13
Cuerpo rígido

Se ha estudiado el movimiento de rotación de una partícula; nos ocuparemos en esta clase del movimiento de rotación que realiza un cuerpo. Sean las aspas de un ventilador, la hélice de un avión, un CD en su reproductor, en todos los casos se trata de cuerpos que giran alrededor de un eje.

Para que los conceptos a estudiar resulten más claros, evitaremos aquellas complicaciones accesorias que la rotación de un cuerpo real nos pueda traer. Para eso formularemos la hipótesis del *cuerpo rígido*.

El cuerpo rígido no existe en la naturaleza; es un cuerpo ideal. Mientras todos los cuerpos reales, bajo la acción de las fuerzas que soportan, son susceptibles en mayor o menor grado, de sufrir deformaciones tales como torcerse, doblarse o vibrar, el cuerpo rígido conservará rigurosamente su forma siempre, sin importar cuánto de grandes sean las fuerzas que soporte. Entonces definiremos:

CUERPO RÍGIDO es todo cuerpo extenso, es decir constituido por muchas partículas, donde todas ellas guardan entre sí relaciones de distancia invariables.

Además, en la rotación de un cuerpo (rígido de ahora en más) podemos distinguir dos casos, según que el eje alrededor del cual gira permanezca fijo o no. En el primer caso hablaremos de *rotación pura*, mientras que en el segundo diremos que hay *traslación y rotación combinadas* (o movimiento rototraslatorio).

El tema de esta clase será la rotación pura, y dejaremos para la próxima clase el caso del movimiento rototraslatorio.

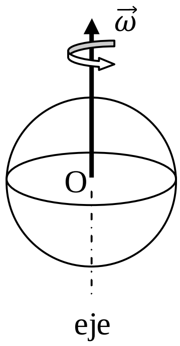
Cinemática del cuerpo rígido.

Suponga una formación de soldados que viene marchando durante un desfile, y que en un cierto momento comienzan a girar en una esquina. Para poder conservar la formación, los soldados que se encuentran más cerca del centro de giro reducen su rapidez, mientras que los que están en el otro extremo de la fila apuran el paso. Una vez completado el giro, podremos decir que todos ellos han girado un mismo ángulo en el mismo tiempo, por lo que la velocidad angular ω será la misma para todos los soldados. Pero no podemos decir lo mismo de la velocidad tangencial v: cada soldado de la fila ha girado con una v diferente. En la fórmula que relaciona ambas formas de expresar la velocidad: $v = \omega \bullet r$, mientras ω ha permanecido constante, v ha crecido con r, siendo r la distancia desde cada soldado hasta el eje de giro.

Lo mismo le sucede a los habitantes de la Tierra. Cuando ella da una vuelta completa alrededor de su eje, todos habremos girado con la misma ω, porque habremos dado una vuelta completa en 24 horas; pero la v habrá sido mayor para quienes están en el Ecuador.

La rotación puede ser uniforme, uniformemente variada o variada; rigen las respectivas ecuaciones horarias estudiadas para el movimiento circular:

ROTACIÓN UNIFORME	ROTAC. UNIFORM. VARIADA
$\alpha = 0$	$\alpha = \text{constante}$
	$\theta = \theta_0 + \omega \bullet t + \frac{1}{2}\,\alpha \bullet t^2$
$\theta = \theta_0 + \omega \bullet t$	$\omega = \omega_0 + \alpha \bullet t$
	$a_t = \alpha \bullet r$
$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \bullet r$	$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \bullet r$



Una rotación queda perfectamente determinada cuando se conocen 3 cosas: el eje de rotación, la velocidad angular ω y el sentido del movimiento. Estas tres características quedan representadas mediante el vector $\vec{\omega}$ (ver figura) cuya dirección es la del eje de rotación, su módulo es la rapidez angular y su sentido obedece a la regla de la mano derecha.

Consideremos a continuación el caso de un cuerpo que se mueve en un plano, pasando de la posición inicial (1) a la posición final (2); ver la figura en la próxima página. Siempre es posible pasar de (1) a (2) componiendo una rotación con una traslación; pero también es posible lograrlo mediante una rotación única. En este caso interesará determinar la ubicación del punto Q al que denominaremos *centro instantáneo de rotación*. Entonces ese único movimiento que nos lleve de (1) a (2) será una rotación alrededor de este centro.

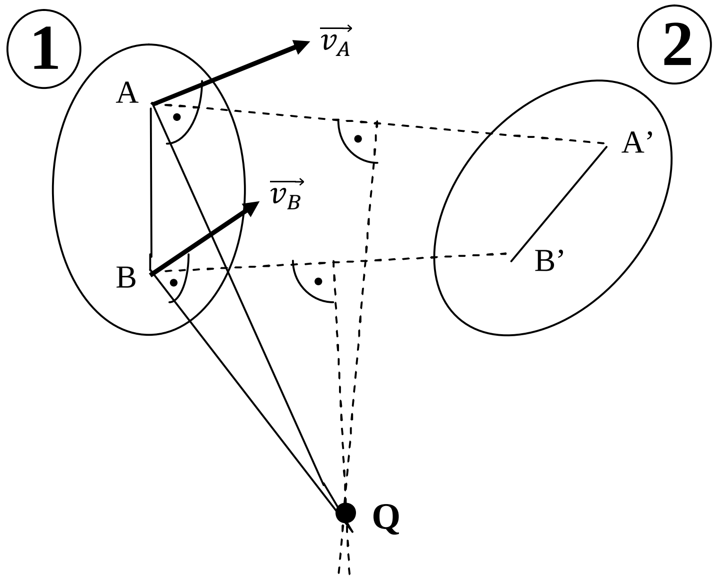
En el movimiento, el segmento $\overline{AB}$ pasa a ocupar la posición $\overline{A'B'}$. Para ubicar a Q se hace la construcción geométrica que se muestra en la figura. Se trazan los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ y se determinan los puntos medios de ambos. Las perpendiculares trazadas por dichos puntos medios se cortan en Q.

La posición de Q se va modificando de acuerdo con las características del movimiento; por eso decimos que Q es un centro instantáneo. Si deseamos agregar en la figura los vectores $\overrightarrow{v_A}$ y $\overrightarrow{v_B}$ en el estado inicial (1), ellos deberán ser perpendiculares respectivamente a las direcciones $\overline{AQ}$ y $\overline{BQ}$. Como vimos, la rotación tiene una ω única, por lo que deberá ser:

$v_A = \omega \cdot \overline{AQ}$ (1) y $v_B = \omega \cdot \overline{BQ}$ (2)

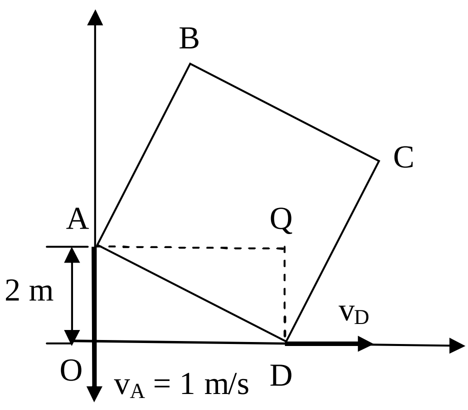
Mediante las (1) y (2) es posible, conocida la velocidad de un punto, calcular la de otro cualquiera. Despejando ω en ambas e igualando las expresiones, se obtiene:

$$\frac{v_A}{AQ} = \frac{v_B}{BQ}$$



Ejercicio 1.

Una chapa cuadrada de 4 m de lado se mueve sobre un plano manteniendo los vértices A y D sobre dos rectas ortogonales entre sí. Cuando el punto A se halla a 2 m de O, su rapidez es v_A = 1 m/s. Determinar a) la ubicación del centro instantáneo de rotación; b) la ω instantánea. c) la velocidad del punto D.



Solución:

Medida de $\overline{OD} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}46\ m$

a) El punto Q es el centro instantáneo de rotación: Q(3,46;2) en metros.

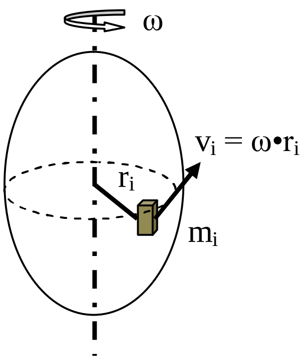
b) $v_A = \omega \cdot r_{AQ}$ → $\omega = \frac{v_A}{r_{AQ}} = \frac{1}{3{,}46} = 0{,}29\ \frac{1}{s}$

c) $v_D = \omega \cdot r_{DQ} = 0{,}29 \cdot 2 = 0{,}58\ \frac{m}{s}$

Dinámica del cuerpo rígido.

