9

Impulso y cantidad de movimiento

Hemos estudiado la segunda ley de Newton: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Pero aún nos quedan muchas preguntas relacionadas con fuerzas que no pueden contestarse aplicando directamente esta ley. Por ejemplo:

a) Si un camión de gran porte choca frontalmente con un auto, ¿qué determina hacia donde se mueven los restos después del choque?
b) Cuando uno juega al pool, ¿cómo decide la dirección que debe darle a la bola blanca, para meter la otra bola en la tronera?
c) Cuando un meteorito choca contra la Tierra, ¿cuánto de su energía cinética se libera en el impacto?

Algo que tienen en común todas estas preguntas es que implican fuerzas acerca de las cuales sabemos muy poco: las fuerzas que actúan entre el auto y el camión, entre dos bolas de billar o entre un meteorito y la Tierra. Lo curioso es que en esta clase veremos que no necesitamos saber nada acerca de estas fuerzas para contestar preguntas de este tipo.

Nuestro enfoque utiliza dos conceptos nuevos: el de impulso y el de cantidad de movimiento y una nueva ley de conservación: la conservación de la cantidad de movimiento.

A partir de la segunda ley de Newton, tomada como fórmula madre, pueden deducirse otras expresiones de gran utilidad al momento de resolver problemas. Una de esas deducciones ya la hemos hecho y obtuvimos el teorema del trabajo y la energía, un teorema que nos condujo al principio de la conservación de la energía mecánica. A continuación veremos otra importante deducción a partir de la segunda ley de Newton.

La cantidad de movimiento ($\vec{p}$)

Partiendo de la segunda ley de Newton: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ y dado que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, podemos poner: $\Sigma\vec{F} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$

Si la masa es constante, la podemos introducir dentro de la derivada:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Al producto m$\vec{v}$ lo llamamos *cantidad de movimiento* de la partícula y lo indicamos con el símbolo $\vec{p}$. Así que $\vec{p} = m\vec{v}$ y

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1)$$

Así, la segunda ley de Newton puede interpretarse ahora como:

La fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez con que cambia su cantidad de movimiento.

Nótese que $\vec{p}$ es una cantidad vectorial cuya dirección y sentido coincide con el de $\vec{v}$. De modo que un auto que viaja hacia el norte a 20 m/s y otro auto idéntico que viaja hacia el este a 20 m/s tienen el mismo $|\vec{p}|$pero diferentes $\vec{p}$ porque sus direcciones son distintas.

En el MKS la unidad de $\vec{p}$ es k.m/s

Impulso $(\vec{I})$.

Suponiendo que la fuerza neta que actúa sobre la partícula permanece constante, se define el impulso $(\vec{I})$ de dicha fuerza, como el producto entre dicha fuerza neta y el Δt durante el cual actúa sobre la partícula:

$$\vec{I} = \Sigma\vec{F}\Delta t \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\vec{I} = \overrightarrow{F_{neta}}(t_2 - t_1)} \qquad (2)$$

Nótese que $\vec{I}$ es una cantidad vectorial cuya dirección y sentido coincide con el de la $\overrightarrow{F_{neta}}$.

En el MKS la unidad de $\vec{I}$ = N.s. Si desarrollamos la expresión del Newton y operamos con sus unidades, veremos que N.s = kg.m/s con lo que el impulso y la cantidad de movimiento se expresan con las mismas unidades.

Teorema del impulso y la cantidad de movimiento.

Si la fuerza neta es constante, la ecuación (1) puede escribirse así:

$$\overrightarrow{F_{neta}} = \frac{\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}}{t_2 - t_1} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{F_{neta}} \cdot (t_2 - t_1) = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$

Y tomando en cuenta la ecuación (2): $\boxed{\vec{I} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}}$ (3)

La (3) es conocida como *Teorema del impulso y la cantidad de movimiento*, que se enuncia así:

El impulso de la fuerza neta sobre una partícula, es igual a la variación de la cantidad de movimiento que experimenta la partícula.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Sea un sistema de partículas cerrada, o sea libre de fuerzas externas. Si las partículas del sistema interactúan, las fuerzas mutuas obedecen al principio de acción y reacción y la $\Sigma F_{internas} = 0$.

Por lo tanto, en el sistema cerrado, la F_{neta} es nula, y si no hay F_{neta} no hay impulso. La ecuación (3) predice entonces que:

$$\boxed{\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2}}$$

En todo sistema cerrado, la cantidad de movimiento permanece constante.

Nótese que este principio se refiere a la cantidad de movimiento del sistema, **<u>no</u>** a la de cada partícula. Las fuerzas internas pueden cambiar las cantidades de movimiento individuales de cada partícula. Lo que no puede cambiar es la cantidad de movimiento total del sistema.

Este principio de conservación es válido aún en situaciones en las que las leyes de Newton son inadecuadas, tales como cuerpos que se mueven con una rapidez muy alta (cercana a la de la luz) u objetos muy pequeños (como las partículas subatómicas).

Finalmente, esquematizando:

En todo $\boxed{\begin{matrix} SISTEMA \\ CERRADO \end{matrix}}$ ⟵⟶SE CUMPLE EL ⟵⟶ $\boxed{\begin{matrix} PPIO.DE\ CONSERVACIÓN \\ DE\ LA\ CANT.DE\ MOVIM. \end{matrix}}$

Este principio, es el segundo de los grandes principios de conservación que hasta ahora hemos estudiado. En la Física, los principios de conservación son de importancia teórica y práctica, ya que son sencillos y universales; todos ellos tienen formas semejantes: en un sistema que está cambiando, existe algún aspecto que permanece inalterado.

Si comparamos los dos principios de conservación estudiados, vemos que para que el cumpla el de la conservación de la Em, es necesario que se reúnan simultáneamente dos condiciones (que el sistema sea cerrado y que las fuerzas sean conservativas), mientras que para que se cumpla el de la conservación de la cantidad de movimiento, se requiere de una sola condición (que el sistema sea cerrado). Al ser este último principio de conservación menos exigente que el primero, sus oportunidades de aplicación en la práctica son más numerosas, por lo que lo convierte de hecho en un principio más importante que el de la conservación de la energía mecánica.

Comparación de cant. de movim. con energía cinética.

El teorema del impulso y de la cantidad de movimiento:

$\overrightarrow{F_{neta}}.\,(t_2 - t_1) = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$ dice que la variación de la cantidad de movimiento de una partícula depende de la fuerza neta y del tiempo durante el cual ella actúa.

El teorema del trabajo y la energía: $W_{F\ neta} = Ec_2 - Ec_1$ dice que la variación de la energía cinética de una partícula depende de la fuerza neta y del desplazamiento necesario para acelerar la partícula.

