II.2. NÚMEROS COMPLEJOS.

II.2. NÚMEROS COMPLEJOS

1. INTRODUCCIÓN.

Motivación. La no existencia, en el cuerpo de los números reales, de la raíz cuadrada de números negativos.

2. DEFINICIÓN.

Llamamos **número complejo** a un par ordenado de números reales: **z=(a,b)**, siendo a y b números reales. Es, pues, un elemento del conjunto RxR.

Son números complejos: (2,3), (-4,5), (-6,-7), ($\sqrt{8}$,9), etc.

El conjunto de los números complejos lo representaremos por **C**.

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Consideremos unos ejes cartesianos en el plano.

A cada número complejo z=(a,b) le asociamos un vector de origen el punto O(0,0) y extremo el punto P(a,b).

Recíprocamente, a cada vector de origen O(0,0) y extremo el punto P(a,b) le asociamos el número complejo z=(a,b).

Afijo de z es el punto P(a,b)

Al eje de absacisas OX se le suele llamar **eje real**, y al eje de ordenadas OY **eje imaginario**.

Ejercicios.

1. Supongamos dibujadas en el plano las bisectrices de los cuatro cuadrantes. Si se traza una circunferencia de centro el origen y radio 3, y se designan por A, B, C y D los puntos de corte de la misma con las bisectrices, ¿cuáles son los números complejos de afijos A, B, C y D?
Solución.

4. IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Sean los números complejos: z=(a,b) y z'=(c,d). Diremos que **z=z'** **a=c y b=d.**

De (2,a) = (b,6) a=6 y b=2.

5. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS.

A. SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS. PROPIEDADES.

Consideremos los números complejos: z=(a,b) y z'=(c,d).

Definimos: **z + z' = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)**

(2,3) + (5,6) = (2+5, 3+6) = (7,9).

Propiedades.

1. Asociativa. [(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)]
2. Conmutativa. (a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)
3. Existencia de elemento neutro. **(0,0)**
4. Existencia de elemento opuesto. **Opuesto de (a,b) = (-a,-b)**.
   Los números complejos (a,b) y (-a,-b) son simétricos respecto del origen.

(C, **+**) es un grupo abeliano.

Ejercicios.

1. Representa gráficamente la suma y la diferencia de dos números complejos..

B. PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS. PROPIEDADES.

Consideremos los números complejos: z=(a,b) y z'=(c,d).

Definimos: **z   z' = (a,b)   (c,d) = (ac-bd, ad+bc)**

(2,3)   (5,6) = (2 5-3 6, 2 6+3 5) = (-8,27)

Propiedades.

1. Asociativa. [(a,b)   (c,d)]   (e,f) = (a,b)   [(c,d)   (e,f)]
2. Conmutativa. (a,b)   (c,d) = (c,d)   (a,b)
3. Existencia de elemento neutro. **(1,0)**
4. Existencia de elemento inverso. **Inverso de (a,b) =** $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$
5. Distributiva. (a,b)   [(c,d)] + (e,f)] = (a,b)   (c,d) + (a,b)   (e,f)]

(C-{0}, **.**) es un grupo abeliano.

(C, **+**, **.**) tiene estructura de cuerpo abeliano.

Ejercicios.

1. Calcula el inverso de z=(3,4).

C. FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.

Los números complejos de la forma (a,0) son números **reales**: (a,0) = a

(0,1) = i se llama **unidad imaginaria**.

Los números complejos de la forma (0,b) son números **imaginarios puros**: (0,b) = bi

(a,b) = (a,0) + (0,b) = **a + bi** **(FORMA BINÓMICA)**

a parte real.
b parte imaginaria.

D. POTENCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Calculemos las potencias de la unidad imaginaria i.

$\mathbf{i^0 = 1}$ por convenio.