La dinámica estudia relaciones de causa-efecto. En la dinámica de la rotación la causa es el momento de una fuerza o torca (Γ) y el efecto es la aceleración angular del cuerpo (α). Veremos a continuación la energía cinética de la rotación.

La energía cinética de la rotación.



Sea un cuerpo rígido girando con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo. Cada partícula del cuerpo posee una cierta cantidad de energía cinética. La figura muestra una partícula al azar, de masa m_i que gira con radio r_i, con velocidad angular ω y velocidad lineal v_i. Por lo tanto su energía cinética es:

$$\Delta Ec = ½\, m_i \bullet v_i^2 = ½ \bullet m_i \bullet r_i^2 \bullet \omega^2$$

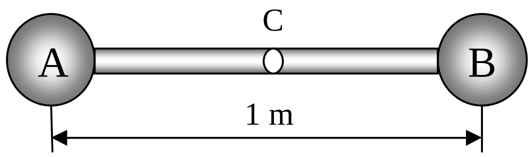
La energía cinética total del cuerpo será la sumatoria de las ΔEc_i de cada una de las partículas:

$$Ec = \Sigma \Delta Ec_i = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot (\Sigma mi \cdot ri^2) = - \cdot J \cdot \omega^2$$

Si comparamos la expresión de la Ec obtenida para la rotación, con la Ec de la traslación, vemos que J es en la rotación lo que m es en la traslación. Pero la analogía entre J y m no va más allá de esto, porque mientras que m no depende de su localización en el cuerpo, J sí depende, e incluso depende de la posición del eje de rotación. Para ilustrar lo expresado, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

La figura muestra una haltera; consiste en dos esferas situadas en los extremos de una barra rígida ligera de 1 metro de largo. Cada esfera tiene una masa de 5 kg. Suponiendo que las esferas se comportan como partículas, calcular el momento de inercia de la haltera para los siguientes casos: a) el eje de rotación es perpendicular a la pieza y pasa por su punto medio C. b) el eje es perpendicular a la pieza y pasa por una de las esferas.



<u>Solución</u>:

Comentarios sobre el enunciado: 1) Cuando dice barra ligera, significa que el momento de inercia J correspondiente a la barra es nulo o que puede despreciarse. 2) Cuando dice que se suponga que las esferas se comportan como partículas, lo hace porque hasta este momento sólo hemos presentado la expresión de J correspondiente a la partícula.

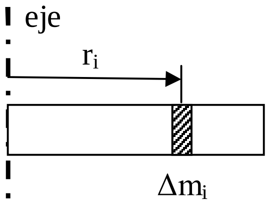
a) $J^{(C)} = \Sigma\, m_i \bullet r_i^2 = m_A \bullet r_A^2 + m_B \bullet r_B^2 = 5 \bullet (0{,}50)^2 + 5 \bullet (0{,}50)^2 = 2{,}5\ kg \bullet m^2$

b) $J^A = J^B = m_A \bullet r_A^2 + m_B \bullet r_B^2$ Uno de los términos se anula y queda el otro:
$J = 5 \bullet (1)^2 = 5\ kg \bullet m^2$

Los resultados muestras que con sólo desplazar el eje de rotación a otro lugar, el valor del momento de inercia de una pieza, cambia. Al respecto, J alcanza su valor mínimo cuando el eje pasa por el centro de masa de la pieza.

Cálculo de momentos de inercia.

Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, la expresión de J deberá obtenerse mediante los procedimientos del cálculo integral. Dado que es $J = \Sigma\, m_i \bullet r_i^2$, deberá suponerse al cuerpo dividido en elementos infinitesimales de masa Δm y r será la distancia desde cada uno de estos elementos hasta el eje de rotación. El producto $m_i \bullet r_i^2$ nos dará el ΔJ_i. Finalmente será



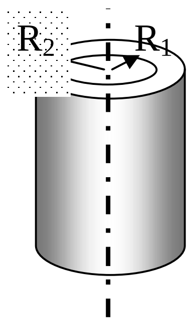
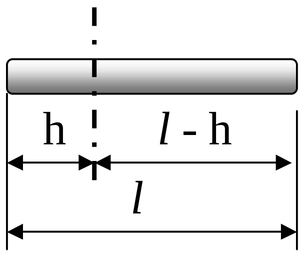
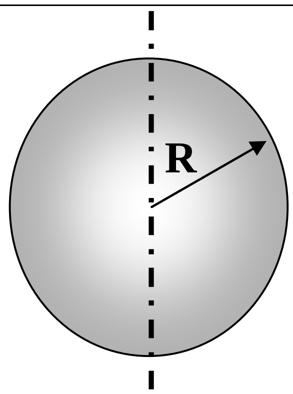
$J = \Sigma \Delta J_i$.

Matemáticamente se plantea así:

$$J = \lim_{\Delta m \to 0} \Sigma \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 \cdot dm$$

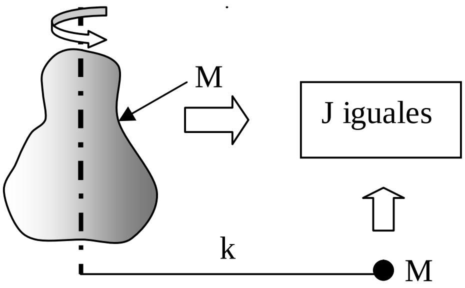
Si el cuerpo presenta una geometría sencilla, la integral indicada puede resolverse sin mayores dificultades. El cuadro siguiente resume las expresiones de J para los cuerpos geométricos más comunes.

FÓRMULAS DE MOMENTO DE INERCIA J

Cilindro hueco o macizo con eje de rotación coincidente con el eje de simetría.		$J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(R_1^2 + R_2^2\right)$	**1**
		Si es macizo: $J = ½ \cdot M \cdot R^2$	**2**
		Si es de paredes muy delgadas: $J = M \cdot R^2$.	**3**
Barra delgada uniforme y eje de rotación perpendicular a ella		$J = \frac{1}{3} \cdot M \cdot (l^2 - 3 \cdot l \cdot h + 3 \cdot h^2)$	**4**
		Si el eje pasa por el centro: $J = \frac{1}{12} \cdot M \cdot l^2$	**5**
		Si el eje pasa por un extremo: $J = \frac{1}{3} \cdot M \cdot l^2$	**6**
Esfera uniforme con eje de rotación coincidente con un diámetro		Si es maciza: $J = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$	**7**
		Si es hueca y de pared delgada: $J = \frac{2}{3} \cdot M \cdot R^2$	**8**

Radio de giro (k).

RADIO DE GIRO es la distancia respecto del eje de rotación, donde debería ser ubicada en forma puntual la totalidad de la masa de un cuerpo dado, para que su momento de inercia posea el mismo valor que el que tiene el cuerpo respecto de dicho eje.



Si la masa M del cuerpo estuviera realmente a esa distancia k, el J tendría la expresión que le corresponde a una masa puntual M situada a la distancia k del eje, o sea:

$$J = M \cdot k^2 \qquad (3) \qquad \text{Luego,}$$

$$k = \sqrt{\frac{J}{M}} \qquad (4)$$

J y k son dos conceptos equivalentes, y las fórmulas (3) y (4) muestran cómo puede calcularse uno a partir del otro.

Ejemplo 2.

¿Cuánto vale el radio de giro de una barra delgada de masa m y longitud *l* respecto de un eje perpendicular trazado por su centro?

<u>Solución</u>:

Buscamos en la tabla de momentos de inercia, la fórmula de J que corresponde al cuerpo y eje que describe el enunciado; dicha fórmula es la n° 5: $J = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

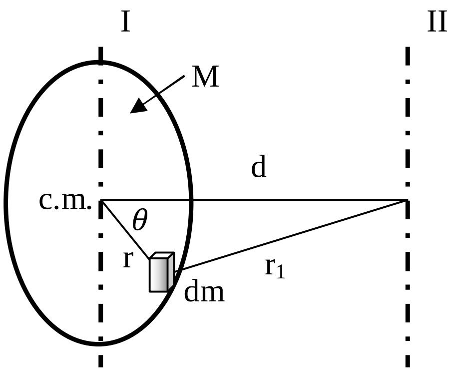
Ingresando esta expresión en la (4) y operando, resulta:

$$k = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

Teorema de los ejes paralelos.