Veamos un ejemplo. Hay dos pelotas en movimiento; la "1" con $m_1 = 0{,}5$ kg y $v_1 = 4$ m/s y la "2" con $m_2 = 0{,}1$ kg y $v_2 = 20$ m/s. ¿Cuál es más fácil de atajar?

Solución -Cálculo de sus cantidades de movimiento:

$P_1 = m_1 v_1 = 0{,}5 \text{ kg } 4 \text{ m/s} = 2 \text{ kg m/s}$

$P_2 = m_2 v_2 = 0{,}1 \text{ kg } 20 \text{ m/s} = 2 \text{ kg m/s}$

Ambas pelotas tienen la misma cantidad de movimiento: $p_1 = p_2$

-Cálculo de sus energías cinéticas:

$Ec_1 = ½\, m_1 v_1^2 = ½\, 0{,}5 \text{ kg } (4 \text{ m/s})^2 = 4 \text{ J}$

$Ec_2 = ½\, m_2 v_2^2 = ½\, 0{,}1 \text{ kg } (20 \text{ m/s})^2 = 20 \text{ J}$

Las Ec son diferentes; la pelota más grande es más lenta.

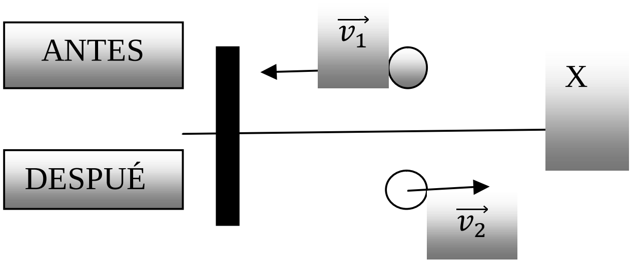
-Conclusiones: Por ser $p_1 = p_2$, ambas requieren el mismo impulso para detenerlas. Pero detener la bola más pequeña requiere un trabajo 5 veces mayor que detener a la más grande. En definitiva, si las atajamos con la mano, tardaremos el mismo tiempo en detener cualquiera de las pelotas, pero nuestra mano será empujada una distancia 5 veces mayor hacia atrás, si decidimos atajar la pelota más pequeña. Así que nos conviene atajar la pelota más grande.

Ejercicios.

1-Se lanza horizontalmente contra una pared vertical una pelota de 0,4 kg; su rapidez antes de chocar es de 30 m/s y rebota con una rapidez de 20 m/s. El tiempo de contacto con la pared ha sido de 0,01 s. Calcular: a) las cantidades de movimiento de la pelota antes y después del choque; b) la fuerza media ejercida por la pared contra la pelota.

<u>Solución:</u>

Lo primero que se debe hacer es un bosquejo del problema; luego, adoptar un eje de referencia. Finalmente calcular.



a) $p_1 = m_1v_1 = -12$ kg m/s

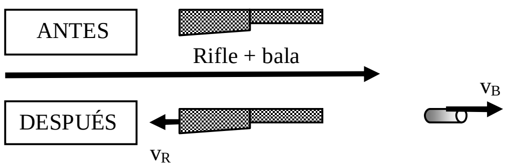
$p_2 = m_2v_2 = +8$ kg m/s

$I = p_2 – p_1 = +20$ Ns

b) $F_{media} = \frac{I}{\Delta t} = 2000$ N

2- Un tirador sostiene holgadamente un rifle de $m_R = 3$ kg de manera que pueda retroceder libremente en el momento de hacer el disparo. Dispara horizontalmente contra un blanco, una bala de $m_B = 5$ kg con $v_B = 300$ m/s. Calcular a) la velocidad de retroceso del rifle; b) la cantidad de movimiento y la energía cinética de la bala; c) Ídem del rifle.

<u>Solución:</u>



a) $p = 0 = m_Rv_R + m_Bv_B$

$v_R = -v_B \frac{m_B}{m_R} = - \frac{0,005}{3} 300 = -0,5$ m/s

b) $p_B = m_Bv_B = 0,005 \times 300 = 1,5$ kg m/s

$Ec_B = ½\, m_Bv_B^2 = ½\, (0,005)(300)^2 = 225$ J

c) $p_R = m_Rv_R = 3\,(-0,5) = -1,5$ kg m/s

$Ec_R = ½\, m_Rv_R^2 = ½\, (3)(-0,5)^2 = 0,375$ J

3- Un padre y su hijo están parados en una pista horizontal de hielo, sin fricción. Sus masas valen 80 kg y 40 kg respectivamente. Se empujan mutuamente y el padre se aleja con $v_P = 0,5$ m/s. a) ¿Cuáles principios de conservación se cumplen? b) ¿Con cuánta velocidad se moverá el niño?

Solución:

a) El padre y su hijo forman un sistema cerrado porque las únicas fuerzas externas: P y N se cancelan entre sí. Como fuerzas internas tenemos las de empuje mutuo, que no son conservativas. Por lo tanto se cumple el principio de conservación de la cantidad de movimiento, pero no el de la energía.

b) p (antes) = p (después) $\rightarrow$ $0 = m_P v_P - m_H v_H$ $\rightarrow$ $v_H = v_P \frac{m_P}{m_H} = 0{,}5 \frac{80}{40} = 1$ m/s

Em (antes) = 0

Em (después) = $\frac{1}{2} [m_P v_P^2 + m_H v_H^2] = 30$ J

10
Choque

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento encuentra su aplicación más valiosa en el estudio del choque.

Se llama CHOQUE al fenómenos físico que tiene lugar cuando dos cuerpos se encuentran (e impactan) a consecuencia de su movimiento relativo.

Para estudiar este fenómeno, lo primero que debe hacerse es definir el sistema que va a ser motivo de estudio; se estudiará únicamente el caso de tener un sistema aislado, o sea que no intercambia fuerzas con el mundo externo: por lo tanto el impulso sobre el sistema es nulo y se cumple el principio de la conservación de la cantidad de movimiento. Este principio establece que la cantidad de movimiento del sistema antes del choque es igual a la cantidad de movimiento del sistema después del choque. Nótese que este principio se aplica al sistema y NO a cada cuerpo en particular.

Además, la conservación de la cantidad de movimiento es una premisa válida para cualquier tipo de choque.

Características del proceso de choque	1- Tiene una duración sumamente breve.
	2- Se producen grandes cambios de velocidad.
	3- Se producen cambios de forma.
	4- Como consecuencia de 1) y 2), va acompañado de aceleraciones elevadas.
	5- Como consecuencia de 4), intervienen fuerzas muy grandes.

Clasificación de los choques.

Hay varias maneras de clasificar los choques, según el aspecto desde el cual se los observe.

Por las características del movimiento antes del choque. (Condic. Geométricas).	CUOQUE CENTRAL: Tiene lugar cuando la recta m que une a ambos centros de masa, es perpendicular al plano tangente a la superficie de los cuerpos en el punto inicial de contacto. Como un caso particular dentro del choque central está el: CHOQUE NORMAL: que ocurre si $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ están contenidos en la recta m citada.
	CHOQUE EXCÉNTRICO: (No se estudia).

