto de los extremos , b.c = a.d

Definiremos como **lados homólogos** de dos figuras a los lados de ambas que unen pares de vértices de ángulos respectivamente iguales.
Se establece que dos figuras son semejantes si:
a) sus ángulos respectivos son iguales
b) sus lados homólogos son proporcionales

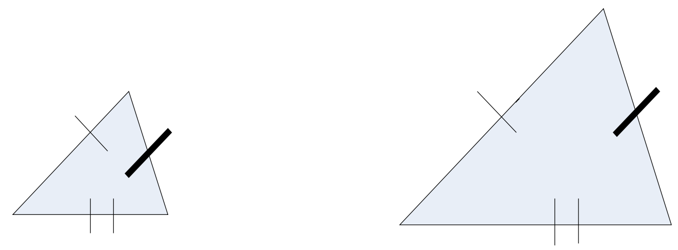
<u>CRITERIO ÁNGULO-ÁNGULO</u>
Si dos triángulos tienen las medidas de sus ángulos correspondientes iguales , entonces son semejantes. Pero como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º , si tienen dos ángulos interiores respectivamente iguales , los terceros ángulos correspondientes también lo serán , en consecuencia , bastará para que los triángulos sean semejantes que posean dos ángulos correspondientes iguales.



<u>CRITERIO LADO – ÁNGULO – LADO</u>
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre los mismos igual.

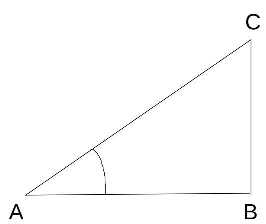


<u>CRITERIO LADO – LADO – LADO</u>
Dos triángulos son semejantes si tienen todos sus lados homólogos proporcionales.



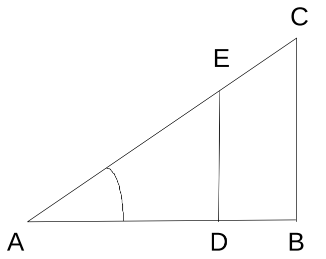
<u>TRIGONOMETRÍA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS</u>

Sea el triángulo rectángulo de la figura
Podemos definir algunas razones entre los lados del mismo según su relación con el ángulo θ .
Por ejemplo :



$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

¿Tiene algún sentido plantearse estas razones entre los lados del triángulo?
Observemos la figura siguiente:



Los triángulos ABC y ADE son ambos rectángulos y tienen además otro ángulo igual (en este caso θ). También el tercer ángulo será igual ¿por qué?
De acuerdo con uno de los criterios de semejanza expresados anteriormente estos dos triángulos resultan semejantes y por consiguiente valen las proporciones :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

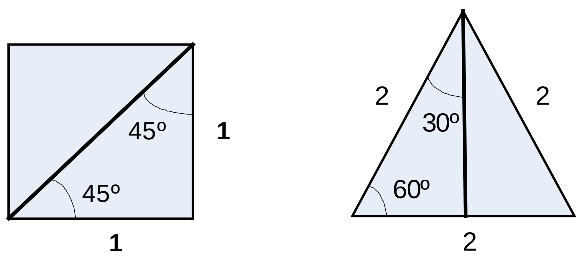
Por consiguiente no interesan las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos que podamos construir manteniendo constante (en magnitud y posición) el ángulo θ. Las razones construidas tendrán siempre el mismo valor y **<u>dependerán solamente del ángulo en cuestión.</u>**
Eso nos permite definir las llamadas razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

$$\textbf{seno } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \textbf{coseno } \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \textbf{tangente } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

y también las razones inversas

$$\textbf{cosecante } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}, \quad \textbf{secante } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}, \quad \textbf{cotangente } \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

ALGUNOS TRIÁNGULOS ESPECIALES
Analicemos los triángulos de las figuras siguientes



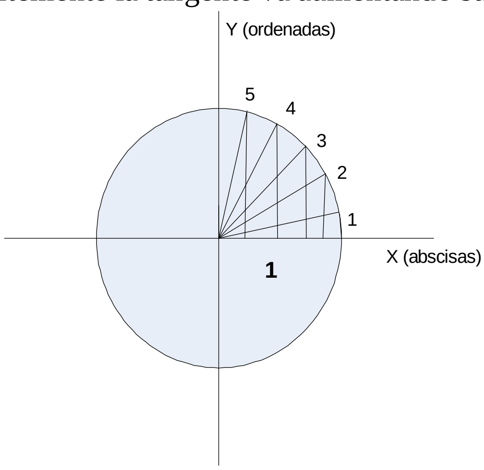
El primero se forma trazando la diagonal en un cuadrado de lado 1. Se forman dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 1 y su hipotenusa mide $\sqrt{2}$ (¿por qué?). Además los ángulos agudos miden 45º (¿por qué ?)

El segundo se forma trazando la bisectriz (¿qué es eso?) del ángulo opuesto a la base en un triángulo equilátero cuyos lados miden 2. Se forman así dos triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos miden 60º y 30º , su hipotenusa mide 2 , un cateto mide 1 y el otro mide $\sqrt{3}$.(explicar porque).

Para estos ángulos de 30º , 45º y 60º es fácil hallar sus razones trigonométricas