Hemos visto que un cuerpo no tiene un J único, sino infinitos J dado que puede girar alrededor de infinitos ejes diferentes. Sin embargo hay una relación simple entre el Jcm (para un eje baricéntrico cualquiera) y el $J^{(P)}$ (para cualquier otro eje paralelo al baricéntrico original, pero desplazado una distancia d.)

Esta relación es conocida con el nombre de *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner.* La demostración de este teorema es la siguiente:



$$J^{(II)} = \int r_1^2 \cdot dm$$

Aplicando el Teorema del coseno (ver figura):

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2 \cdot r \cdot d \cdot \cos\theta$$

Reemplazando:

$$J^{(II)} = \int (r^2 + d^2 - 2 \cdot r \cdot d \cdot \cos\theta) dm$$

Desarrollando:

$$J^{(II)} = \int r^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int r \cdot \cos\theta \cdot dm$$

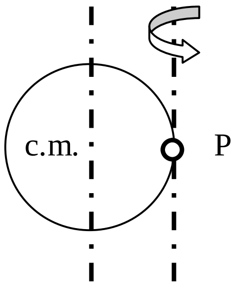
En el 2° miembro, el primer término representa a Jcm; el segundo a $M \cdot d^2$, y el tercero es nulo por representar el momento estático del cuerpo con respecto a su eje baricéntrico. En consecuencia queda:

$$J = J_{cm} + M \cdot d^2 \qquad (5)$$

Esta expresión nos dice que el J de un cuerpo es mínimo cuando se lo calcula para un eje baricéntrico, frente al J que tendría en cualquier otro eje paralelo a él.

Ejemplo 3.

Deducir la expresión de $J^{(P)}$ para una esfera maciza de masa M y radio r, siendo P un punto de su periferia.



Solución:

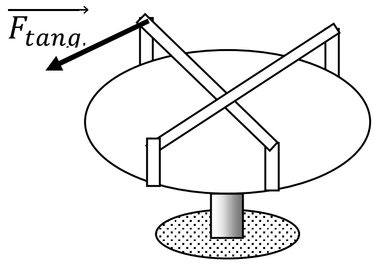
Buscamos la expresión de Jcm en la tabla de momentos de inercia. Corresponde la N° 7: Jcm = $\frac{2}{5} M \cdot r^2$

Aplicamos el teorema de Steiner: J = Jcm + M•d^2 donde d es en nuestro caso, igual a r.

Reemplazando: $J^{(P)} = \frac{2}{5} M \cdot r^2$ + M•r^2

Operando: $J^{(P)} = \frac{7}{5} M \cdot r^2$

El trabajo en la rotación. (Trabajo de una torca).



Cuando pedaleamos en una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Para ese caso, (y el de muchos otros ejemplos similares de la vida real) podemos expresar el trabajo en términos de la torca y el desplazamiento angular.

Supongamos una fuerza tangencial ejercida por un niño que corre empujando un carrusel sencillo. En un tiempo dt la rueda gira un ángulo dθ. El trabajo dW efectuado por $\overrightarrow{F_{tang.}}$ es:

dW = F_{tang}•ds

ds es la distancia recorrida por un punto del borde, y representa el recorrido realizado por el punto de aplicación de $\overrightarrow{F_{tang.}}$

dW = F_{tang}•R•dθ = Γ_z•dθ

El trabajo total efectuado por la torca durante el desplazamiento angular desde θ_1 hasta θ_2 es:

W = $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_z \cdot d\theta$ Unidad S.I.: N•m = joule

Esta expresión guarda analogía con la de la traslación: W = $\int_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx$.

Si la fuerza aplicada tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (hacia el eje o alejándose de él), dicha componente no haría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación sólo tiene componente tangencial. De manera que la ecuación de arriba es válida para cualquier fuerza, independientemente de sus componentes.

Para el caso particular en que la torca permanezca constante, será:

W = Γz•$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \Gamma_z \cdot (\theta_2 - \theta_1)$ = Γ•$\Delta\theta$ (6) Trabajo de una torca constante.

La potencia en la rotación.

Para obtener la expresión de la potencia en la rotación, basta con dividir la ecuación (6) el tiempo:

$\frac{W}{\Delta t} = \Gamma \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ → P = Γ•ω (7)

Expresión análoga a la P = F•v de la traslación.

Fórmula fundamental de la dinámica de la rotación.

Si el cuerpo es rígido, no hay movimiento interno de las partículas y por lo tanto no puede haber disipación interna de energía; por lo tanto podemos relacionar la potencia P con la rapidez con que aumenta la energía cinética, a la cual podemos expresar como $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2\right)$

Como J = constante, por ser el cuerpo rígido y tener el eje fijo, puede ponerse:

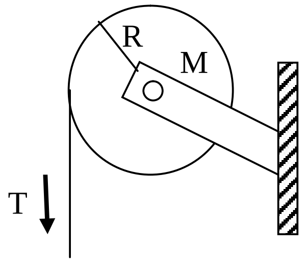
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2\right) = \frac{1}{2}\cdot J\cdot\frac{d}{dt}\omega^2 = J\cdot\omega\cdot\frac{d\omega}{dt} = J\cdot\omega\cdot\alpha \qquad (8)$$

Igualando los segundos miembros de las (7) y (8):

$$\Gamma\bullet\omega = J\bullet\omega\bullet\alpha \quad\rightarrow\quad \Gamma = J\bullet\alpha \qquad (9)$$

La (9) es la fórmula fundamental de la dinámica de la rotación; relaciona la causa, representada por la torca Γ con el efecto, representado por la aceleración angular α. La (9) tiene su análogo en F = m•a de la dinámica lineal.

Ejercicio 2.



Una polea de M = 2,5 kg y R = 0,20 m, está montada sobre un eje sin fricción y tiene enrollada sobre su borde una cuerda ligera. Si se tira del extremo de la cuerda, con una fuerza constante hacia debajo de T = 5N, calcular a) la aceleración angular α de la rueda; b) la aceleración tangencial a de un punto de su borde. C) Si en vez de tirar con una fuerza T, se atara al extremo de la cuerda una pesa de 5 N, ¿cuáles serían ahora los valores de α y de a?

<u>Solución</u>:

Lo primero que debemos hacer es identificar el tipo de movimiento que tenemos; la polea hace una rotación. Por lo tanto, nuestro punto de partida será la (9).

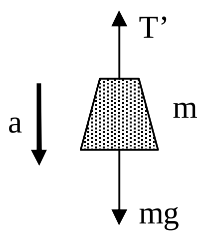
a) Γ = J•α donde $J = \frac{1}{2} M\bullet R^2$ y Γ = T•R.

Reemplazando en la fórmula fundamental y despejando α:

$$\alpha = \frac{2\cdot T}{M\cdot R} = \frac{2\cdot 5}{2{,}5\cdot 0{,}20} = 20\ \frac{1}{s^2}$$

b) $a = R\bullet\alpha = 20\bullet 0{,}20 = 4{,}0\ \frac{m}{s^2}$

c) El agregar una masa al extremo de la cuerda, implica que ahora habrá dos cuerpos moviéndose: la polea (con rotación) y la masa (con traslación). Para resolver el problema deberemos ahora plantear las ecuaciones de dinámica de los dos cuerpos.



-Ecuación para la masa colgada: Ella realiza traslación, luego:

mg – T’ = ma Luego: T’ = mg – ma (10)

-Ecuación para la polea. Ella realiza rotación. La ecuación deducida en a) nos sirve, sólo que la fuerza sobre la polea ya no es T, sino T’:

$$\alpha = \frac{2\cdot T'}{M} \text{ con } \alpha = \frac{a}{R} \quad \text{Luego: } T' = \tfrac{1}{2} Ma \qquad (11)$$

Igualando los segundos miembros de las (10) y (11):

$$mg - ma = \frac{1}{2}Ma \quad \text{donde } m = \frac{P}{g} = \frac{5}{9{,}8} = 0{,}51\ kg$$

$$a = \frac{2 \cdot m \cdot g}{M + 2 \cdot m} = \frac{2 \cdot 0{,}51 \cdot 9{,}8}{2{,}5 + 2 \cdot 0{,}51} = 2{,}85\ \frac{m}{s^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2{,}85}{0{,}20} = 14{,}3\ \frac{1}{s^2}$$

Nótese que las aceleraciones son menores ahora, a pesar que el cuerpo suspendido pesaba lo mismo que el esfuerzo T. Esto se debe a que T' < T y con ello, también es menor la torca Γ.