La figura de la página siguiente ilustra el caso de los choques central normal y central no normal.

Otra forma de clasificar los choques se basa en las condiciones elásticas de los materiales. En esta clasificación hay tres posibilidades:

CHOQUE PERFECTAMENTE ELÁSTICO: Cuando se recuperan totalmente tanto las formas como las dimensiones. La energía cinética se conserva.

CHOQUE PERFECTAMENTE PLÁSTICO: Cuando no hay absolutamente ninguna recuperación. No hay fuerzas de restitución, por lo que las deformaciones se conservan en su totalidad.

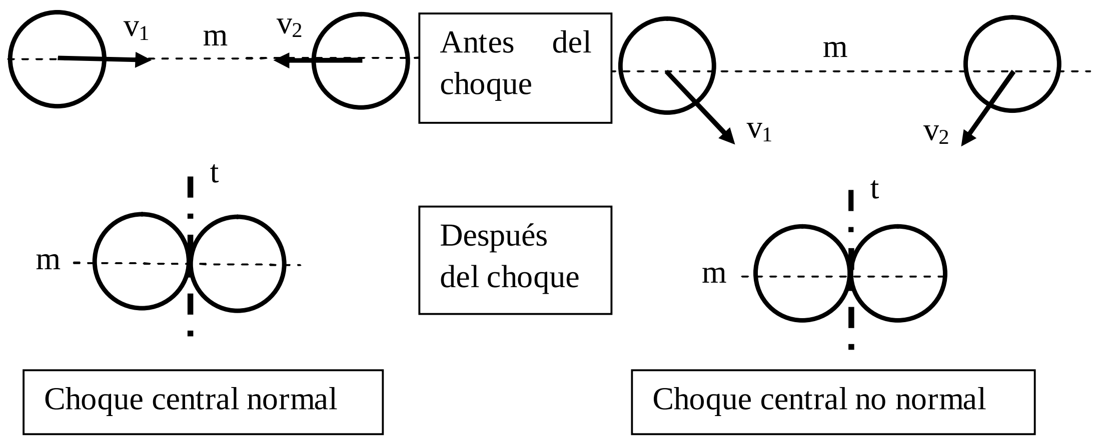
CHOQUE SEMIELÁSTICO: Es un caso intermedio entre los anteriores. Son los verdaderos choques reales.

También se suele clasificar a los choques en base al número de dimensiones en que tienen lugar: unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales.

Velocidad relativa:

En el estudio del choque, lo que cuenta es la velocidad relativa. Si los cuerpos que van a chocar son los 1 y 2, que se mueven con velocidades absolutas v_1 y v_2, la velocidad relativa v, si el choque es unidimensional, se define como:

$$v = v_1 - v_2 \quad \text{(o al revés)}$$



Energía en el choque.

Antes del choque los cuerpos poseen una determinada cantidad de energía, en forma de energía cinética. Durante el proceso de choque generalmente, el sistema pierde una parte de esa energía. Los principales destinos para esa energía que se pierde son:

1- la ejecución de trabajos de deformación.

2- en aumentos locales de la temperatura por la fricción, que terminan con una entrega de calor al medio ambiente.

3- en la generación y propagación de ondas de ruido.

De manera que: $Ec_{\text{después}} < Ec_{\text{antes}}$

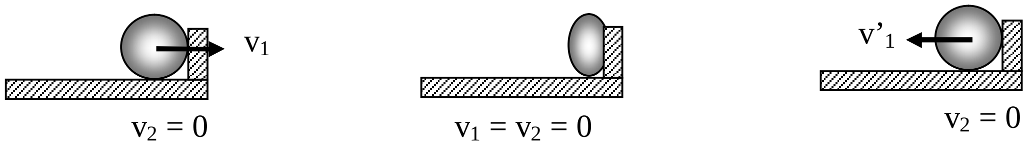
Existe una clase extrema de choque, donde $Ec_{\text{después}} = Ec_{\text{antes}}$. Es el choque perfectamente elástico; es la clase de choques que tienen lugar entre las moléculas de un gas.

Planteo matemático del choque.

En todo choque es posible distinguir siempre dos etapas. La primera comienza con el primer contacto entre ambos cuerpos y le siguen deformaciones crecientes en ellos; esta etapa concluye cuando tales deformaciones alcanzan su máximo. Las fuerzas que intervienen en esta etapa se llaman *fuerzas de interacción*. Ellas son fuerzas internas al sistema constituido por los dos cuerpos que chocan, y por lo tanto la cantidad de movimiento permanece constante.

La segunda etapa comienza cuando los cuerpos alcanzan su máxima deformación (velocidad relativa nula); las fuerzas que intervienen en esta etapa se llaman fuerzas recuperadoras y tienden a eliminar o al menos reducir las deformaciones producidas en los cuerpos.

El esquema que sigue ilustra estas etapas para el caso de una bola (cuerpo 1) que choca contra una pared fija (cuerpo 2); se dan las velocidades relativas entre ambos en cada momento. Se utiliza una prima para los valores después del choque. Se calculan los impulsos de cada etapa (frenante y de restitución respectivamente) y finalmente se llega a la expresión del coeficiente de restitución k como cociente entre ambos impulsos.



PRIMERA ETAPA		SEGUNDA ETAPA
1° CONTACTO	MÁXIMA DEFORMACIÓN	ÚLTIMO CONTACTO
Comienza la 1° etapa	Finaliza la 1° etapa Comienza la 2° etapa	Finaliza la 2° etapa
$v_{rel} = v_1 - v_2 = v_1$	$v_{rel} = v_1 - v_2 = 0$	$v_{rel} = v'_1 - v'_2 = v'_1$

I = Impulso frenante

$I = m(Vrel_{final} - Vrel_{inic})$

$I = m(0 - v_1) = -m \cdot v_1$

I' = Impulso de restitución.

$I' = m(Vrel_{final} - Vrel_{inic})$

$I' = m(v'_1 - 0) = +m \cdot v'_1$

Coeficiente de restitución k:

$$k = \frac{I'}{I} = \frac{Impulso\ de\ restitución}{Impulso\ frenante} = -\frac{v'_1}{v_1}$$

En esta deducción se ha considerado el caso particular de un choque contra una pared inmóvil, por una cuestión de sencillez. Pero si ambos cuerpos se mueven, las velocidades relativas serían:

ANTES:	$v = v_1 - v_2$	→	$I = -m(v_1 - v_2)$
DESPUÉS:	$v'_1 - v'_2$	→	$I' = m(v'_1 - v'_2)$

…con lo que la expresión del coeficiente de restitución k para un caso general es:

$$k = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \qquad (1)$$

El coeficiente de restitución expresa la razón entre la velocidad relativa después del choque cambiada de signo y la velocidad relativa antes del choque.

k tiene valores comprendidos entre 0 y 1; estos valores extremos corresponden respectivamente a los casos de choques perfectamente plástico y elástico. Los valores del intervalo: $0 < k < 1$ corresponden a los choques semielásticos.