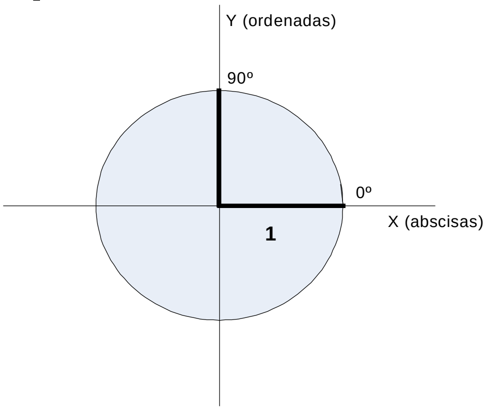
θ en grados	**θ en radianes**	**seno θ sen θ**	**cosenoθ cos θ**	**tangenteθ tan θ**	**cosecanteθ csc θ**	**secante θ sec θ**	**cotangenteθ cot θ**
30º	π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45º	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60º	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Podemos analizar lo que ocurre mientras vamos desplazando la hipotenusa del triángulo rectángulo sobre el que definimos las razones trigonométricas , desde los valores menores a los valores mayores del ángulo.
En la figura siguiente la circunferencia tiene radio unidad (1). Mientras que el radio va pasando por las posiciones 1 , 2 , 3 , 4 y 5 , el ángulo va aumentado su abertura. El seno está representado por el cociente entre la longitud del cateto opuesto (valor de la ordenada) sobre la hipotenusa (que vale 1).
De esta manera la longitud del cateto opuesto (valor de la ordenada) representa directamente el valor del seno del ángulo.
Razonando de igual forma llegamos a la conclusión que la longitud del cateto adyacente al ángulo (valor de la abscisa) representa el valor del coseno del ángulo. Así vemos que mientras el ángulo va aumentando su valor , el seno va creciendo y el coseno va disminuyendo. Consecuentemente la tangente va aumentando su valor.



Para completar los valores de las razones trigonométricas en los ángulos del primer cuadrante , debemos encontrar los valores para los ángulos de 0º y de 90º.

De la figura siguiente vemos que en el ángulo de 0º nos encontramos en un caso límite en el cual la hipotenusa coincide con el cateto adyacente (ambos sobre el eje de las abscisas) mientras que el cateto opuesto al ángulo tiene medida nula. En consecuencia el coseno 0º toma el valor 1 y el seno 0º toma el valor 0 , por lo tanto la tangente 0º vale 0.
Pasando al ángulo de 90º nos encontramos con otro caso límite en el cual el cateto opuesto y la hipotenusa coinciden , mientas que el cateto adyacente toma el valor nulo. Luego el seno 90º toma el valor 1 y el coseno 90º toma el valor 0. La tangente 90º no está definida porque no es posible dividir por 0.

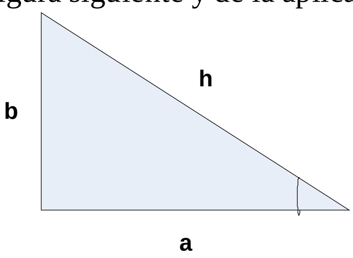


Si completamos la tabla para estos valores , resulta:

θ en grados	**θ en radianes**	**seno θ sen θ**	**cosenoθ cos θ**	**tangenteθ tan θ**	**cosecanteθ csc θ**	**secante θ sec θ**	**cotangenteθ cot θ**
0º	0	0	1	0	no está definida	1	no está definida
90º	π/2	1	0	no está definida	1	no está definida	0

RELACIÓN PITAGÓRICA

De la figura siguiente y de la aplicación del teorema de Pitágoras , resulta



$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{b^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

En consecuencia

$$sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

$$sen\ \theta = +\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\cos\ \theta = +\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

A partir de las relaciones anteriores es posible encontrar las siguientes:

$$tg^2\theta = \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = tg^2\theta + 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{tg^2\theta + 1}$$

$$\cos\theta = +\sqrt{\frac{1}{tg^2\theta + 1}}$$

$$tg^2\theta = \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{sen^2\theta}{1 - sen^2\theta}$$

$$\frac{1 - sen^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta} - 1 = \frac{1}{tg^2\theta}$$

$$\frac{1}{sen^2\theta} = \frac{1}{tg^2\theta} + 1 = \frac{1 + tg^2\theta}{tg^2\theta}$$

$$sen^2\theta = \frac{tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}$$

$$sen\theta = +\sqrt{\frac{tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}}$$

EJERCICIOS

1) Conociendo el valor de todas las razones trigonométricas a partir de la razón trigonométrica dada (suponemos que el ángulo θ es agudo)

a) senθ = 3/5 b) cosθ = 2/7 c) tg θ = $3^{1/2}$ d) cotθ = 1 e) secθ=7 f) cscθ = 13/12

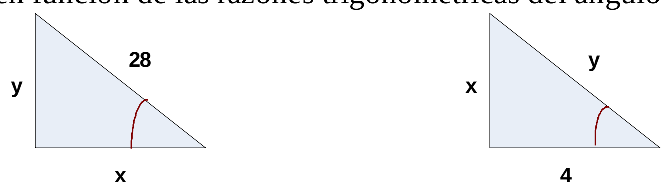
¿Puede hallar el valor del ángulo en cada caso?

2) Evalúe las siguientes expresiones

a) sen 30º .cos 60º + sen 60º . cos 30º b) (tg 45º + tg 60º)/tg 30º

c) sen 45º . tg 90º + cos 45º . tg 0º d) sen^2 (π/6) + cos^2 (π/6)

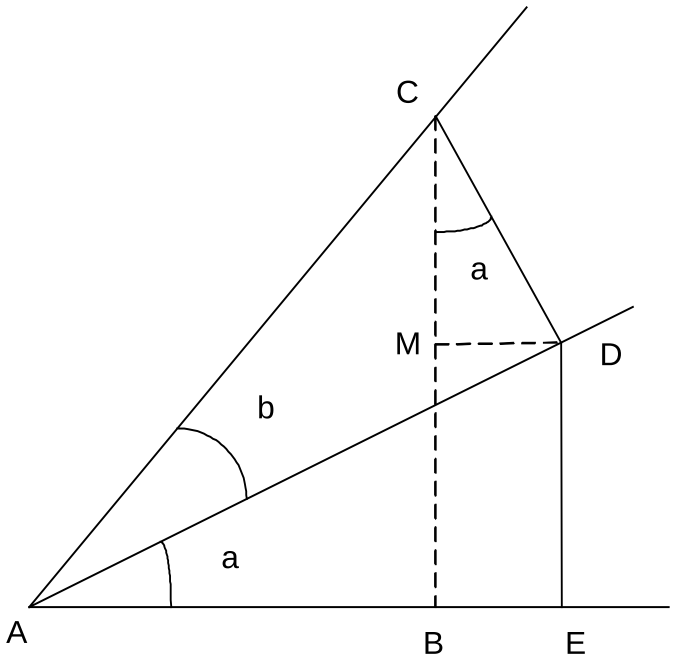
3) Exprese a x e y en función de las razones trigonométricas del ángulo θ



FORMULAS DEL SENO Y EL COSENO DE LA SUMA DE ÁNGULOS

En ciertos ejercicios es necesario trabajar con la suma de dos ángulos y sus razones trigonométricas (en especial con el seno y el coseno). Vamos a desarrollar las fórmulas de los mismos.