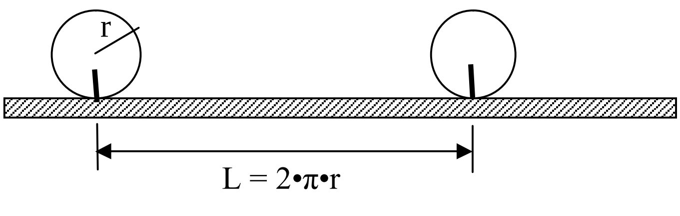
14
Rodadura

Hemos estudiado el movimiento de rotación pura, o sea de eje fijo. En esta clase trataremos un movimiento más general, donde el cuerpo rígido realiza simultáneamente movimientos de rotación y de traslación. Sin embargo nos limitaremos al caso especial en el cual ambos movimientos, rotación y traslación no ocurren en forma independiente, sino que se encuentran ligados físicamente, de manera que hay un vínculo matemático que los relaciona.

Supongamos un cilindro que rueda por un plano; hay una rotación al girar el cilindro alrededor de su eje geométrico y hay una traslación de dicho eje, al desplazarse paralelamente a sí mismo. El contacto entre el cilindro y el plano tiene lugar a lo largo de una recta generatriz. Si el cilindro no resbala ambos movimientos están relacionados.

Se llama RODADURA al movimiento combinado de rotación y traslación que realiza un cuerpo (cilindro, aro, esfera) cuando rueda sin resbalar por un plano.

¿Cuál es la relación que vincula en la rodadura, a la rotación con la traslación?



La figura muestra un cilindro de radio r que rueda sin resbalar por un plano horizontal. Hacemos una marca de referencia sobre la tapa del cilindro y hacemos que ella se ponga en contacto con el plano. Si a partir de aquí le hacemos dar una vuelta completa al cilindro (lo que ocurrirá cuando la marca vuelva por primera vez al piso), la longitud L que habrá avanzado el cilindro por el plano estará relacionada con su radio por:

$$L = 2 \bullet \pi \bullet r \qquad (1) \qquad \text{CONDICIÓN DE RODADURA}$$

Si el cilindro hubiera resbalado, podría haber rotado más de lo que se traslada o bien al revés; en ninguno de estos casos la igualdad de arriba se hubiera cumplido. La igualdad entre L y $2\pi r$ nos garantiza que el cilindro no ha resbalado, por lo que habrá realizado un movimiento de rodadura.

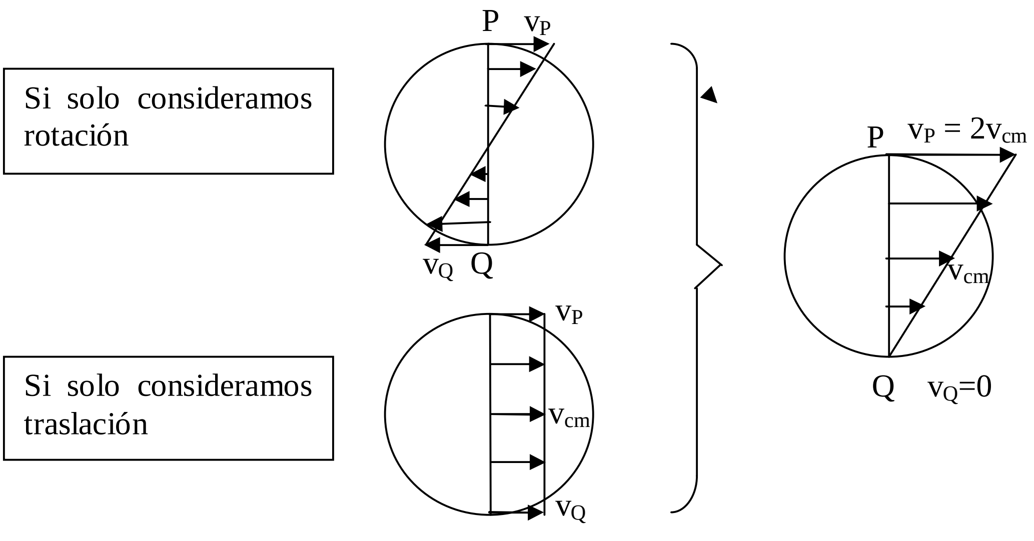
La condición de rodadura también puede expresarse como un vínculo entre velocidades, dividiendo por el tiempo Δt a la ecuación (1):

$$\frac{L}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta t} \cdot r \quad \rightarrow \quad v = \omega \bullet r \qquad (2) \qquad \text{CONDICIÓN DE RODADURA}$$

Y hay una tercera manera de expresar la condición de rodadura, como un vínculo entre aceleraciones. Si se repite el procedimiento con la (2), resultará:

$$a = \alpha \bullet r \qquad (3) \qquad \text{CONDICIÓN DE RODADURA}$$

Hemos dicho que el contacto entre el cilindro y el plano tiene lugar a lo largo de una recta generatriz a la que distinguiremos de las demás generatrices, llamándola “*la generatriz de contacto*”. Pero mientras el cilindro rueda, hay una continua sustitución de generatrices de contacto por las que le siguen. Una generatriz de contacto lo es por un instante fugaz. Pero nótese que si bien el cilindro está en movimiento, la generatriz de contacto está en reposo: si ella se moviera, el cilindro resbalaría. Para mostrar esto, dibujaremos los perfiles de velocidad por separado, para la rotación y para la traslación,



para luego sumarlos y obtener el perfil de velocidades definitivo. Allí vemos que en el punto Q (generatriz de contacto) la velocidad es efectivamente nula.

La observación de los perfiles de velocidad nos permite tener otra mirada sobre el movimiento de rodadura. Cuando únicamente hay rotación, la velocidad tangencial en el eje es nula. Si observamos el perfil de velocidades definitivo (de la derecha), vemos que velocidad nula hay en el punto Q. Luego es válido considerar que el movimiento de rodadura es un movimiento de rotación pura alrededor del punto Q. Por tal motivo, a la generatriz de contacto Q se la llama también eje instantáneo de rotación. Esta nueva manera de interpretar la rodadura es válida para un instante solamente, ya que la generatriz de contacto se recambia constantemente.

El movimiento de rodadura puede interpretarse de dos maneras: a) como una combinación de traslación del centro de masa mas una rotación alrededor del eje baricéntrico; b) como una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el punto de contacto entre el cuerpo y la superficie sobre la cual rueda.

Como una forma de verificación de lo que acabamos de exponer, calcularemos la energía cinética de un cilindro que hace rodadura; lo haremos de las dos maneras, pero deberemos llegar a la misma conclusión.

1° FORMA El cilindro combina una traslación con una rotación alrededor del centro de masa.

$$Ec_{\text{ TOTAL}} = Ec_{\text{ tras}} + Ec_{\text{ rotac}} = ½\ mv^2 + ½\ J_{cm}\bullet\omega^2$$
$$= ½\ mv^2 + ½[{}^1/_2\ mr^2]\ \frac{v^2}{r^2} = ¼\ mv^2 + ½\ mv^2 = ¾\ mv^2$$

2° FORMA El cilindro hace rotación pura alrededor del punto Q

Previamente, aplicando el teorema de los ejes paralelos, deduciremos la expresión de $J^{(Q)}$. $J^{(Q)} = J_{cm} + md^2$ donde $d = r$

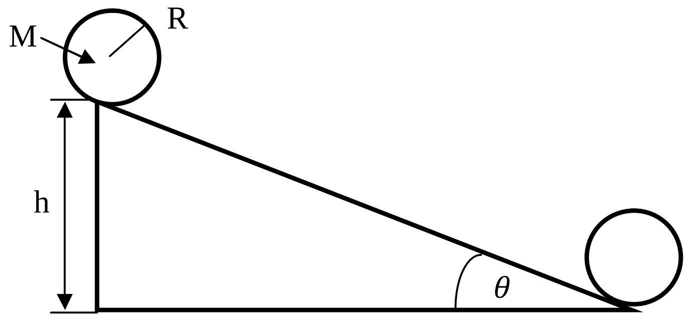
$$J^{(Q)} = {}^1/_2\ mr^2 + mr^2 = {}^3/_2\ mr^2$$

$$Ec_{\text{ TOTAL}} = Ec_{\text{ rotac}} = ½\ J^{(Q)}\bullet\omega^2 = ½\ [{}^3/_2\ mr^2]\cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}\cdot m\cdot v^2$$

Para aprender más sobre el movimiento de rodadura nos plantearemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.