Choque unidimensional, central y normal.

Veremos cómo se plantea un problema de choque. Lo más común es que los datos tengan que ver con las condiciones iniciales del choque, y las incógnitas sean las finales. Si ese fuera el caso, tendremos:

DATOS: v_1 v_2 k m_1 m_2

INCÓGNITAS: v'_1 v'_2

SOLUCIÓN: Habitualmente las incógnitas son 2. Para poder resolverlo será necesario planteas un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Una de ellas será la que corresponde al principio de la conservación de la cantidad de movimiento entre antes y después del choque. Ésta será una ecuación válida siempre, en cualquier choque:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \qquad (2)$$

La otra ecuación a plantear es la (1)

$$k = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \qquad (1)$$

Ejercicio 1.

Se deja caer al piso una esfera desde 2 m de altura. Si k = 0,8, determinar la altura alcanzada después del choque.

Solución: Como el piso no se mueve, estamos en el caso particular en que $k = -\frac{v'}{v}$

Deberemos calcular previamente las expresiones de v y de v'. La primera es la velocidad final de una caída libre desde 2m de altura y que comenzó con velocidad inicial nula. Por la cinemática es: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

La segunda (v') es la velocidad inicial de un tiro vertical que se elevará hasta una altura final h': $v' = \sqrt{2 \cdot g \cdot h'}$

Finalmente: $k = -\frac{v'}{v} = -\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h'}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = -\sqrt{\frac{h'}{h}}$

Elevando al cuadrado: $k^2 = \frac{h'}{h}$ → $h' = h \cdot k^2 = 2\ \text{m} \cdot (0,8)^2 = 1,28\ \text{m}$

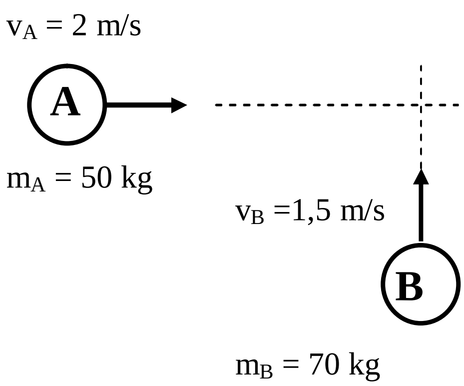
Choque en dos dimensiones.

Si el choque tiene lugar en dos dimensiones, la solución es muy fácil. Tan solo hay que proyectarlo en las dos direcciones cartesianas y tratarlo como dos choques unidimensionales. Veamos un par de ejemplos:

Ejercicio 2.

Dos patinadores sobre hielo se acercan uno al otro en ángulo recto. El patinador A tiene una masa de 50 kg y viaja en dirección y sentido +x a 2 m/s. El B tiene una masa de 70 kg y se mueve según +y a 1,5 m/s. Chocan y quedan unidos. Calcular a) la velocidad final de ambos; b) la pérdida de energía cinética habida en el choque.

<u>Solución</u>:



a) En x] $m_A v_A = (m_A + m_B)v_x$

En y] $m_B v_B = (m_A + m_B)v_y$

$$v_x = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{50 \cdot 2}{120} = 0{,}830 \text{ m/s}$$

$$v_x = \frac{m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{70 \cdot 1{,}5}{120} = 0{,}875 \text{ m/s}$$

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0{,}7656 + 0{,}694} = 1{,}21 \text{ m/s}$$

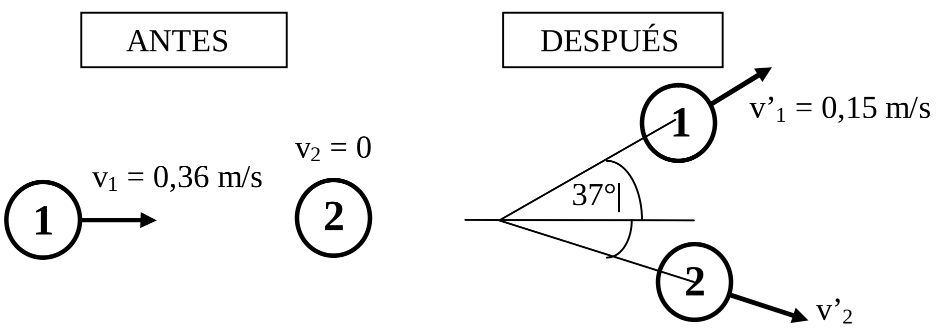
b) $Ec_f = ½\, m v_f^2 = {}^1/_2 \bullet 120 \bullet (1{,}21)^2 = 87{,}60$ J

$Ec_0 = ½\, [m_A v_A^2 + m_B v_B^2] = ½\, [50 \bullet 4 + 70 \bullet 2{,}25] = 178{,}75$ J

$\Delta Ec = Ec_f - Ec_0 = (87{,}60 - 178{,}75)$ J $= -91{,}15$ J

Ejercicio 3.

Una bola de billar se mueve con v = 0,36 m/s y choca con otra igual que se encuentra en reposo. Después del choque, la primera rebota con velocidad de 0,15 m/s, formando un ángulo de 37° con la dirección que traía antes del choque. Determinar la velocidad con que sale la otra bola. ¿Hubo pérdida de energía cinética en el choque?



Solución: a) $v'_{1x} = v'_1 \cdot \cos 37° = 0{,}12$ m/s

$v'_{1y} = v'_1 \cdot \text{sen } 37° = 0{,}09$ m/s

En x] $m_1 v_1 = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x}$ → $v'_{2x} = 0{,}24$ m/s

En y] $0 = m_1 \cdot v'_{1y} + m_2 \cdot v'_{2y}$ → $v'_{2y} = -0{,}09$ m/s

Finalmente: $v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}} = 0{,}256 \frac{m}{s}$

$$\theta_{2f} = \text{arc tg} \frac{-0{,}09}{0{,}24} = -20° = 340°$$

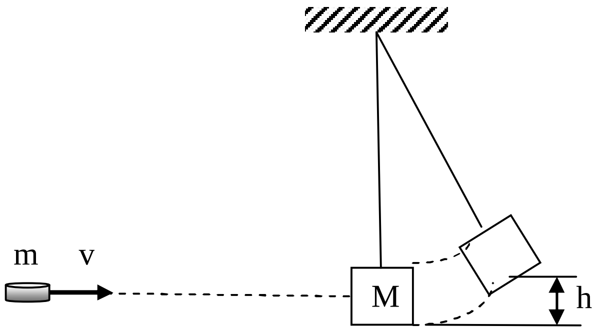
b) $Ec_f = ½ \, m \, [v'^2_1 + v'^2_2] = 0{,}044 \cdot m$ J

$Ec_0 = ½ \, m \cdot v_1^2 = 0{,}65 \cdot m$ J

$\Delta Ec = -0{,}6 \cdot m$ J

El péndulo balístico.