Analicemos la figura siguiente. En ella se han trazado dos ángulos adyacentes a y b , conformados por dos semirrectas que tienen el origen en A. Sobre la semirrecta que es el límite superior de b , trazamos desde un punto C una perpendicular hasta que intersecte a la otra semirrecta que comparte con el ángulo a . Al punto de intersección lo denominamos D. Desde D trazamos una perpendicular hasta la otra semirrecta que sirve de origen al ángulo a y el punto de intersección lo denominamos E. Desde C trazamos una perpendicular a la primer semirrecta y el punto de intersección lo denominamos B. Y finalmente desde D trazamos una paralela a la primer semirrecta hasta que intersecte a la perpendicular anterior en el punto M. Quedan así determinados tres triángulos rectángulos: el AED , el ADC y el DMC , (donde hemos señalado como vértice intermedio el que corresponde al ángulo recto).



Ahora , como CD es perpendicular a AD y CB es perpendicular a AE resulta que los triángulos AED y CMD son semejantes (tienen un ángulo recto en común y al tener dos lados perpendiculares el ángulo comprendido entre los mismos también es igual).
Luego podemos , utilizando las definiciones de las razones trigonométricas establecer que:

$$\text{seno }(a+b)=\frac{BC}{AC}\ ,\quad \text{seno } a = \frac{DE}{AD}=\frac{MD}{CD}\ ,\ \text{seno } b=\frac{CD}{AC}$$

Y

$$\text{coseno }(a+b)=\frac{AB}{AC}\ ,\quad \text{coseno } a = \frac{AE}{AD}=\frac{CM}{CD}\ ,\ \text{coseno } b=\frac{AD}{AC}$$

Ahora **,**

$$seno(a+b)=\frac{BC}{AC}=\frac{BM+MC}{AC}=\frac{BM}{AC}+\frac{MC}{AC}=\frac{DE}{AC}+\frac{MC}{AC}$$

Pero del análisis de la figura resulta que BM =DE = AD.seno(a) y MC = CD.coseno (a) , luego

$$seno(a+b)=\frac{AD}{AC}.seno(a)+\frac{CD}{AC}.\cos eno(a)$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{AD}{AC} = coseno(b)$$
$$\frac{CD}{AC} = seno(b)$$

resulta
seno(a+b) = seno (a).coseno (b)+seno(b).coseno(a)

Realizando un análisis similar para el coseno(a+b) resulta:

$$\cos eno(a+b) = \frac{AB}{AC} = \frac{AE - BE}{AC}$$

Pero AE = AD coseno (a) y BE = MD = CD seno (a) , de donde resulta que

$$coseno(a+b) == \frac{AD.\cos eno(a) - CD.seno(a)}{AC} =$$
$$\cos eno(a).\frac{AD}{AC} - seno(a).\frac{CD}{AC} =$$
$$\cos eno(a).\cos eno(b) - seno(a).seno(b)$$

Luego
coseno(a+b) = coseno(a).coseno(b) – seno(a). seno(b)

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

A partir del conocimiento de las propiedades de los lados de un triángulo rectángulo y de las razones trigonométricas , estamos en condiciones de “resolver” triángulos rectángulos , es decir , determinar el valor de todos sus elementos a partir de algunos datos conocidos.

Para ello utilizaremos las siguientes fórmulas

$$b = h.sen(\theta)$$
$$a = h.\cos(\theta)$$
$$\theta + \alpha = 90^{o}$$
$$b = h.\cos(\alpha)$$
$$a = h.sen(\alpha)$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h = +\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = +\sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = +\sqrt{h^2 - a^2}$$

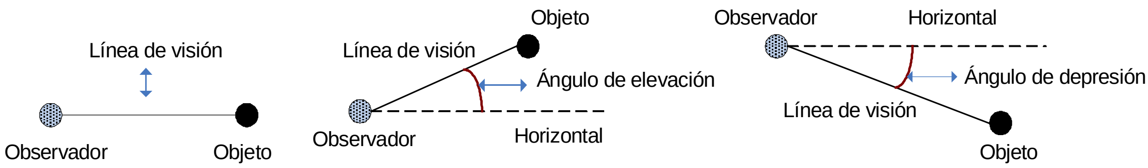
$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{b^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

y en algunas ocasiones deberemos utilizar las fórmulas inversas (no confundir con las razones inversas (cosecante , secante y cotangente))
Por ejemplo , en alguna oportunidad será necesario conocer el ángulo para el cual el seno vale 0.8. , o sea determinar el valor del ángulo θ para el cual senoθ = 0.8
Para ello podemos utilizar calculadoras y de acuerdo al teclado que posean presionar las teclas $\boxed{SIN^{-1}}$, o $\boxed{INV}$ $\boxed{SIN}$, o $\boxed{ARCSIN}$. En el caso en cuestión podemos escribir 0.8 y luego

cualquier combinación de las anteriores y el resultado será (si la calculadora está programada para dar el resultado en grados sexagesimales) 53,13º , lo que equivale a 53º 7` 48`` .
Si la calculadora está programada para dar el resultado en radianes , el mismo será 0.972.
De la misma forma se procederá con el coseno y la tangente , siendo sus respectivas fórmulas inversas $\boxed{COS^{-1}}$, o $\boxed{INV}$ $\boxed{COS}$, o $\boxed{ARCCOS}$ y $\boxed{TAN^{-1}}$, o $\boxed{INV}$ $\boxed{TAN}$, o $\boxed{ARCTAN}$

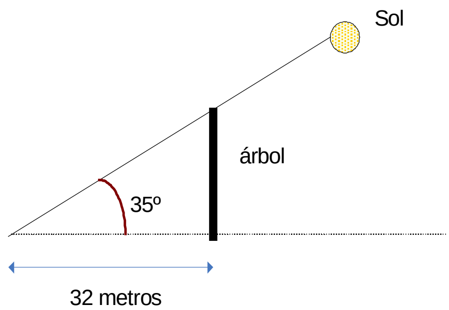
Para resolver algunos de los problemas que se plantean a continuación , definiremos algunos términos que utilizaremos en ellos.
Si un observador está viendo un objeto , entonces la línea que une su ojo con el objeto se llama **línea de visión.**

Si el objeto que se está observando está por arriba de la horizontal , entonces el ángulo formado entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación**. En el caso contrario (objeto por debajo de la horizontal) el ángulo se llama **ángulo de depresión**.