Un cilindro macizo, de masa M y radio R, desciende sin resbalar por un plano inclinado. Deducir la expresión de la velocidad de su centro de masa, para cuando el cilindro llega a la base del plano.



Solución:

Este problema puede resolverse de 2 maneras: utilizando métodos energéticos o por dinámica. Lo resolveremos por las dos formas. Por otro lado, como todo problema de rodadura puede considerarse como una combinación de rotación alrededor del c.m. más una traslación, o bien como una rotación pura. Elegiremos la combinación de rotación más traslación.

1° Solución por energía:

Se utiliza el principio de la conservación de la energía mecánica y supondremos que en el estado inicial el cilindro parte del reposo. El estado final será el momento en que el cilindro llegue a la base del plano inclinado.

$$Em_1 = Em_2$$
$$M\bullet g\bullet h = ½\ J_{cm}\bullet\omega^2 + ½\ M\bullet v^2$$

Se reemplaza J_{cm} por su expresión; para el cilindro macizo es ½ $M\bullet R^2$. Por la condición de rodadura, se reemplaza $\omega = \frac{v}{R}$. Nos queda:

$$M \bullet g \bullet h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\right)\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot M\cdot v^2$$

Despejando, $v^2 = \frac{4}{3}\cdot g\cdot h$ $\qquad v = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot g\cdot h}$

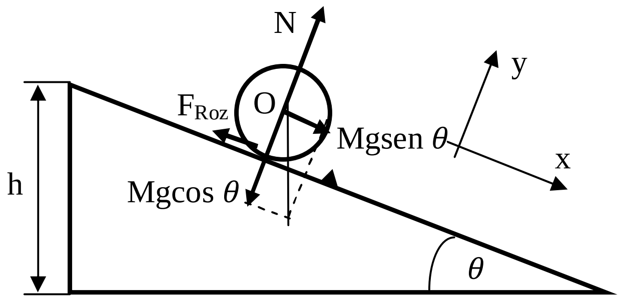
Resulta interesante comparar este resultado con el que se hubiera obtenido si el cilindro hubiese resbalado sin rozamiento por el plano inclinado; en tal caso la velocidad del centro de masa habría sido

$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

Por lo tanto, la velocidad del cilindro que rueda, es menor que la del cilindro que resbala, debido a que en el primero, parte de la energía potencial ha sido transformada en energía cinética de rotación, dejando una cantidad menor para la parte traslacional de la energía cinética.. Aunque el primer cilindro tarda más que el segundo en llegar abajo, ambos llegan con la misma energía cinética.

<u>2° Solución por dinámica</u>:

Volvemos a resolver el problema, ahora usando métodos dinámicos. Comenzamos haciendo un diagrama de cuerpo libre.



Hay que plantear una ecuación por cada movimiento y una condición de rodadura:

Ec. de traslación:

$Mg \bullet sen\,\theta - F_R = M \bullet a$ (4)

Ec. de rotación:

$\Gamma = J_{cm} \bullet \alpha$ La única fuerza cuya recta de acción NO pasa por O y que puede producir torca es F_R. Luego: $F_R \bullet R = J_{cm} \bullet \alpha$

$F_R \bullet R = \frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2 \bullet \alpha$ (5)

Ec. de condición de rodadura: $\alpha = \frac{a}{R}$ (6)

Las (4), (5) y (6) forman un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Reemplazando en la (5) α por la (6), y despejando a continuación F_R, se obtiene: $F_R = ½ M \bullet a$ (7)

Llevando la (7) a la (4): $Mg \bullet sen\,\theta - ½ M \bullet a = M \bullet a$

Despejando, $a = \frac{2}{3}\, g\cdot sen\,\theta$ (8)

La (8) nos muestra que un cilindro que rueda adquiere una aceleración menor que otro que resbala sin rotar para el cual hubiera sido $a = g \bullet sen\,\theta$. Por otra parte, la (8) nos muestra que a = constante, por lo que el cilindro desciende por el plano inclinado realizando un MRUV.

Aquí nos deja la dinámica. Si deseamos llegar a la fórmula de la velocidad, deberemos agregar un paso de cinemática. De la fórmula del MRUV: $v^2 - v_0^2 = 2a \bullet l$ donde $v_0 = 0$ y l (longitud recorrida sobre el plano inclinado) $= \frac{h}{sen\,\theta}$ queda:

$$v^2 = 2 \bullet \left[\frac{2}{3}\, g\cdot sen\,\theta\right]\left[\frac{h}{sen\,\theta}\right] = \frac{4}{3}\, g\cdot h$$

Finalmente: $v = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot g \cdot h}$

que es el mismo resultado obtenido cuando se resolvió el problema por energía.

El primer método es más simple y directo, pero cuando se desean conocer fuerzas tales como N y F_R, debe emplearse el segundo método. Con este último puede hallarse la expresión de la fuerza de rozamiento mínima necesaria para que el cilindro no resbale:

$$F_{R\ \text{mínima}} = \tfrac{1}{2}\, M \bullet a = \tfrac{1}{2}\, M \bullet [\, \frac{2}{3}\ g \cdot sen\ \theta] = \frac{1}{3}\ M \cdot g \cdot sen\ \theta$$

A veces a la expresión M•g•sen θ se la suele llamar *fuerza activa*, por ser la que "motoriza" el movimiento del cilindro. Utilizando esta denominación, llegamos a esta interesante conclusión:

$$F_{R\ \text{mínima}} = \frac{1}{3} \bullet F_{\text{activa}}$$

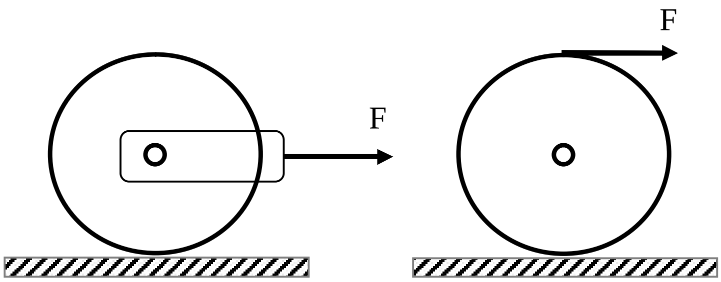
Tener en cuenta que todas las deducciones realizadas, han sido hechas para un cilindro macizo. Si el cuerpo que realiza la rodadura fuera otro, las expresiones de velocidad, aceleración, fuerza de rozamiento mínima, etc serían distintas, simplemente porque J sería diferente.

Observación: ¿Por qué no se tomó en cuenta la eventual energía disipada por la fuerza de rozamiento, cuando se resolvió el problema por energía? Simplemente porque no existe tal energía disipada. Ocurre que cuando el cilindro rueda por el plano inclinado, no se realiza ningún trabajo, por lo que tampoco se desarrolla calor, como puede comprobarse experimentalmente. La fuerza de rozamiento existe, y es gracias a ella que el cilindro hace rodadura y no resbala. Pero precisamente porque no resbala, así como la generatriz de contacto no se mueve, la fuerza de rozamiento no se traslada, requisito necesario para que pueda hacer trabajo.

Como la generatriz de contacto cambia continuamente por otra, cada una plantea instantáneamente en su momento, a la F_R, pero esta F_R es cambiada por otra F_R con la llegada de la siguiente generatriz de contacto; ninguna de estas F_R traslada su punto de aplicación y por lo tanto no realizan trabajo.

Por otra parte, si la fuerza de rozamiento no se traslada, podemos decir que en el movimiento de rodadura siempre tenemos una fuerza de rozamiento estático, y si debiera calcularse con la expresión $F_R = \mu \bullet N$, habrá que usar siempre es μ_s.

Problema.