El tema del choque encuentra su principal aplicación práctica en el péndulo balístico, que se utiliza para medir la velocidad de una bala; consta de un gran bloque de madera de masa M que cuelga sostenido por un par de cuerdas. Se elige el tipo de madera de modo que la bala, que se mueve horizontalmente, quede incrustada en él.



Se procura que el período de oscilación del péndulo resulte muy grande con respecto al tiempo que tarda la bala en quedar incrustada. De esta manera el péndulo empieza a moverse inmediatamente después que la bala queda ahogada en la madera y puede considerarse que se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento.

La cantidad de movimiento antes del choque es la cantidad de movimiento de la bala: m•v. La cantidad de movimiento del sistema inmediatamente después del choque es: (M + m)•v'.

Como se trata de vectores de igual dirección, podemos escribir la ecuación en forma escalar:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot v'$$

Después del impacto, el péndulo entra en oscilación y deben medirse, con buena aproximación, la altura máxima alcanzada en la primera oscilación. La energía cinética del bloque, con la bala incrustada, se habrá transformado en energía potencial, y por el principio de la conservación de la energía mecánica, podrá ponerse:

$$\frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot v'^2 = (M + m) \cdot g \cdot h$$

de donde v' = $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ Finalmente es:

$$v = \left[\frac{M+m}{m}\right] \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad (3)$$

Ejemplo:

Una bala de 10 g choca, moviéndose horizontalmente, con un péndulo balístico de M = 2 kg. En la primera oscilación el péndulo se eleva verticalmente 16 cm. Calcular la velocidad de la bala sabiendo que quedó ahogada en el péndulo.

Solución:

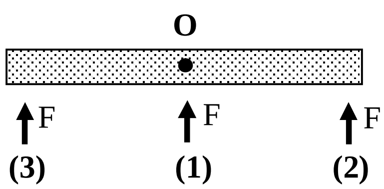
Reemplazando en la fórmula (3): $v = \left[\frac{(2+0{,}01)}{0{,}01}\right] \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}16} = 356\ \frac{m}{s}$

11

Sistemas de partículas

Existen en la naturaleza sólo dos formas posibles de movimiento: la traslación y la rotación. La primera ocurre cuando la partícula sigue una trayectoria rectilínea, mientras que en la segunda describe trayectorias circunferenciales alrededor de un punto.

Nosotros, que ya hemos estudiado la dinámica de la traslación, sabemos que la causa de tales movimientos, son las fuerzas. Pero, ¿cuáles son las causas del movimiento de rotación? Evidentemente no serán las fuerzas, ya que no podemos atribuirle a una misma causa dos efectos diferentes. Así que nos ocuparemos de descubrir cuál es la causa que provoca un movimiento de rotación.



Supongamos tener una varilla homogénea que puede girar alrededor de un eje que pasa por el punto O. Si le aplicamos una fuerza a la varilla, podrán suceder tres cosas diferentes, según dónde se aplique dicha fuerza:

1- Si la recta de acción de la fuerza pasa por O, la varilla permanecerá inmóvil.

2- Si aplicamos la fuerza a la derecha de O, la varilla girará en un cierto sentido.

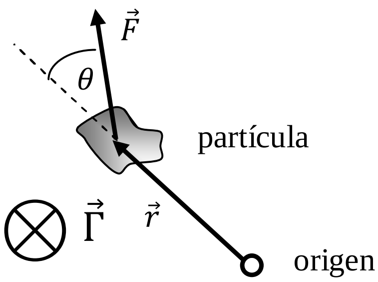
3- Si la aplicamos a la izquierda, la varilla girará en sentido contrario.

El efecto de rotación producido se llama *momento de una fuerza* o *torca*, y su valor depende de la combinación de dos factores: el vector fuerza $\vec{F}$ y el vector posición $\vec{r}$. El vector $\vec{r}$ tiene su origen en el origen de nuestro sistema de referencia, origen que ubicaremos en O, donde está el eje de rotación, y su extremo está en contacto con la fuerza. Como se ve, para producir un momento (o torca), la fuerza es necesaria, pero no es suficiente.

Indicaremos al vector torca con la letra gamma mayúscula del alfabeto griego (Γ) y matemáticamente está expresado por el producto vectorial:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Recordar que en un producto vectorial, el orden de los factores es importante; aquí, $\vec{r}$ siempre va adelante y $\vec{F}$ atrás. Debe ser así para que cuando se aplique la regla práctica de los sentidos de los vectores, el sentido de $\vec{\Gamma}$ concuerde con la realidad física.



El desarrollo escalar de este producto vectorial es:

$$|\Gamma| = |r| \cdot |F| \cdot sen\,\theta$$

En el ejemplo de la figura, la dirección del vector $\vec{\Gamma}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$ y su sentido es entrante.

Teorema de Varignon.

Sea un sistema de *i* fuerzas $\vec{F_\iota}$ de las cuales $\vec{R}$ es su resultante. Este teorema expresa que:

La torca resultante de un sistema de fuerzas, es igual a la suma vectorial de las torcas producidas por cada una de las fuerzas componentes, consideradas todas con respecto a un mismo punto.

Es decir que si $\vec{R} = \Sigma \vec{F_\iota}$, entonces, $\overrightarrow{\Gamma_R^{(O)}} = \Sigma\, \overrightarrow{\Gamma_\iota^{(O)}}$

Nosotros únicamente estudiaremos el caso de sistemas de fuerzas coplanares, es decir que están contenidas todas en un mismo plano. Para este caso particular, resultará que todos los vectores $\overrightarrow{\Gamma_\iota^{(O)}}$ tendrán la misma dirección: la de la perpendicular al plano que contiene a las fuerzas. Siendo así, la $\Sigma\, \overrightarrow{\Gamma_\iota^{(O)}}$ podría efectuarse escalarmente. Eso sí: al desarrollar la sumatoria, habrá que asignarle a cada término un signo (+ ó -) según sea el sentido de la rotación correspondiente. Para la asignación de signos se adoptará una convención arbitraria.

Sistemas de partículas.

Recordar que llamamos *partícula* a un cuerpo ideal que si bien tiene las dimensiones de un punto geométrico (es decir que carece de dimensiones), no por ello carece de masa.