EJEMPLOS

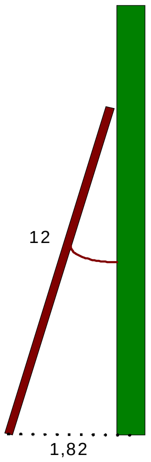
1) Un árbol proyecta una sombra de 32 metros de largo y el ángulo de elevación al Sol es de 35º. Determine la altura del árbol.



Si la altura del árbol es h , entonces h / 32 metros. = tangente 35º = 0,700
Luego h = 32 metros x 0,700 = 22,40 metros.

2) Una escalera de 12 metros de largo está apoyada contra una pared. Si la base de la escalera está a 1,82 metros de la base de la pared. ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y la pared?

En este caso la escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo y la separación en la base es el cateto opuesto al ángulo que queremos calcular.
Luego 1,82 / 12 = 0,15666 = seno θ
Entonces el valor de θ será $\sin^{-1}$ (θ) y da por resultado 9,01º = 9º 6`



Como habrá podido observar para resolver este tipo de problemas es conveniente realizar un diagrama que los represente. De esa manera podemos visualizar claramente todos los elementos , la relación entre los mismos y elaborar un método de resolución. Le recomendamos hacer lo mismo con los ejercicios siguientes.

EJERCICIOS

1)El piloto de un avión que está volando a una altura de 10,67 km tiene a la vista un puente sobre un río. El ángulo de depresión respecto a un punto ubicado exactamente debajo del puente es de 22º. Determine:

a) la distancia del aeroplano a la base del puente
b) la distancia del punto ubicado en la tierra exactamente debajo del avión y la base del puente

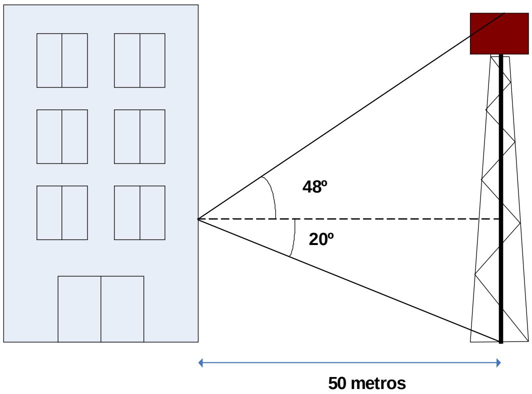
2) Se dirige un rayo laser hacia el centro de la Luna , pero el mismo se desvía 0,5º en su trayectoria. ¿Cuánto se ha desviado de su objetivo si se sabe que la distancia Tierra-Luna es aproximadamente de 384.400 km?.El radio de la Luna es aproximadamente 1737 km ¿el rayo impactará sobre la Luna? (suponga como si el rayo fuese dirigido desde el centro de la Tierra hacia el centro de la Luna)

3) Un cable de acero que actúa como sostén está sujeto al extremo superior de una torre metálica. Si la longitud del cable es de 183 m y el ángulo que forma con el suelo es de 60º, calcule la altura de la torre.

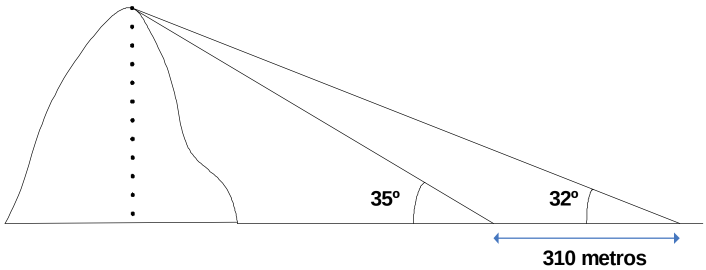
4) Una escalera de 6 metros de longitud está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera se encuentra separada 1,8 m de la base del edificio. Determine el valor de todos los ángulos internos del triángulo que determinan la escalera , el edificio y el suelo.

5) Un árbol de 29 m de alto proyecta una sombra de 36 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación al Sol?

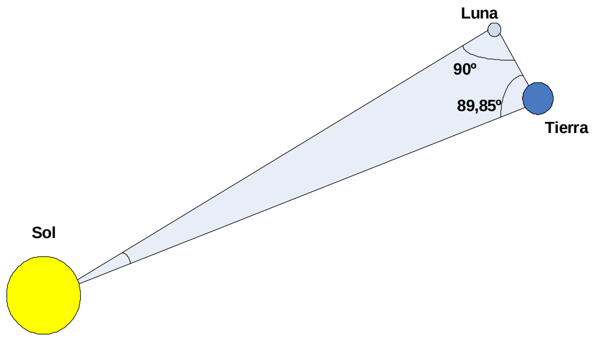
6) En el siguiente grafico , determine la altura de la torre de agua.