$\mathbf{i^1 = i}$

$\mathbf{i^2} = (0,1)(0,1) = (-1,0) = \mathbf{-1}$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

$\mathbf{i^3} = i^2\, i = (-1,0)(0,1) = (0,-1) = \mathbf{-i}$

$\mathbf{i^4} = i^2\, i^2 = (-1,0)(-1,0) = (1,0) = \mathbf{1}$

$i^5 = i^4\, i = (1,0)(0,1) = (0,1) = i$

....

$$\boxed{i^n = i^{\text{resto de } \frac{n}{4}}}$$

$i^{27} = i^3 = -i.$
$i^{38} = i^2 = -1.$

A partir de aquí ya podemos decir que:

$(a+bi)^n = ...$

$(a+bi)^2 =$ $\qquad\qquad$ $(a+bi)^3 =$

Ejercicios.

1. Calcula las siguientes potencias:
   a) $(2+i)^4$. b) $(1+i)^3$. c) $(i^5+i^8)^3$.
   Solución. a) -7+24i. b) c)

E. CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO.

Dado el número complejo z=a+bi, se define el **conjugado de z**, y se escribe $\overline{z}$, al número complejo $\overline{\mathbf{z}}$**=a-bi.**

Los números complejos z=a+bi y $\overline{\mathbf{z}}$*=a-bi son simétricos respecto del eje de abscisas.*

Si z=2+3i entonces $\overline{z}$=2-3i
Si z=4-5i entonces $\overline{z}$=4+5i
Si z=-6+7i entonces $\overline{z}$=-6-7i
Si z=-8-9i entonces $\overline{z}$=-8+9i

Propiedades

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. Es decir: El conjugado de una suma es la suma de los conjugados de los sumandos.

2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$. Es decir: El conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

3. $\overline{\overline{z}}=z$. Es decir: El conjugado del conjugado de z es z.

Ejercicios.

1. Consideremos el número complejo z=-2+3i. Calcula:
   a) Su opuesto. b) Su conjugado. c) El conjugado de su opuesto. d) El opuesto de su conjugado. ¿Qué relación existe entre estos dos últimos?
2. Siendo a=5-3i y b=-4+8i.
   a) Calcula: $\overline{a}$, $\overline{b}$, a+b, $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a+b}$.
   b) Comprueba que $\overline{a\cdot b}=\overline{a}\ \overline{b}$.
   c) Comprueba que $\overline{\overline{a}}$=a y $\overline{\overline{b}}$=b.

F. COCIENTE DE NÚMEROS COMPLEJOS.

$$\frac{3+4i}{5+2i}$$

Ejercicios.

1. Calcula las siguientes operaciones con números complejos:
   a) $(1+i)^2 : (4+i)$
   b) $(2+i) : (1+i)^2$
   Solución.
2. Calcula el valor de las siguientes expresiones:
   a) $\frac{i^7-i^{-7}}{2i}$. b) $\frac{i+(2-i)^4}{3+i^{-6}}$. c) $(i^5+i^{-12})^3$

G. RAÍZ CUADRADA DE NÚMEROS COMPLEJOS.

$\sqrt{a + bi} = x+yi$

De la definición de raíz: $(x+yi)^2 = a+bi$ $\{x^2-y^2=a,\ 2xy=b\}$ Las soluciones de este sistema son las raíces cuadradas de a+bi.

Calcula: $\sqrt{3 - 4i}$

Ejercicios.

1. Calcula las soluciones de la ecuación: $x^2+1=0$. . . . . Solución.
2. Calcula las soluciones de la ecuación: $x^2+4=0$. . . . . Solución.
3. Calcula las soluciones de la ecuación: $2x^2-4x+5=0$. . . . . Solución.
4. Cómo debe ser el número complejo **a+bi** para que su cuadrado sea:
   a) Imaginario puro. b) Un número real positivo. c) Un número real negativo.
   Solución. a) $a^2-b^2=0$. b) $b=0$. c) $a=0$.
5. El número complejo 3-2i es una raíz de una ecuación de segundo grado. ¿Cuál es la otra raíz? ¿De qué ecuación se trata? Solución. 3-2i, $x^2-6x+13$.

6. MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.

Un número complejo $z=(a,b)=a+bi$ queda determinado también mediante otros dos elementos que definimos a continuación.