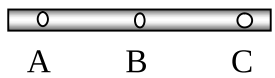
Hemos comenzado este curso estudiando el caso de tener una partícula única; en realidad no hubo mucho para decir sobre ella, porque lo verdaderamente valioso aparece cuando esa partícula interactúa con otra. Conceptos tales como los de fuerzas, energía, cinemática, dinámica, choque, etc requieren como mínimo de un sistema de dos partículas. Así fue cómo incorporamos una segunda partícula. Dentro de pocas clases comenzaremos a estudiar al sólido, que no es otra cosa que la reunión compacta de muchísimas partículas. Como una transición en este camino, estudiaremos ahora los llamados sistemas de partículas.

Un sistema de partículas es un conjunto *finito* de partículas, separadas entre sí y distribuidas en el espacio.

Se estudiarán algunas propiedades de estos sistemas y se introducirán algunos conceptos nuevos que más adelante, al estudiar al sólido, resultarán de gran utilidad.

Centro de masa.

El primer concepto importante a presentar es el de centro de masa. Suponga que tenemos una varilla homogénea como la de la figura; la varilla está suelta. Si le aplicamos una fuerza vertical hacia arriba en A, el cuerpo subirá realizando una traslación combinada con una rotación en el sentido de las agujas del reloj. Si aplicamos la fuerza en C, subirá combinando una traslación con una rotación que, a diferencia del caso anterior, tendrá sentido antihorario. Esto nos lleva a pensar que entre A y C deberá existir algún punto donde al aplicar la fuerza, el cuerpo suba sin rotar, o sea con traslación pura. Cuando encontremos ese lugar, habremos encontrado el centro de masa. Y ésta es una propiedad importante del centro de masa:



Si se aplica una fuerza en el centro de masa de un cuerpo o un sistema de partículas, éste adquirirá un movimiento de traslación pura.

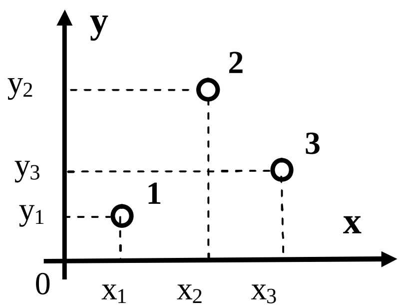
Definición:

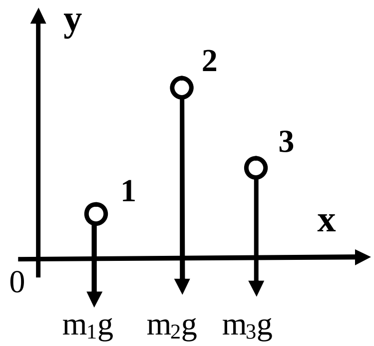
Centro de masa es una posición media, ponderada por la masa de las partículas.

Si el cuerpo es homogéneo, el centro de masa se encuentra en su centro geométrico. Cuando el cuerpo tiene un eje de simetría, como una polea, el centro de masa está sobre dicho eje. No necesariamente el centro de masa debe estar dentro del cuerpo. El centro de masa de una arandela es un punto de su eje de simetría, pero no está dentro de la masa de la arandela misma.

Determinación de las coordenadas del centro de masa.

Sea un sistema de tres partículas, como se muestra en la figura de abajo a la izquierda, y se desea determinar las coordenadas del centro de masa (c.m.). Se adopta un sistema cartesiano de referencia. Los datos son los valores de las masas de las tres partículas y sus respectivas coordenadas x;y. Cada partícula tiene un peso: P = mg. En la figura de la derecha se representan las fuerzas peso de cada partícula.





Aplicando el teorema de Varignon, y tomando como centro de momentos al origen del sistema cartesiano, podemos poner en general:

$$m_1 \cdot g \cdot x_1 + m_2 \cdot g \cdot x_2 + \ldots + m_i \cdot g \cdot x_i = M \cdot g \cdot x_{cm}$$

donde la M representa a la masa total del sistema de partículas: $M = \Sigma m_i$.

g se simplifica y x_{cm} se despeja:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_i \cdot x_i}{M} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M}$$

Para hallar y_{cm} se puede imaginar que giramos 90º las figuras con lo que los pesos toman la dirección del eje x, y razonando de manera similar se obtiene:

$$y_{cm} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \ldots + m_i \cdot y_i}{M} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M}$$

Las expresiones $\Sigma m_i \cdot x_i$, $\Sigma m_i \cdot y_i$, etc se conocen con el nombre de *momentos estáticos* o *de primer orden* del sistema de masas.

Si las masas están distribuidas en el espacio, habrá una tercera expresión para hallar z_{cm}, similar a las anteriores.

Ejercicios.

1- Se tiene un sistema de partículas constituido por tres masas ubicadas en las siguientes coordenadas: $m_1(2;3)$ $m_2(0;0)$ $m_3(4;1)$ en metros.

Sabiendo que $m_2 = 3\cdot m_1$ y $m_3 = 2\cdot m_1$, hallar las coordenadas del centro de masa.

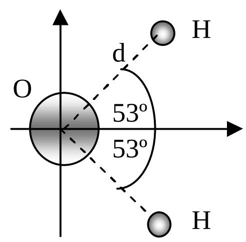
Solución:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_1 + 3\cdot m_1 \cdot x_2 + 2\cdot m_1 \cdot x_3}{6\cdot m_1} = 1{,}666...m$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 \cdot y_1 + 3\cdot m_1 \cdot y_2 + 2\cdot y_3}{6\cdot m_1} = 0{,}8333...m$$

Luego: c.m. (1,66m; 0,83m)

2- La figura muestra una molécula de agua, donde la distancia d de los enlaces O-H vale 10^{-10} m. Sabiendo que la relación entre las masas de los átomos de oxígeno e hidrógeno es de 16 a 1, ¿dónde está el centro de masa de la molécula?



Solución:

La enseñanza que deja este problema es que cuando hay un eje de simetría, no sólo geométrica, sino también de masas, el centro de masa pertenece a dicho eje de simetría. Por ello, en estos casos conviene adoptar un sistema de referencia tal que uno de sus ejes coincida con el eje de simetría, con lo cual sólo hará falta calcular una sola coordenada porque la otra valdrá cero. Por otra parte, convendrá ubicar el origen del sistema en el átomo de oxígeno, lo que ahorrará el cálculo de un término, en la fórmula de x_{cm}.

La abscisa de los átomos de hidrógeno es: $x_H = 10^{-10}$ m·cos 53º = $6x10^{-11}$ m.

$$x_{cm} = \frac{2\cdot[m_H \cdot x_H]}{2\cdot m_H + m_O} = \frac{2\cdot[1\cdot 6x10^{-11}\, m]}{18} = 6{,}6x10^{-12}\, m$$

Propiedades del centro de masa.

Las propiedades que daremos a continuación, nos enseñan que para estudiar el movimiento de un sistema de partículas no es necesario considerar los movimientos individuales de cada partícula, que son generalmente complicados, o se carece de la información necesaria para poder hacerlo. Simplemente basta con estudiar el movimiento que sigue el centro de masa del sistema, como si en él se reuniera en una sola partícula puntual, la totalidad de la masa del sistema.