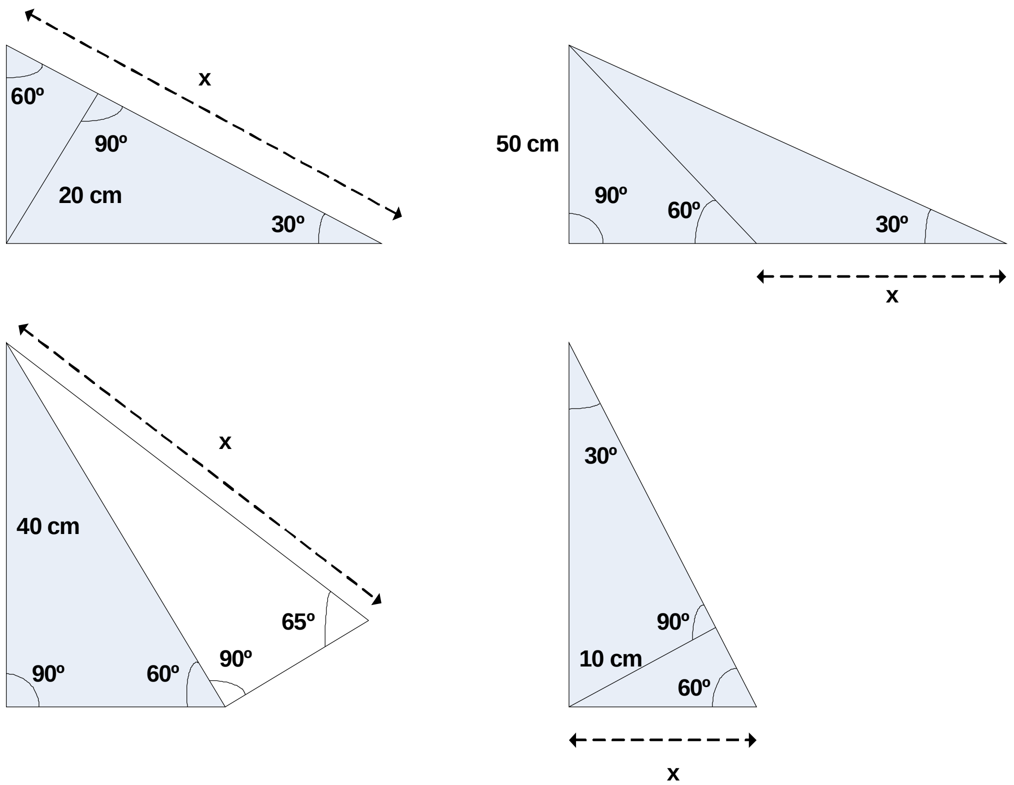
7) Para poder calcular desde una llanura la altura de una montaña se realizan dos mediciones del ángulo de elevación del pico de la misma. Ambas mediciones se toman sobre un camino lineal que se dirige en forma recta a la base de la montaña. La primer medición da un resultado de 32º. La segunda se realiza a 310 m mas cerca de la montaña y da un resultado de 35º. ¿Puede estimar la altura de la montaña? (no es un cálculo directo)(el diagrama es obsequio de la cátedra)



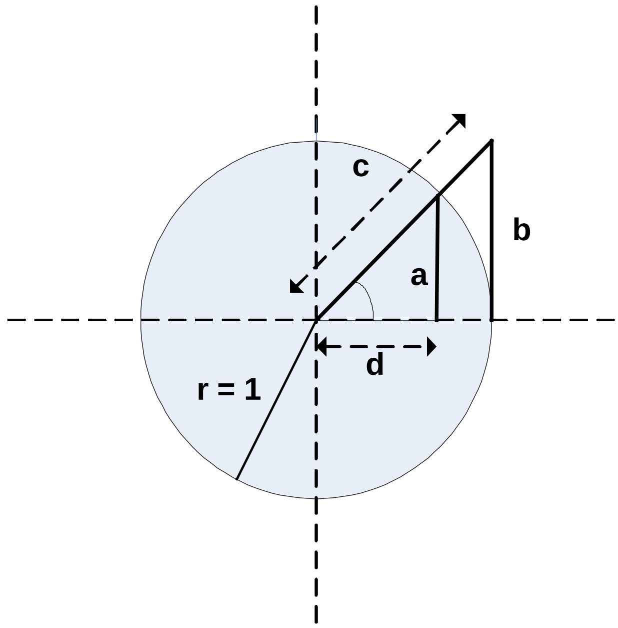
8) En el cuarto creciente la Luna , el Sol y la Tierra forman entre sí un triángulo rectángulo Con los datos de la figura y sabiendo que la distancia Tierra – Luna es aproximadamente 384.400 km , hallar la distancia Tierra – Sol.



9) En los siguientes gráficos determinar el valor de x.

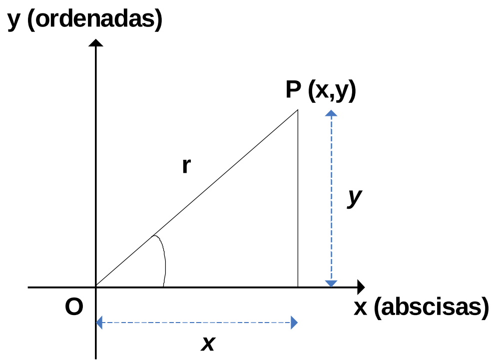


10) Expresar las longitudes de a , b , c y d de la figura en términos de las razones trigonométricas del ángulo θ
.



FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ÁNGULOS

Ubiquemos un triángulo rectángulo en posición estándar. El punto P de coordenadas (x,y) representa el extremo del lado final del ángulo θ . En principio ubicaremos a dicho punto P en el primer cuadrante , por lo cual el ángulo θ será un ángulo agudo.



Como x e y son respectivamente los catetos adyacente y opuesto al ángulo θ , y r es la hipotenusa , podemos definir las razones trigonométricas en función del cociente de **r , x , y.**

De esta manera podemos definir las razones trigonométricas para cualquier tipo de ángulos. Si P(x,y) puede situarse en cualquier punto de cualquier cuadrante , definiremos las siguientes **funciones trigonométricas , (**teniendo en cuenta que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