CASO a) CASO b)

Las figuras muestran dos rodillos iguales (cilindros macizos) de masa M a los que se les aplica la fuerza F de modo que ellos ruedan sin resbalar, experimentando sus centros de masa, un MRUA. En el caso a) $\vec{F}$ es aplicada en el eje, mientras que en el caso b) se aplica en la periferia del rodillo, mediante una cuerda enrollada alrededor de él. En ambos casos $\vec{F}$ es horizontal y tiene sentido hacia la derecha. Determinar cuál es el sentido de la fuerza de fricción en cada caso.

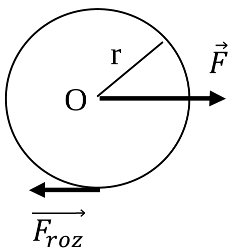
Solución:

Para poder plantear las ecuaciones de movimiento, tentativamente le asignamos un sentido a la fuerza de fricción. Si el sentido atribuido no fuera el correcto, al resolver las ecuaciones, $\overrightarrow{F_{roz}}$ tendrá signo negativo. El sentido que le supondremos es $\overrightarrow{F_{roz}}$ hacia la izquierda.

CASO a) Ecuaciones; De traslación: ΣFx] $F - F_{roz} = M \bullet a$ (1)

De rotación: $\Sigma \Gamma$] $F_{roz} \bullet r = J_{cm} \bullet \alpha$ (2)

Condición de rodadura $a = \alpha \bullet r$ (3)



De la (2): $F_{roz} \bullet r = [{}^1/_2\, M\, r^2]\, \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad F_{roz} = ½\, M \bullet a$ (4)

Reemp. 4) en la (1) y despejando F: $F = \frac{3}{2}\, M \cdot a$ (5)

Despejando a de la (5): $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{F}{M}$ (6)

Finalmente, reemp. La (6) en la (4):

$$F_{roz} = \frac{1}{3}\, F \qquad (7)$$

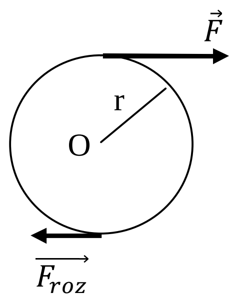
La (7) nos muestra que F_{roz} está bien dibujada y que tiene sentido opuesto al de $\vec{F}$.

CASO b) Ecuaciones;

De traslación: : ΣFx] $F - F_{roz} = M \bullet a$ (1)

De rotación: $\Sigma \Gamma$] $F \bullet r + F_{roz} \bullet r = J_{cm} \bullet \alpha$ (2)

Condición de rodadura $a = \alpha \bullet r$ (3)



De la (2): $F \bullet r + F_{roz} \bullet r = [{}^1/_2\, M\, r^2]\, \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad F + F_{roz} = ½\, M \bullet a$ (4)

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las (1) y (4):

$$F - F_{roz} = M \bullet a$$
$$F + F_{roz} = ½\, M \bullet a$$

Sumando: $2\,F = \frac{3}{2}\, M \cdot a$ Luego: $a = \frac{4}{3}\, \frac{F}{M}$ (5)

Reemplazando la (5) en la (4): $F + F_{roz} = ½\, M \bullet [\frac{4}{3}\, \frac{F}{M}] \quad \rightarrow \quad F + F_{roz} = \frac{2}{3}\, F$

$$F_{roz} = -\frac{1}{3}\, F \qquad (6)$$

La (6) nos muestra que F_{roz} está mal dibujada y que su verdadero sentido coincide con el sentido de F.

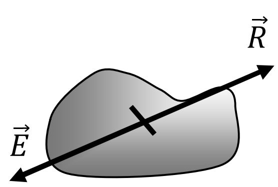
15
Estática

ESTÁTICA es la parte de la Física que se ocupa del equilibrio de los sistemas de fuerzas.

Cuando sobre un cuerpo actúa su sistema de fuerzas, el efecto neto sobre el cuerpo está determinado por la sumatoria de todas ellas; el resultado de la sumatoria se llama *fuerza resultante* o *fuerza neta*. La simbolizamos con $\vec{R}$. O sea:

$$\Sigma \vec{F_i} = \vec{R}$$

Se trata de una sumatoria vectorial. Si $\vec{R}$ no es nula, el cuerpo no está en equilibrio. Para lograr el equilibrio, habrá que agregar otra fuerza, capaz de contrarrestar a $\vec{R}$. Dicha fuerza se llama equilibrante y la simbolizaremos con $\vec{E}$.



$\vec{R}$ y $\vec{E}$ son fuerzas de igual módulo y dirección, pero con sentidos opuestos; o sea que difieren angularmente en 180°.

Los sistemas de fuerzas pueden ser unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales. Estos últimos no serán estudiados, por lo que nos ocuparemos directamente de los bidimensionales, también llamados sistemas de fuerzas coplanares, por el hecho de compartir el mismo plano.

Los sistemas coplanares de fuerzas pueden clasificarse en dos: concurrentes y no concurrentes. En los primeros, todas las fuerzas están aplicadas en un mismo punto; en los segundos, no.

Sistemas de fuerzas concurrentes.

Para que un sistema de fuerzas sea estrictamente concurrente, deberemos introducir el concepto de *punto material*, definiéndolo como un cuerpo sin dimensiones (como el punto geométrico), pero no obstante con masa. De esta manera, todas las fuerzas que se apliquen, deberán ser forzosamente concurrentes.

El primer paso para resolver un sistema de fuerzas concurrentes consiste en adoptar un sistema de referencia con dos ejes cartesianos con origen en el punto material.

En un segundo pasa se proyecta cada una de las fuerzas del sistema, sobre cada uno de los ejes cartesianos, planteando para cada fuerza:

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \theta_i \qquad\qquad F_{iy} = F_i \cdot \text{sen } \theta_i$$

En un tercer paso se calculan las componentes de la fuerza resultante, haciendo:

$$\Sigma F_{ix} = R_x \qquad\qquad \Sigma F_{iy} = R_y$$

Si el sistema estuviera equilibrado, tales sumatorias resultarían nulas; caso contrario, pasamos al próximo paso.

En un cuarto paso se calcula el módulo y la dirección (ángulo) de la fuerza resultante, haciendo:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad\qquad \theta_R = arc\ tg\ \frac{R_y}{R_x}$$

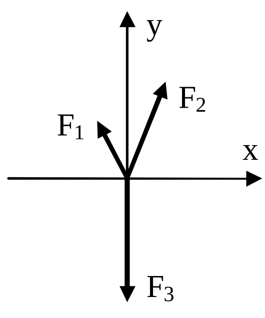
Condiciones generales de equilibrio para un sistema de fuerzas concurrentes.

Para que el sistema esté en equilibrio, debe ser R = 0. Por lo tanto las condiciones matemáticas necesarias y suficientes son:

$$\Sigma F_{ix} = 0 \qquad\qquad \Sigma F_{iy} = 0$$

Ejemplo 1.

Hallar el módulo de F_2 y su ángulo θ_2, necesarios para equilibrar al sistema de fuerzas constituido por F_1 y F_3 de la figura.



DATOS: $F_1 = 500$ N $\theta_1 = 120°$ $F_3 = 1435$ N $\theta_3 = 270°$

Solución:

$\Sigma F_{ix} = 0$ $F_1 \cdot \cos \theta_1 + F_2 \cdot \cos \theta_2 + F_3 \cdot \cos \theta_3 = 0$ (1)

$\Sigma F_{iy} = 0$ $F_1 \cdot \text{sen } \theta_1 + F_2 \cdot \text{sen } \theta_2 + F_3 \cdot \text{sen } \theta_3 = 0$ (2)

Teniendo en cuenta que en la (1) $F_3 \cdot \cos \theta_3 = 0$ por ser $\theta_3 = 270°$, ponemos:

$F_2 \cdot \cos \theta_2 = - F_1 \cdot \cos \theta_1$ (3)

$F_2 \cdot \text{sen } \theta_2 = - F_1 \cdot \text{sen } \theta_1 - F_3 \cdot \text{sen } \theta_3$ (4)

Calculando los segundos miembros y dividiendo miembro a miembro la (4) con la (3) queda:

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{1000\ N}{250\ N} = 4 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 76° \quad \text{Finalmente, } F_2 = 1042\ N$$

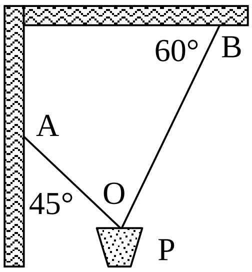
Descomponer una fuerza dada en dos direcciones dadas.