Módulo del número complejo z, es el módulo del vector $\vec{OP}$.
Lo representaremos por: $m = |\vec{OP}| = |z|$

Argumento del número complejo z, es el ángulo que el eje positivo de abscisas forma con la semirrecta de origen O que contiene al afijo de z. No se define el argumento del número complejo (0,0).

A. FORMAS POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.

De la figura anterior se deduce:

$m^2 = a^2 + b^2$ $\quad \mathbf{m = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad \text{tag} \;\; = \frac{b}{a}$ $\quad \mathbf{= arctag \frac{b}{a}}$

Estas expresiones permiten calcular el módulo y el argumento de un número complejo z conocidas sus componentes cartesianas.

Así, el número complejo z=a+bi se puede escribir de la siguiente manera:

$$z = (m) \quad \textbf{FORMA POLAR}$$

Si z=1+i $m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $= \text{arctag}\frac{1}{1} = 45°$ $z=(\sqrt{2})_{45°}$.

Si $z=\sqrt{3}$-i $m = \sqrt{3+1} = 2$, $= \text{arctag}\frac{-1}{\sqrt{3}} = 330°$ $z=(2)_{330°}$.

Conocidos el módulo y el argumento se obtienen las componentes cartesianas recordando la definición de seno y coseno de un ángulo.

$\cos = \frac{a}{m}$ **a = mcos** $\quad$ $\text{sen} = \frac{b}{m}$ **b = msen**

Así, el número complejo z=(m) se puede escribir de la siguiente manera:

$$z = m(\cos + i\,\text{sen}) \quad \textbf{FORMA TRIGONOMÉTRICA}$$

Si $z=(2)_{30°}$ $z = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}30°) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3}+i$.

Las últimas relaciones nos dan las igualdades siguientes entre las diversas formas de escribir un número complejo z:

$$z = (a,b) = a+bi = (m) = m(\cos + i\,\text{sen})$$

Ejercicios.

1. Expresa en forma polar el número complejo z=2+2i. . . . . Solución. $(\sqrt{8})_{45°}$.
2. Expresa en forma binómica el número complejo $z=(4)_{60°}$. . . . . Solución. $2+2\sqrt{3}i$.
3. Escribe en todas sus formas el número complejo: $z = (3,-3\sqrt{3})$. . . . . Solución. $(6)_{300°}$.

B. PROPIEDADES DEL MÓDULO.

1. $|z|=0 \quad z=0$
2. $|-z|=|z|$
3. $|z|=|\bar{z}|$
4. $|z_1 z_2|=|z_1|\ |z_2|$
5. $|z_1+z_2| \quad |z_1|+|z_2|$
6. Si c R, $|c z|=|c|\ |z|$

Ejercicios.

1.

7. NÚMEROS COMPLEJOS IGUALES, CONJUGADOS Y OPUESTOS EN FORMA POLAR.

(m) y $(n)_{\text{ß}}$ son iguales {m=n y ß- =2k } (El mismo módulo. Sus argumentos se diferencian en un múltiplo de 2 radianes. Sus afijos coinciden)

(m) y $(n)_{\text{ß}}$ son conjugados {m=n y ß=- +2k } (El mismo módulo. Sus argumentos son opuestos. Sus afijos son simétricos respecto del eje de abscisas)

(m) y $(n)_{\text{ß}}$ son opuestos {m=n y ß=(+)+2k } (El mismo módulo. Sus argumentos se diferencian radianes. Sus afijos son simétricos respecto del origen de coordenadas)

Dado el número complejo: $(5)_{45^\circ}$. Su conjugado es $(5)_{315^\circ+2k}$. Su opuesto es $(5)_{225^\circ+2k}$.
Dado el número complejo: $(3)_{150^\circ}$. Su conjugado es $(3)_{210^\circ+2k}$. Su opuesto es $(3)_{330^\circ+2k}$.

Ejercicios.

1. Si (m) = a+bi, demuestra que:
   a) El conjugado de (m) es a-bi
   b) El opuesto de (m) es -a-bi

8. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR.

No se emplea la forma polar para sumar números complejos por resultar mucho más sencilla y rápida la forma binómica. Podemos hacer, sin embargo, la representación gráfica de la suma de dos números complejos dados en forma polar. Para hallar el módulo y el argumento de dicha suma se aplicarán los teoremas del coseno y de los senos, respectivamente.