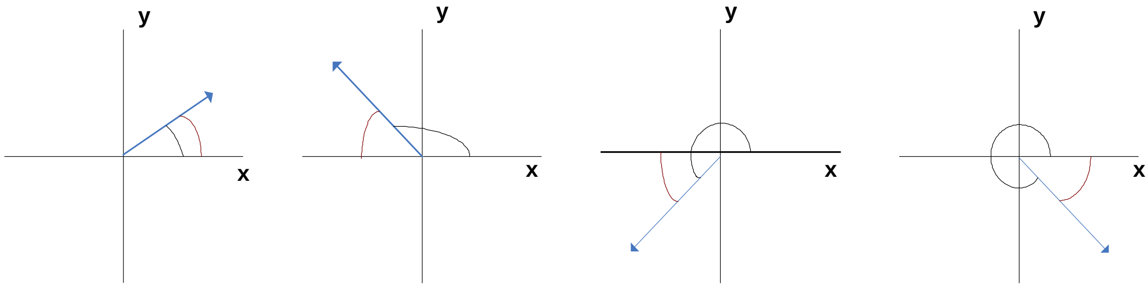
$$sen\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}, tg\theta = \frac{y}{x}(x \neq 0)$$
$$\csc\theta = \frac{r}{y}(y \neq 0), \sec\theta = \frac{r}{x}(x \neq 0), \cot g\theta = \frac{x}{y}(y \neq 0)$$

Como al pasar por los diferentes cuadrantes, las abscisas y las ordenadas van cambiando su signo , así también lo harán las funciones trigonométricas que dependen de ellas. Hay que tener en cuenta que el valor de r es siempre positivo.

Función	**Primer cuadrante**	**Segundo cuadrante**	**Tercer cuadrante**	**Cuarto cuadrante**
Seno	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
Coseno	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Tangente	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa
Cosecante	Positiva	Positiva	Negativa	Negativa
Secante	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva
Cotangente	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa

¿Cómo podemos determinar el valor de la función trigonométrica para cualquier ángulo? Vamos a definir un ángulo auxiliar , llamado ángulo de referencia , con el cual podremos calcular lo expuesto en la pregunta anterior.

Sea θ un ángulo en posición estándar , se llama ángulo de referencia ϕ asociado con θ al ángulo agudo formado por el lado final de θ y el eje de las x (abscisas)



Para determinar el valor de la función trigonométrica de cualquier ángulo θ procederemos de la siguiente manera:

1. encontramos el ángulo de referencia ϕ asociado a θ
2. determinamos el signo de la función trigonométrica de θ
3. el valor de la función trigonométrica de θ será igual al de la función trigonométrica de ϕ (salvo un cambio de signo).

EJEMPLOS

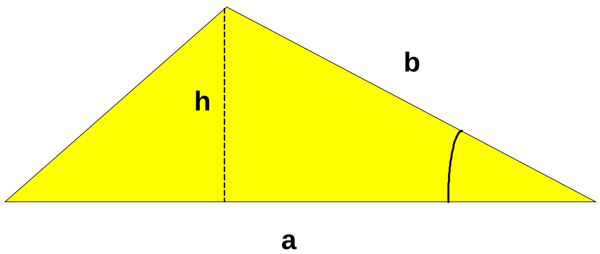
Determinar a) seno 265º , b) coseno 155º , c) tangente 315º

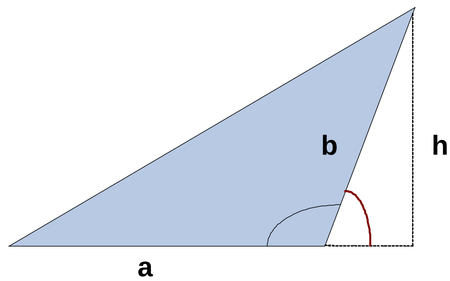
a) El ángulo de 265º está ubicado en el tercer cuadrante , luego el ángulo de referencia que le corresponde es la diferencia entre 265º y 180º , o sea 85º. El seno 85º =0.996 . Como en el tercer cuadrante el seno toma valor negativo seno 265º = -0.996
b) El ángulo de 155º está ubicado en el segundo cuadrante. Su ángulo de referencia será 180º -155º = 25º. El coseno 25º= 0.906. Como en el segundo cuadrante el coseno toma valor negativo coseno 155º = -0.906.
c) El ángulo de 315º está ubicado en el cuarto cuadrante , luego el ángulo de referencia será 360º - 315º = 45º. La tangente 45º = 1. Como la tangente es negativa en el cuarto cuadrante el resultado será tangente 315º = -1.

Si el ángulo del cual deseamos calcular una de sus funciones trigonométricas supera los 360º , se le deberá restar 360º (las veces que lo permita) hasta obtener el ángulo coterminal del dado , que esté comprendido dentro de un ángulo de un giro.
Ejemplo: si queremos calcular seno 1105º , a este ángulo podremos restarle 3 veces 360º , o sea 1080º y el ángulo sobre el que realizaremos el cálculo de la función seno será el de 1105º - 1080º = 25º. Luego seno 1105º = seno 25º = 0.423

ÁREA DE UN TRIÁNGULO
Vamos a utilizar los elementos trabajados hasta aquí para definir el área de un triángulo en función de un ángulo y dos de sus lados.
Recordemos que el área de un triángulo está dada por la fórmula ½ .(base).(altura)
Ahora analicemos los casos en que conocemos dos lados del triángulo a y b y el ángulo θ comprendido entre ellos. Pueden ocurrir dos casos: i) θ es agudo , ii) θ no es agudo.
El primer caso está representado en el primer triángulo de la figura siguiente.

Podemos considerar al lado a como la base del triángulo y h su altura. Luego el área sería ½ . a. h = ½ .a.b.seno θ (dado que la altura es perpendicular a la base y b será la hipotenusa del triángulo rectángulo y h el cateto opuesto a θ)
El segundo caso se muestra en el otro triángulo de la figura. Los lados a y b están determinando un ángulo θ que es obtuso. Nuevamente el área del triángulo será ½ .a.h.
En este caso h/b es igual al seno (180º - θ) , donde 180º - θ es el ángulo de referencia de θ. (es suponer que θ está en el segundo cuadrante. En consecuencia como en dicho cuadrante el seno es positivo , resulta que seno (180º -θ) = seno θ. Y de esta forma el área del triángulo vuelve a ser expresada como ½ .a.b.seno θ.