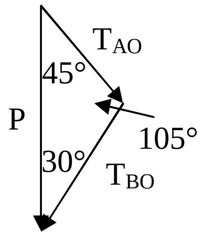
Dentro de las fuerzas concurrentes, hay un problema típico, que es el de descomponer una fuerza dada en dos direcciones dadas. Puede resolverse con el método de las proyecciones empleado en el ejemplo 1, pero también puede utilizarse un método alternativo: el del triángulo vectorial. Explicaremos este método a través de la resolución de un ejemplo:

Ejemplo 2.

Un objeto que pesa 3000 N cuelga del techo y la pared, mediante las cuerdas OA y OB, como se muestra en la figura. Determinar el valor de los esfuerzos en cada cuerda.

Solución:





Para aplicar el método del triángulo vectorial, seguir los siguientes pasos:

1- Respetando las direcciones de las tres fuerzas (la P y los esfuerzos en las dos cuerdas) construir un triángulo. Como el sistema está en equilibrio, la resultante es nula y la figura del triángulo debe cerrarse por sí misma.

2- A partir de los ángulos conocidos, identificar los valores de los ángulos interiores del triángulo.

3- Finalmente, resolver el triángulo por trigonometría. En nuestro ejemplo, se conoce un lado: P = 3000 N y los tres ángulos. Con esta información, puede emplearse el teorema del seno:

$$\frac{3000\ N}{sen\ 105°} = \frac{T_{AO}}{sen\ 30°} = \frac{T_{BO}}{sen\ 45°}$$

$$T_{AO} = 3000\ N \cdot \frac{sen\ 30°}{sen\ 105°} = 1553\ N$$

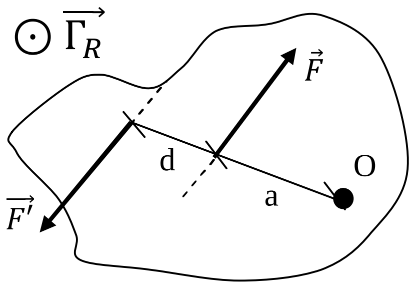
$$T_{BO} = 3000\ N \cdot \frac{sen\ 45°}{sen\ 105°} = 2196\ N$$

Sistemas de fuerzas no concurrentes.

Cuando las fuerzas del sistema tienen puntos de aplicación diferentes sobre el cuerpo, se dice que son no concurrentes. Debemos abandonar la hipótesis del punto material usada en el caso anterior. Ahora el cuerpo es extenso, y formularemos para él otra hipótesis: la del cuerpo rígido. Esto significa que se mantendrá indeformable, que conservará su geometría intacta, no importa cuánto de grandes sean las fuerzas aplicadas.

Cupla o par de fuerzas.

Un sistema de dos fuerzas del mismo módulo, que actúan sobre rectas paralelas y tienen sentidos opuestos, forman una cupla. La cupla es un ejemplo de un sistema de fuerzas no concurrentes; obsérvese que la sumatoria de las proyecciones de sus fuerzas sobre las direcciones cartesianas nos da: Rx = 0; Ry = 0. Se cumplen las condiciones de equilibrio establecidas; no obstante el cuerpo que está sometido a la acción de una cupla no se encuentra en equilibrio, sino que rota. Ocurre que toda cupla genera una torca pura, cuyo valor podemos obtener aplicando el teorema de Varignon. Para un punto cualquiera, como el O:



$$\Gamma_R^{(O)} = \Sigma\Gamma_i^{(O)}$$

$$= F'\bullet (d + a) - F\bullet a$$

Como $\left|\overrightarrow{F'}\right| = \left|\vec{F}\right|$: $\Gamma_R^{(O)} = F\bullet d + F\bullet a - F\bullet a$

Finalmente: $\Gamma_R^{(O)} = F\bullet d$

Si hay varias cuplas actuando en el plano, la torca resultante se obtiene mediante una simple suma algebraica, donde se tomarán como positivas a las que provoquen un giro antihorario y como negativas a las que den un giro horario; esto es por convención.

Condiciones generales de equilibrio para un sistema de fuerzas no concurrentes.

El ejemplo de la cupla y su efecto, pone en evidencia que las condiciones de equilibrio estudiadas para el caso de fuerzas concurrentes ($\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$) ahora no son suficientes, si bien siguen siendo necesarias. Deberá agregarse una condición que garantice la no existencia de torcas. De modo que las condiciones serán:

$$\Sigma F_{ix} = 0$$
$$\Sigma F_{iy} = 0$$
$$\Sigma \Gamma_i^{(O)} = 0$$

Ejemplo 3.

Una escalera *uniforme* de 6 m de largo y 400 N de peso, está apoyada contra una pared vertical *sin rozamiento*, con su extremo inferior a 3,6 m del pie de la pared. Calcular los módulos y direcciones de las fuerzas ejercidas contra la escalera en sus puntos de apoyo.

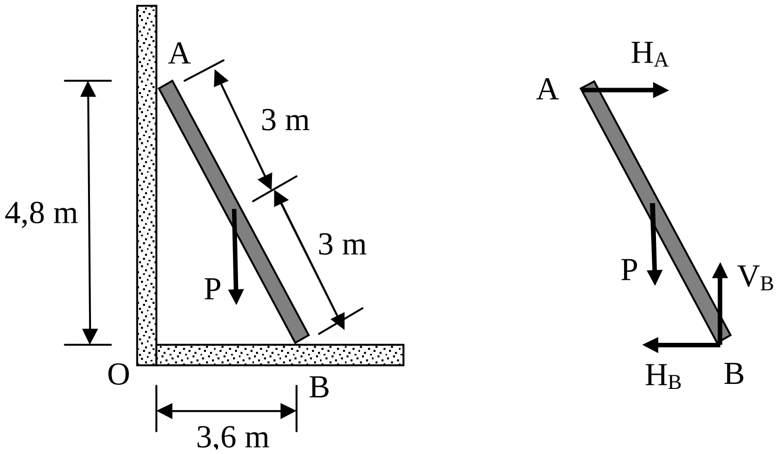
<u>Solución</u>:

Algunas consideraciones previas sobre el enunciado del problema. ¿Qué significa *uniforme*? Que la escalera es igual de punta a punta, del mismo material y con la misma geometría; todos los peldaños son de la misma longitud; quedan descartadas las escaleras que se angostan con la altura. Sabiendo eso, sabemos dónde está su centro de masa y con ello dónde ubicar la fuerza peso de la escalera.

Más adelante, el enunciado dice que entre la escalera y la pared no hay rozamiento. ¿Qué información útil sacamos de esto? Si hubiera rozamiento, la Froz tendría dirección vertical en el punto A del dibujo. Al no haberlo, estamos sabiendo que la reacción en A tendrá la dirección horizontal.

Cálculo de la distancia AO. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$AO = \sqrt{6^2 - 3{,}6^2} = 4{,}8\ m$$



El primer paso es construir el diagrama de cuerpo libre, representando todas las fuerzas actuantes sobre la escalera. La reacción en A ya se sabe que es horizontal: la llamamos H_A. Como de la reacción en B no se conoce su dirección, se dibujan sus componentes horizontal y vertical: H_B y V_B. Los sentidos de las reacciones se ponen al azar; si una vez calculadas, alguna tuviera un valor negativo, significará que el verdadero sentido de esa reacción es contrario al asignado al comienzo.

Segundo paso: sabiendo que la escalera se encuentra en equilibrio, aplicamos las ecuaciones que surgen de las condiciones de equilibrio y formaremos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya resolución resuelve el problema.

$$\begin{array}{ll} \Sigma F_{ix} = 0 & H_A - H_B = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 & V_B - 400\ N = 0 \\ \Sigma \Gamma_i^{(B)} = 0 & 4{,}8m \bullet H_A - 1{,}8m \bullet 400N = 0 \end{array}$$

Resolviendo, $H_A = H_B = 150$ N; $V_B = 400$ N. Los sentidos asignados son los correctos.

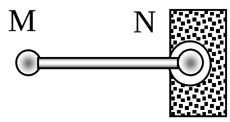
Tercer paso: Para calcular la reacción en B, aplicamos Pitágoras y trigonometría:

$$R_B = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = \sqrt{150^2 + 400^2} = 427\ N$$

$$\theta_B = arc\ tg\ \frac{V_B}{H_B} = src\ tg\ \frac{400}{150} \quad \rightarrow \quad \theta_B = 69°30'$$

Vínculos.