Por sencillez, en lo que sigue plantearemos el caso de un sistema constituido tan solo por dos partículas, para que en las ecuaciones de cálculo de las coordenadas del centro de masa se tenga el menor número de términos posible. Por otra parte, al tener sólo 2 partículas, se cuenta con otra ventaja adicional: el sistema es unidimensional y bastará con plantear la ecuación de una única coordenada. Haremos:

$$M \cdot x_{cm} = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 \qquad (1)$$

1- VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA

Si se deriva la (1): $$M \cdot \left(\frac{dx_{cm}}{dt} \right) = m_1 \cdot \left(\frac{dx_1}{dt} \right) + m_2 \cdot \left(\frac{dx_2}{dt} \right)$$

$$M \cdot v_{cm} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \qquad (2)$$

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = \sum \vec{p}_i$$

La masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa, es igual a la cantidad de movimiento del sistema de partículas.

Esta primera propiedad nos enseña que para hallar la cantidad de movimiento total del sistema, no es necesario hallar las cantidades de movimiento de cada una de sus partículas.

2- ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA.

Si se deriva la (2): $$M \cdot \left(\frac{dv_{cm}}{dt} \right) = m_1 \cdot \left(\frac{dv_1}{dt} \right) + m_2 \cdot \left(\frac{dv_2}{dt} \right)$$

$$M \cdot a_{cm} = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2$$

$$\Sigma F_x = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2$$

Igualando los primeros miembros de las dos últimas igualdades:

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \qquad (3)$$

En la (3) el primer miembro representa la fuerza resultante que actúa sobre el sistema, que no es otra cosa que la fuerza externa total. Por lo tanto, esta propiedad nos dice que:

Bajo la acción de la fuerza externa resultante sobre el sistema, el centro de masa se acelera como si se tratara de una única partícula de masa M.

Esta segunda propiedad nos enseña que el movimiento del centro de masa de un sistema sólo puede ser modificado por las fuerzas externas; las fuerzas internas no ejercen ningún efecto sobre el movimiento del centro de masa.

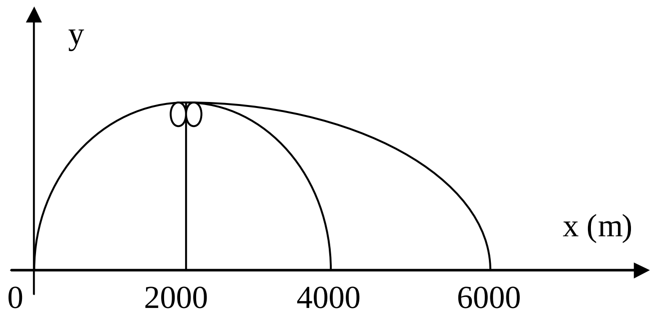
Ejemplo.

Un proyectil explota en dos trozos iguales, cada uno de ellos de masa m, cuando está en la parte superior de la trayectoria. Uno de los trozos cae verticalmente hacia el suelo impactando a 2000 m del lugar de lanzamiento, mientras que el otro se mueve horizontalmente de modo que ambos tocan el suelo simultáneamente. ¿Dónde caerá el segundo trozo?

Solución:

El 1º paso consiste en definir el sistema; él estará constituido por el proyectil (al principio será una partícula única; después contendrá dos partículas).

La explosión del proyectil es debida a fuerzas internas; según la 2º propiedad, estas fuerzas no pueden perturbar el movimiento del centro de masa, por lo que él continuará describiendo la trayectoria de la parábola original. Como en este caso, el cm deberá equidistar de ambos trozos de proyectil, por tener éstos masas iguales, resulta fácil inferir dónde caerá el 2º trozo: Caerá a 6000m del lugar de lanzamiento.



Si se desea un planteo matemático, puede ponerse:

$M \cdot x_{cm} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot x_2$

$x_{cm} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

$x_2 = 2 \cdot x_{cm} - x_1$

$x_2 = 2 \cdot 4000 - 2000 = 6000$ m

12

Momento angular

En esta clase continuaremos presentando magnitudes que atañen al movimiento de rotación.

El concepto de *momento angular* es también conocido con una diversidad de nombres, tales como *momento de la cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular, impulso angular, momentum,* etc. Es al movimiento de rotación, lo que la cantidad de movimiento lineal es al movimiento de traslación.

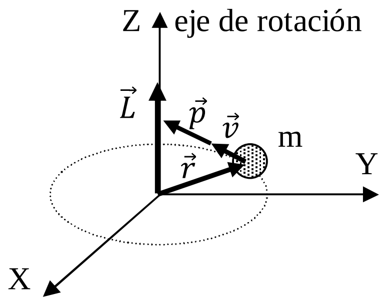
La presentación de este nuevo concepto, seguirá pasos similares a los de la introducción del concepto de momento de una fuerza (Γ) a partir del de fuerza (F). Así como el vector torca o momento de una fuerza se obtenía premultiplicando al vector fuerza por el vector posición:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

de manera similar el vector momento angular se obtendrá premultiplicando al vector cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ con el vector posición. Utilizaremos la letra L para representar al momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

La figura muestra una partícula de masa m, dotada de una cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ que rota alrededor del origen de una terna cartesiana, en el plano horizontal x;y. La partícula es ubicada por el vector posición $\vec{r}$, con origen en el origen de la terna y su extremo sobre la partícula.



Escalarmente, L = r•p•sen θ

O bien: L = r•m•v•sen θ.

Obsérvese que si θ = 0°, resulta L = 0.

Relación entre la torca ($\vec{\Gamma}$) y la variación del momento angular $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)$

Sabemos que la fuerza neta que actúa sobre una partícula, (de acuerdo con la segunda ley de Newton) provoca su aceleración, es decir que su velocidad cambie y con ella, que su cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$, también cambie. Ahora vemos (a través de $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$) que también cambia a $\vec{L}$. Demostraremos a continuación que justamente la rapidez de cambio del momento angular es igual a la torca producida por la fuerza neta. Para ello derivaremos la ecuación:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}$$

respecto del tiempo, utilizando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \wedge m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$= (\vec{v} \wedge m\vec{v}) + (\vec{r} \wedge m \cdot \vec{a})$$

El primer término del segundo miembro es nulo, por representar al producto vectorial de un vector consigo mismo. Por lo tanto, finalmente nos queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_{neta}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{\Gamma_{neta}}$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella.

Momento de inercia (J).

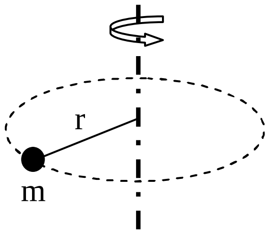
Cuando una partícula o sistema de partículas se encuentran en movimiento de rotación, resulta conveniente introducir una nueva cantidad física llamada momento de inercia; ella depende de la masa y de la distancia al eje de rotación; es una cantidad escalar. Será simbolizada con una J.