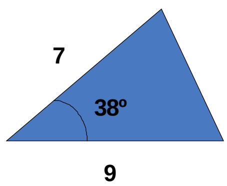


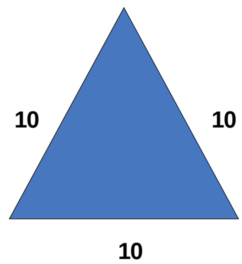


EJERCICIOS
1) Halle el valor de las siguientes funciones trigonométricas
i)seno 150º , ii) coseno 570º , iii) cotangente 210º , iv) tangente 330º , v) seno (-60º) , vi) secante (-60º) , vii) secante 2π/3 , viii) coseno 7π , ix) cotangente (-π/4) , x) seno 11π/6
2) Determine el valor de todas las funciones trigonométricas a partir de la información siguiente:

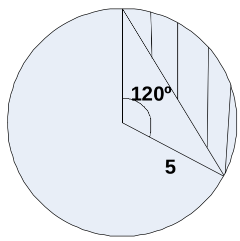
a) seno θ= 3/5 y θ pertenece al segundo cuadrante
b) coseno θ = -7/12 y θ pertenece al tercer cuadrante
c) cotangente θ = ¼ y seno θ < 0
d) tangente θ = -3/4 y coseno θ > 0.

3) Determine el área de los siguientes triángulos



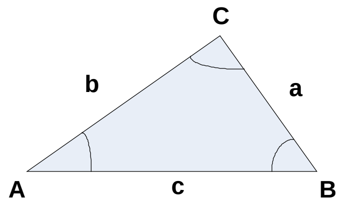


4) Halle la superficie rayada

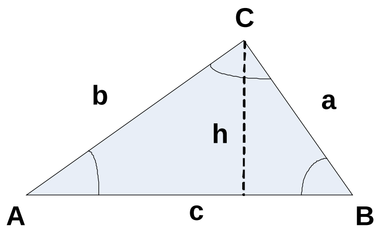


LEY DE LOS SENOS
Sea el siguiente triángulo. En él se cumple la siguiente propiedad

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$



Demostración
Sea el mismo triángulo en el que consideramos al lado c como base. Tracemos la altura h. Esta cumplirá que h/a = sen B , por lo tanto h = a . sen B
El área será **½ . c. h** = **½ . c . a . sen B**



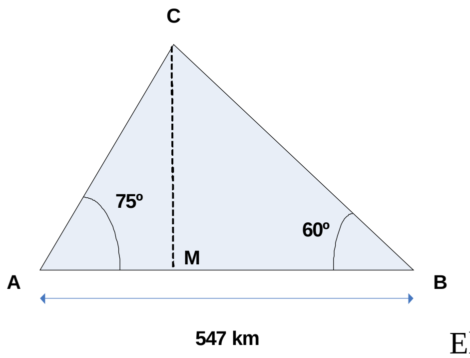
Con h/a = sen B

O si vamos variando el lado que tomamos como base , el cálculo del área nos dará :

½ . a . b . seno C = ½ . b . c . sen A = ½ . a . c . sen B

Si a la expresión anterior la multiplicamos por **2/(a.b.c) ,** resulta la propiedad buscada.

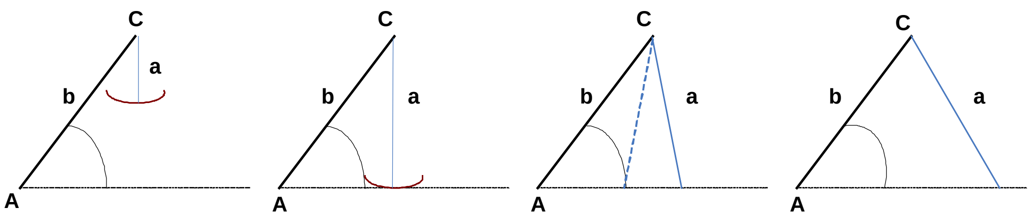
APLICACIÓN
Un satélite pasa directamente por dos estaciones de rastreo A y B separadas entre sí 547 km. Si en el mismo momento desde ambas estaciones miden el ángulo de elevación del satélite y dichas mediciones resultan ser 75º y 60º respectivamente. ¿Cuál es la distancia del satélite a cada estación?. Cuál es la distancia del satélite a la superficie terrestre?
Realizamos un diagrama en el cual el satélite ocupa el punto C



El ángulo correspondiente al vértice C resulta ser 180º - (75º+60º) = 45º.
Aplicando la ley de los senos resulta que:
sen 60º / AC = sen 45º / 547 km , de donde surge que AC = sen 60º . 547 km /sen 45º
AC = 0,866 . 547 km / 0,707 = 670, 02 km.
De igual forma
sen 75º/BC = sen 45º / 547 km →BC = sen 75º . 547 km / sen 45º = 0,966 . 547 km / 0,707 = 747,38 km
Si deseamos conocer la altura del satélite sobre la superficie terrestre , debemos calcular la distancia CM. Si tomamos el triángulo rectángulo AMC , AC es la hipotenusa y CM/ AC= sen 75º = 0,966.
Luego CM = 0,966 . AC = 0,966 . 670,02 km = 647,24 km.

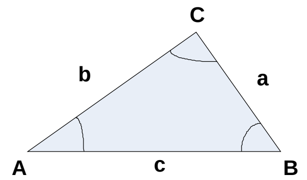
RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO
Resolver un triángulo significa encontrar , a partir de ciertos datos , los valores de todos los ángulos y lados del mismo.
En general un triángulo queda determinado si conocemos a tres de sus partes (ángulos y lados).
La única imposibilidad se presenta cuando conocemos los tres ángulos , porque se pueden construir muchos triángulos (que resultan semejantes entre sí) que tienen los mismos ángulos.
Luego los casos posibles quedan restringidos a los siguientes:

i. Un lado y dos ángulos
ii. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
iii. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
iv. Tres lados.
v. En todos los casos queda determinado unívocamente un único triángulo , salvo en el caso dos en el cual puede resultar que se determine uno o dos triángulos que cumplan con las condiciones o bien ninguno. Se denomina el **caso ambiguo**. Analicemos las distintas posibilidades que se presentan cuando nos dan como dato un lado **b** , un ángulo **θ** y otro lado **a** .