Ejercicios.

1. Calcula $(3)_{30^\circ}$ + $(4)_{60^\circ}$. Comprueba el resultado realizando las operaciones también en forma binómica.

La forma polar de los números complejos resulta muy cómoda para calcular productos, cocientes, potencias, y sobre todo, raíces n-ésimas, como veremos a continuación.

A. PRODUCTO.

Si x=(m)   y z=$(n)_ß$ se verifica que: $\mathbf{x\ z = (m)\ \ (n)_ß = (m\ n)\ _{+ß}}$

Dem: Escribe los dos números complejos en forma trigonométrica y efectúa el producto.

Si $x=(6)_{60°}$ y $z=(2)_{30°}$ se verifica que: $x\ z = (6)_{60°}\ (2)_{30°} = (12)_{90°}$.

Ejercicios.

1. Halla el módulo y el argumento del número complejo: $z=(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)(\sqrt{3}-i)$.
Solución. $4\sqrt{2}$, 75°.
2. Expresa en forma polar el inverso del número complejo: z=(m) .
Solución. $z^{-1} = (m^{-1})_{\ }$.

B. COCIENTE.

Si x=(m)   y z=$(n)_ß$ se verifica que: $$\frac{x}{z} = \frac{(m)_\alpha}{(n)_ß} = \left(\frac{m}{n}\right)_{\alpha - ß}$$

Dem: Escribe los dos números complejos en forma trigonométrica y efectúa el cociente.

Si $x=(6)_{60°}$ y $z=(2)_{30°}$ se verifica que: $\frac{x}{z} = \frac{(6)_{60°}}{(2)_{30°}} = (3)_{30°}$.

Ejercicios.

1. Simplifica las siguientes expresiones, reduciéndolas a un único número complejo que se expresará en forma binómica:
a) $\dfrac{(2)_{15°}\,(4)_{35°}}{(8)_{170°}}$
b) $\dfrac{(1+i)\,(2)_{15°}}{(1-i)\,(2)_{-15°}}$
c) $\dfrac{5\,(\cos 25° + i\,\mathrm{sen}\,25°)}{3\,(\cos 63° + i\,\mathrm{sen}\,63°)\,(\cos 52° + i\,\mathrm{sen}\,52°)}$
Solución.

2. Si z=cos +isen , ¿cuál es el argumento de 1+z? Pon en forma polar este último nº complejo.
Solución.

C. POTENCIA. (FÓRMULA DE MOIVRE)

Si z=(m) se verifica que: $\mathbf{z^n = [(m)\ ]^n = (m^n)_n}$

Expresión que escrita en forma trigonométrica: **[m(cos +isen)]^n = m^n(cosn +isenn)** se denomina **FÓRMULA DE MOIVRE.**[1]

Dem: Obvia por la definición de potencia.

Si $z=(2)_{30°}$ se verifica que: $z^5 = [(2)_{30°}]^5 = (32)_{150°}$

Ejercicios.

1. Calcula en forma polar las potencias de i.
   Solución.

2. Calcula la cuarta potencia de $z=(4,4\sqrt{3})$.
   Solución. $|z|=8$, $=60°$ $z=(8)_{60°}$. $z^4=(4096)_{240°}=-4096-4096\sqrt{3}\,i$.

3. Calcula la potencia $(-1+i)^{30}$.
   Solución. $2^{15}i$.

4. Calcula las siguientes potencias:
   a) $(1-i)^8$. b) $(2+i)^{-4}$. c) $(1+i)^{20}$. d) $(-5-5i)^6$. e) $(2i+\frac{1}{i})^6$.

   Solución.

[1] Abraham de Moivre: Matemático francés, emigrado a Londres, expresó, por primera vez, en 1707, esta fórmula.

D. RAÍCES N-ÉSIMAS.

Si z=(m) . Pretendemos calcular $\sqrt[n]{(m)_\alpha} = (r)_ß$. Es decir, hay que calcular **r** y **ß**.