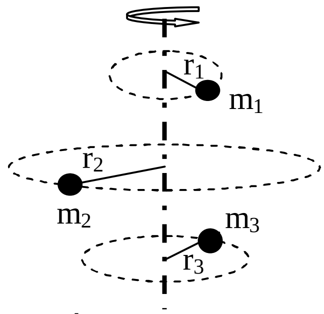
1- MOMENTO DE INERCIA DE UNA PARTÍCULA ÚNICA.

Sea una partícula de masa m que rota describiendo una circunferencia de radio r respecto del eje de rotación. Su momento de inercia está dado por la expresión:

$$J = m \cdot r^2$$

En el S.I. su unidad es kg•m^2



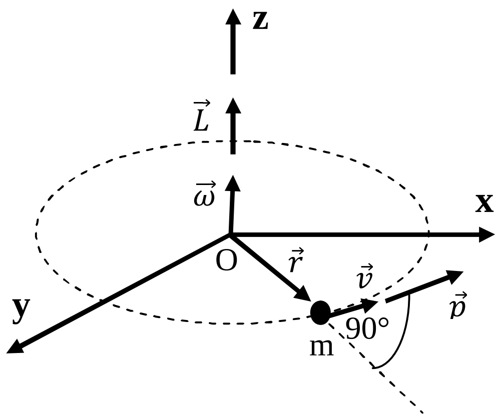


2- MOMENTO DE INERCIA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS.

Sea un sistema de n partículas en rotación alrededor de un eje. Se conocen la masa y la distancia al eje de cada una de ellas; entonces, su J estará expresado por:

$$J = \Sigma\, m_i \cdot r_i^2$$

Relación entre $\vec{L}$, J y $\vec{\omega}$.



Siendo:

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}$

si se trata de una partícula que se mueve describiendo una circunferencia alrededor del eje de rotación, como lo muestra la figura, el módulo de $\vec{L}$ es:

L = r•m•v•sen 90° = r•m•v.

La dirección y el sentido de $\vec{L}$ se muestran en la figura. Como v = ω•r, reemplazando:

L = m•r^2•ω

Finalmente: L = J•ω

La conservación del momento cinético.

La ecuación $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{\Gamma_{neta}}$, que fue escrita para una partícula, puede ser aplicada a un sistema de partículas, interpretando que nos dice que la rapidez con que varía el momento angular de un sistema con respecto a un punto dado, es igual a la sumatoria de las torcas externas que actúan sobre él:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\, \overrightarrow{\Gamma_{ext}}$$

Si el sistema se encuentra aislado, tal $\Sigma\, \overrightarrow{\Gamma_{ext}}$ valdrá cero y entonces tendremos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \text{o sea que} \qquad \vec{L} = \text{constante}$$

Si la torca externa neta sobre el sistema es nula, el momento angular del mismo permanece constante.

Éste es el enunciado del principio de la conservación del momento angular. Es el tercer principio de conservación aplicable a los sistemas mecánicos aislados que estudiamos. Se agrega a los ya vistos: principio de conservación de la energía mecánica y de la cantidad de movimiento lineal. Como aquéllos, éste también constituye una ley fundamental de la naturaleza.

Si se tiene un sistema de partículas aislado, los momentos angulares individuales de cada partícula pueden variar, pero el valor del momento angular total del sistema debe permanecer constante.

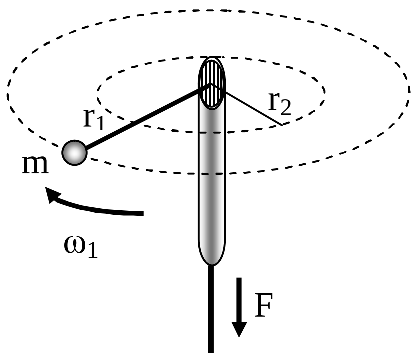
Cuando un cuerpo está girando alrededor de un eje fijo, si $\Sigma\,\overrightarrow{\Gamma_{ext}} = 0$, entonces $\vec{L}$ permanece constante. Pero como $L = J \bullet \omega$ podrá suceder por ejemplo, que ω aumente si al mismo tiempo J disminuye. Podemos expresar entonces al principio de la conservación del momento angular como:

$$J_1 \bullet \omega_1 = J_2 \bullet \omega_2 = \text{constante}$$

En la práctica, un cuerpo puede cambiar su J, con sólo reacomodar su masa respecto del eje de rotación. Los acróbatas, los clavadistas, las bailarinas de ballet, los patinadores sobre hielo, etc, hacen uso de este principio frecuentemente. Si se tiene en cuenta que J es función del cuadrado de la distancia de las partes del cuerpo al eje de rotación, resulta fácil comprender que una persona puede lograr notables variaciones en el valor de su J, con tan solo extender o recoger sus extremidades. Es así como el patinador y la bailarina de ballet puede aumentar o disminuir la velocidad angular ω de su movimiento de rotación. También los gatos se valen de este principio para caer siempre parados, cuando se arrojan desde una cornisa. Para ellos, la cola es un apéndice adicional que reúne una parte significativa de la masa total del cuerpo que, con solo extenderla o replegarla, les permite modificar el valor del J de su cuerpo.

Ejercicio.

Se ata al extremo de una cuerda ligera un objeto de masa m; la cuerda pasa por el interior de un tubo hueco y sale por el otro extremo del tubo. Se sostiene el tubo con una mano y la cuerda con la otra; se hace girar al objeto en una circunferencia de radio r_1 = 0,40 m con una velocidad tangencial v_1 = 1 m/s. Después se tira de la cuerda hacia abajo, acortando el radio de la trayectoria hasta r_2 = 0,20 m. calcular la nueva velocidad tangencial v_2 así como las velocidades angulares inicial y final.



<u>Solución</u>:

a) Cuando uno tira de la cuerda hacia abajo, le imprime una fuerza que le llega al objeto como una fuerza radial o centrípeta; esta fuerza no ejerce ninguna torca sobre el objeto; por lo tanto el momento angular se conserva y podemos poner:

$$L_1 = L_2 = \text{constante}$$

Desarrollando: $m \bullet v_1 \bullet r_1 = m \bullet v_2 \bullet r_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1 \bullet \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (1)$

$$v_2 = 1 \bullet \left(\frac{0{,}40}{0{,}20}\right) = 2\ \frac{m}{s} \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{1}{0{,}40} = 2{,}5\ \frac{1}{s}$$

b) Reemplazando en la (1) las v por ω•r, obtenemos $\omega_2 = \omega_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

$\omega_2 = 2{,}5 \cdot \left(\frac{0{,}40}{0{,}20}\right)^2 = 10\ \frac{1}{s}$

Mientras la v se duplicó, la ω se cuadruplicó.