En la primer imagen es claro que la longitud del lado **a** es menor que la mínima distancia del vértice C a la línea horizontal (que cerraría el triángulo). La distancia de C a la línea horizontal está dada por el segmento vertical que une dicho vértice con la línea). Luego en este caso no es posible construir un triángulo.
En la segunda imagen la longitud del lado **a** es igual a la distancia del vértice C a la línea horizontal , y se puede construir un único triángulo (que resulta ser rectángulo).
En la tercer imagen la longitud de **a** es mayor que la distancia del vértice C a la línea horizontal pero a su vez es menor que la longitud de **b**. En este caso es posible construir dos triángulos.
En la cuarta imagen la longitud del lado **a** es igual o mayor a la longitud del lado **b** y se puede construir un solo triángulo.

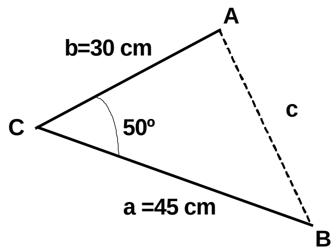
LEY DE LOS COSENOS
Para la resolución de triángulos en los cuales nos dan como datos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o los tres lados (casos iii) y iv)) , es conveniente utilizar la Ley de los cosenos , que establece que en todo triángulo ABC se cumple:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$

Omitiremos la demostración de esta propiedad. Puede verse en el libro recomendado al comienzo del apunte.

APLICACIONES
1) Resolver el siguiente triángulo

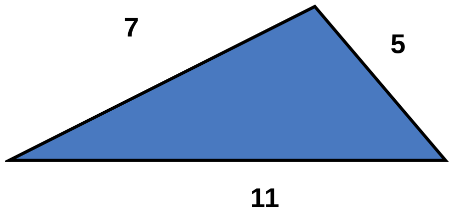


Aplicando la ley del coseno para el lado c , se obtiene :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C = (45cm)^2 + (30cm)^2 - 2.45cm.30cm.\cos 50º$$
De donde resulta que $c^2 = 2025\ cm^2 + 900cm^2 - 2700\ cm^2\ .0{,}643 = 1188{,}9\ cm^2$
Luego c = 34,48 cm
Si deseamos calcular el valor del ángulo B podemos usar la fórmula

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c} = \frac{(45cm)^2 + (34,48cm)^2 - (30cm)^2}{2.(45cm).(34,48cm)} = \frac{2313,87cm^2}{3103,2cm^2} = 0,7456$$

Aplicando la fórmula inversa para el coseno se obtiene B = 41,79º
En forma similar se puede calcular el ángulo A.

2) Hallar los ángulos del siguiente triángulo



Como lo único que poseemos como datos son las longitudes de los lados del triángulo , podremos aplicar las fórmulas de la ley del coseno , despejando en las mismas el coseno de cada ángulo en función de los lados.

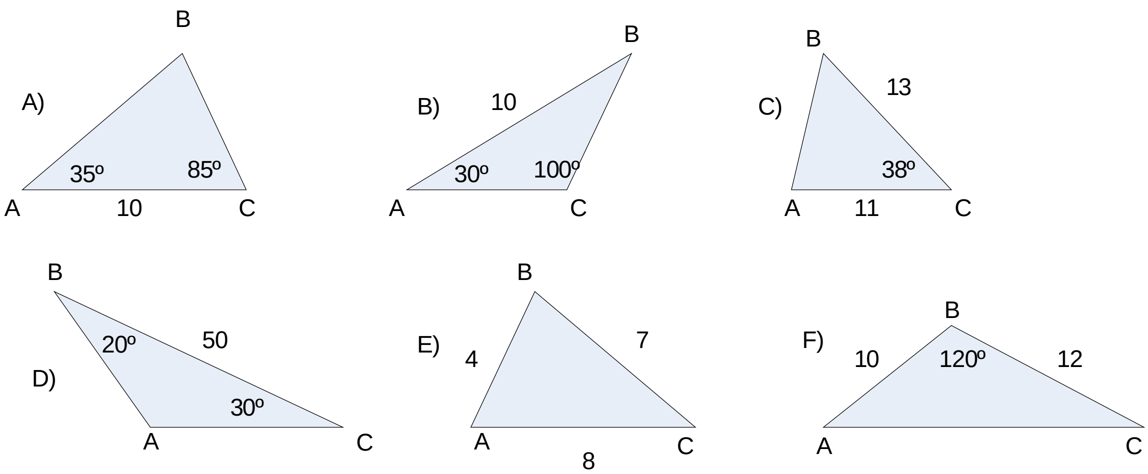
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$$

Sean a = 5 , b = 7 y c = 11 , realizando los cálculos resulta

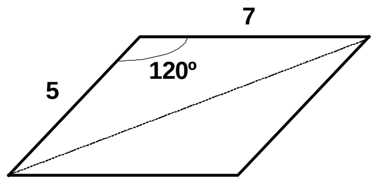
$$\cos A = \frac{49 + 121 - 25}{2.7.11} = \frac{145}{154} = 0,942$$
$$A = inv\cos(0,942) = 19,68^{\circ}$$
$$\cos B = \frac{25 + 121 - 49}{2.5.11} = \frac{97}{110} = 0,882$$
$$B = inv\cos(0,882) = 28,14^{\circ}$$
$$\cos C = \frac{25 + 49 - 121}{2.5.7} = \frac{-47}{70} = -0,671$$
$$C = inv\cos(-0,671) = 132,18^{\circ}$$

EJERCICIOS

1) Resolver los siguientes triángulos , aplicando la ley que resulte mas apropiada



2) Encuentre el valor de la diagonal del siguiente paralelogramo



3) Las longitudes de los lados de un terreno de forma triangular son 22m , 36m y 44m respectivamente. Determine los ángulos del terreno y el área del mismo.

4) Un barco navega en línea recta y en forma paralela a la costa. Desde dos puntos A y B situados en la costa y separados entre sí por 510m se miden los ángulos que forman las líneas que unen al barco con los puntos A y B con la línea de la costa. Si los valores de dichos ángulos son respectivamente 45º y 68º . Determine la distancia del barco a los puntos A y B y la distancia del barco a la costa. (Haga un diagrama).

5) Un topógrafo desea medir la distancia entre los puntos A y B ubicados en la orilla de un lago. Los datos que conoce son los que aparecen en la figura adjunta. Calcule la distancia de A a B.