$\sqrt[n]{(m)_\alpha} = (r)_ß$ (m) $= [(r)_ß]^n = (r_n)^{nß}$. Igualdad de números complejos que exige que se cumplan dos condiciones:

1) $r^n = m$ $\mathbf{r = \sqrt[n]{m}}$

2) nß = +2k $\mathbf{ß = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}}$ para todo k Z

Si bien k puede tomar cualquier valor de Z, sin embargo, las soluciones realmente distintas son para k=0,1,2,3,...,n-1, pues los argumentos que se obtienen para k=n,n+1,... difieren de los anteriores en un número entero de vueltas completas, con lo que los complejos correspondientes son iguales.

Esto prueba que un número complejo tiene n raíces n-ésimas dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{(m)_\alpha} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad \textbf{(k=0,1,2,...,n-1)}$$

$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{(16)_{180°}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180° + 2k\pi}{4}}$ (k=0,1,2,3)

Para k=0 $(2)_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Para k=1 $(2)_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Para k=2 $(2)_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

Para k=3 $(2)_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ Los afijos de las raíces forman un polígono regular de 4 lados.

Ejercicios.

1. Calcula las raíces cúbicas de -8.
   Solución.

2. Calcula las raíces cúbicas de i.
   Solución. $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, -i.

9. RAÍCES N-ÉSIMAS DE LA UNIDAD.

Las raíces n-ésimas de la unidad son las soluciones de la ecuación: x^n-1=0.

$x^n-1=0 \qquad x^n=1 \qquad x=\sqrt[n]{1} \qquad x=\sqrt[n]{(1)_{0°}} \qquad x=\left(\sqrt[n]{1}\right)_{\frac{0°+2k\pi}{n}}$ (k=0,1,2,...,n-1)

Calculemos las raíces sextas de la unidad:

$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{(1)_{0°}} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{0°+2k\pi}{6}}$ (k=0,1,2,3,4,5)

Para k=0 $(1)_{0°} = 1$

Para k=1 $(1)_{60°} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Para k=2 $(1)_{120°} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Para k=3 $(1)_{180°} = -1$

Para k=4 $(1)_{240°} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Para k=5 $(1)_{300°} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ejercicios.

1. Un de las raíces cúbicas de un cierto número complejo es $(2)_{60°}$. Calcula las otras dos y el número complejo de que se trata.
   Solución.

A. EL GRUPO MULTIPLICATIVO DE LAS RAÍCES N-ÉSIMAS DE LA UNIDAD.

La representación gráfica de cada una de las raíces n-ésimas de la unidad es el vértice de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio 1.

Ejercicios.

1. Demuestra que el conjunto de las n raíces n-ésimas de la unidad con la operación de multiplicar es un grupo abeliano (cíclico).
   Solución.

10. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS.

11. EJERCICIOS.

1. Representa la curva $y=x^4+16$ y calcula todas las raíces de la ecuación $x^4+16=0$. Saca una conclusión en relación con la gráfica dibujada.
   Solución.

2. Las raíces de un cierto número complejo son los vértices de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio unidad. Uno de los vértices tiene argumento igual a $\frac{\pi}{6}$. Halla el radicando y la forma polar de todas las raíces.
   Solución.

3. Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1. Un vértice es (-1,0). Halla la ecuación cuyas raíces tienen por afijos los vértices de este hexágono.
   Solución.

4. Los afijos de las raíces de una ecuación de segundo grado son los puntos (1,0) y (2,1). Busca la ecuación de tercer grado cuyas raíces tengan estos afijos y el correspondiente al tercer vértice de un triángulo equilátero cuyos otros dos sean los puntos dados sabiendo que este triángulo está en el primer cuadrante.
   Solución.

5. Prueba que si las raíces de una ecuación son los vértices de un paralelogramo cuyo centro es el origen de coordenadas, la ecuación es bicuadrada.
   Solución.

6. Calcula el módulo, el argumento y el cociente de las raíces de la ecuación: $x^2-\sqrt{12}x+4=0$. Calcula también el séptimo término del desarrollo de la potencia duodécima de la raíz que tiene por afijo un punto del primer cuadrante.
   Solución.