VÍNCULO es toda condición geométrica que limita la movilidad de un cuerpo o de un conjunto de puntos materiales.



El más sencillo de los vínculos es el que muestra la figura, donde el punto M sólo podrá moverse sobre una superficie esférica de radio MN, ya que la longitud MN es invariable. Se dice que los puntos M y N están unidos por el *vínculo de la rigidez*. Esta barra constituye un vínculo para el punto M; se denomina *biela*.

Grados de libertad.

Supongamos tener un punto material A en el plano y un sistema de ejes cartesiano x;y. Las coordenadas del punto A son (x_A;y_A). Si el punto A cambiara de posición, para poder ubicarlo nuevamente deberíamos dar dos nuevas coordenadas (x_A';y_A'). De manera que un punto material en un plano posee dos coordenadas libres.

El número de coordenadas libres que tenga un punto material (o un sistema) se denomina grado de libertad.

El concepto de grado de libertad puede darse también de otra manera, relacionándolo con cada uno de los movimientos elementales que puede hacer el punto material, la chapa o el cuerpo. Y los movimientos elementales son las rotaciones y las traslaciones. Así, un cuerpo en el espacio, tiene 6 grados de libertad, porque puede hacer 3 traslaciones (una en la dirección de cada eje cartesiano) y 3 rotaciones (también una en torno de cada eje cartesiano).

Llamaremos *chapa* a un cuerpo que sólo posee dos dimensiones, de modo que siempre estará contenida en un plano. Por lo tanto, una chapa tiene tres grados de libertad, que se corresponden con 2 traslaciones (una en la dirección de cada eje) y una rotación (alrededor del origen, o si se prefiere, alrededor del eje faltante, z).

Tipos de vínculos.

Ahora podemos dar una mejor definición de vínculo:

VÍNCULO es todo dispositivo que restringe uno o más grados de libertad.

Aunque hay otros, nos limitaremos a presentar sólo dos tipos de vínculos: el apoyo fijo y el apoyo móvil.

APOYO FIJO: Suele llamárselo también *articulación fija a tierra*, simplemente *articulación* o también *vínculo de segunda especie*.

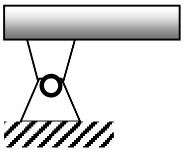
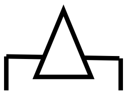
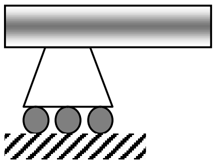
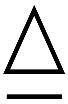
Supongamos que tenemos una chapa y la fijamos por uno de sus puntos: o sea que si ese punto es A, sus coordenadas (x_A;y_A) quedan fijadas. Cualquier otro punto de la chapa sólo podrá moverse sobre arcos de circunferencia con centro en A; o sea que la chapa sólo puede rotar; ha perdido la posibilidad de hacer sus dos traslaciones; ha perdido 2 grados de libertad. Esto es lo que sucede cuando se aplica un vínculo de este tipo.

Un APOYO FIJO restringe dos grados de libertad.

APOYO MÓVIL: Suele llamárselo también *biela* o *vínculo de primera especie*. Este tipo de vínculo restringe una traslación, pudiendo una chapa realizar una rotación y una traslación.

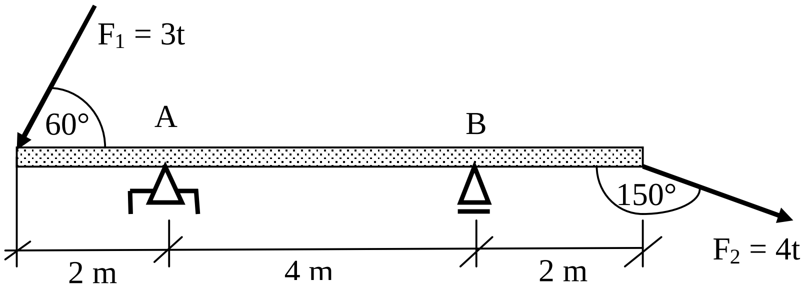
Un APOYO MÓVIL restringe un grado de libertad.

Para los dos tipos de vínculos presentados, se resumen en un cuadro en la próxima página, sus formas constructivas, los símbolos gráficos que los representan, y las características que posee la reacción que cada uno de estos vínculos trasmite a la chapa.

VÍNCULO	Forma constructiva	Símbolo	Reacción
APOYO FIJO			Tiene cualquier dirección. Se representan sus componentes horizontal y vertical.
APOYO MÓVIL			Tiene la dirección de la normal al vínculo.

Ejemplo 4.

Calcular los valores de las componentes de las reacciones en los vínculos, para la viga homogénea, uniforme de 2 t de peso, simplemente apoyada, y cargada como muestra la figura:



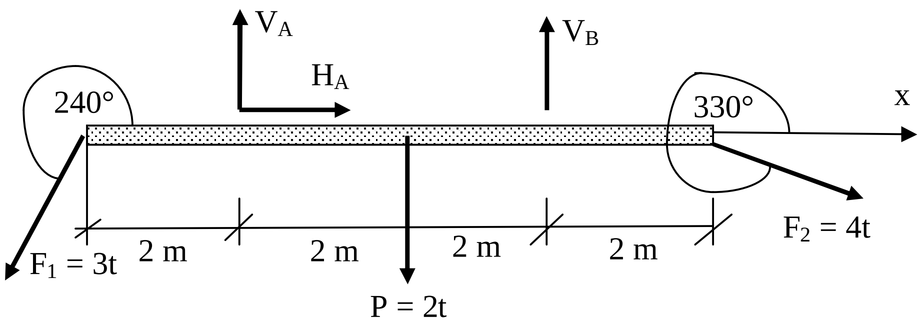
<u>Solución</u>:

1° Paso: Hacer el D.C.L. No olvidar agregar el peso propio de la barra, que no fue indicado en el dibujo, pero que se da en el enunciado.

2° Paso: Reemplazar los vínculos por las componentes de reacción que ellos producen.

3° Paso Expresar los ángulos de acuerdo con la convención angular habitual.

Queda:

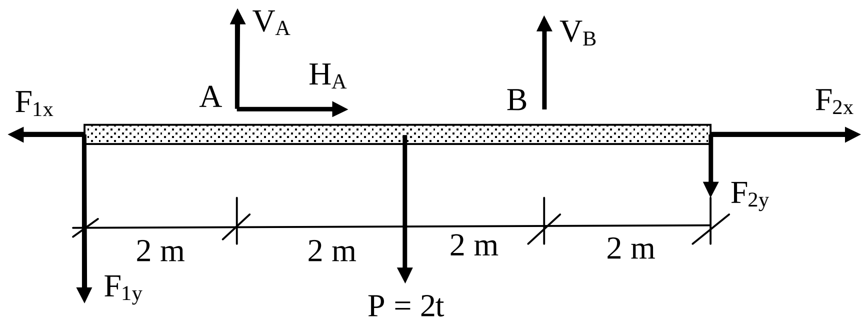


4° Paso: Cálculo de las componentes de las fuerzas:

$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 240° = -1{,}5$ t $\qquad F_{2x} = F_2 \cdot \cos 330° = +3{,}46$ t

$F_{1y} = F_1 \cdot \text{sen } 240° = -2{,}6$ t $\qquad F_{2y} = F_2 \cdot \text{sen } 330° = -2{,}0$ t

Finalmente el esquema queda así:



5° Paso: Planteo de las condiciones de equilibrio:

$\Sigma F_{ix} = 0$ $\quad H_A + 3{,}46\ t - 1{,}5\ t = 0$
$\Sigma F_{iy} = 0$ $\quad V_A + V_B - 2{,}6\ t - 2\ t - 2\ t = 0$
$\Sigma \Gamma_i^{(A)} = 0$ $\quad F_{1y} \cdot 2\ m - P \cdot 2\ m + V_B \cdot 4\ m - F_{2y} \cdot 6\ m = 0$

Resolviendo el sistema se obtiene: $H_A = -\ 1{,}96\ t$
$V_A = +\ 3{,}9\ t$
$V_B = +\ 2{,}7\ t$

El signo negativo en el valor de H_A indica que el sentido de esta componente de reacción es contrario al que se le supuso al comenzar la solución del problema.