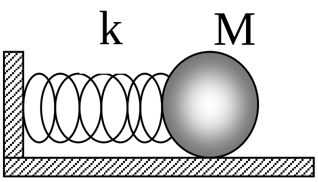
16
Movimiento Armónico Simple.
Sus ecuaciones.

En lo que va del año, hemos estudiado diferentes tipos movimientos; lo que hace diferentes a los tipos de movimiento, son las características de la fuerza que lo propulsa. Pero aún nos falta presentar un movimiento más: el MAS. Repasando lo aprendido hasta ahora y lo que estudiaremos:

MOVIMIENTO	F U E R Z A	
	MÓDULO	DIRECCIÓN
MRU	Fuerza neta nula	
MRUV	constante	constante
MCU	constante	variable
MAS	variable	constante

Una fuerza con las características indicadas para producir un MAS es por ejemplo, la que provee un resorte que obedece a la ley de Hooke: F = -ky. El dispositivo ideal donde se genera el MAS recibe el nombre de oscilador armónico.

El oscilador armónico.



Este dispositivo consta de un resorte perfectamente elástico, carente de masa, fijo por uno de sus extremos y unido a un cuerpo masivo por el otro; el eje del resorte es horizontal y el movimiento de la masa ocurre sin rozamiento.

Si apartamos la masa M de su posición de equilibrio (estirando o comprimiendo al resorte), al soltarla, inicia un movimiento alternativo hacia la derecha y la izquierda, en torno de la posición de equilibrio. Éste es el MAS.

Puntualizaremos a continuación las principales características que posee este movimiento:

♦ Es periódico, o sea que se repite en su forma, a intervalos iguales de tiempo.

♦ Es armónico. Este calificativo obedece a razones históricas; antiguamente se le daba el nombre de armónicas a las funciones trigonométricas seno y coseno. Como en las ecuaciones horarias de este movimiento, como veremos enseguida, invariablemente alguna de estas funciones está presente, por extensión se le dio el nombre de armónico al movimiento.

♦ La trayectoria es rectilínea.

♦ La fuerza es elástica. Esto significa que obedece estrictamente a la ley de Hooke.

Vale la pena advertir que no todos los cuerpos elásticos obedecen a la ley de Hooke; pero sólo cuando es así, el movimiento recibe el nombre de MAS. Caso contrario, al movimiento se le da un nombre más general: movimiento oscilatorio armónico.

La ley de Hooke se plantea tanto para la traslación como para la rotación:

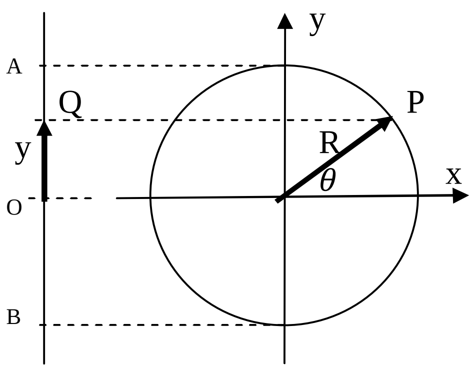
la traslación: $F = -ky$ En la rotación: $\Gamma = -k\theta$

La importancia del movimiento que comenzamos a estudiar está en que él ocurre espontáneamente en la naturaleza y de una manera muy difundida. No es simplemente porque ocurre cuando tenemos una masa vinculada en el extremo de un resorte. Así por ejemplo lo encontramos en el movimiento de los puntos de una cuerda de violín en vibración, en un péndulo en oscilación y en los átomos dentro de una molécula.

Glosario.

- OSCILACIÓN COMPLETA: Porción de movimiento comprendida entre dos pasos sucesivos y con el mismo sentido, por un punto.
- PERÍODO (T): Tiempo requerido para realizar una oscilación completa.
- FRECUENCIA (f): Cantidad de oscilaciones completas realizadas en la unidad de tiempo.
- ELONGACIÓN (y): Distancia desde la posición de equilibrio hasta la partícula, para un instante dado.
- AMPLITUD (R): Es la máxima elongación.

Ecuaciones horarias del MAS.



Para deducir las ecuaciones horarias del MAS es necesario saber que este movimiento puede considerarse como la proyección sobre un eje cualquiera, de un MCU (ver figura). Mientras el punto P recorre la circunferencia con MRU, su proyección sobre el eje y (punto Q) realiza un MAS. $\vec{R}$ es el vector posición del punto P; $\vec{y}$ es el vector elongación del punto Q. La relación entre ambos es:

$$y = R \cdot \text{sen}\,\theta$$

En esta expresión, θ es función del tiempo; la función que los relaciona es la ecuación horaria de la posición angular del MRU: $\theta = \theta_0 + \omega t$

Reemplazando, obtenemos la ecuación horaria de la elongación del MAS:

$$y = R \cdot \text{sen}\,(\theta_0 + \omega t) \qquad (1)$$

Las restantes ecuaciones horarias se obtienen por derivación:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega R \cdot \cos\,(\theta_0 + \omega t) \qquad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 R \cdot \text{sen}\,(\theta_0 + \omega t) = -\omega^2 y \qquad (3)$$

Relación entre ω, k y M

En el MAS tenemos tres importantes constantes: la del resorte (k), la masa colocada en su extremo (M) y ω que llega a través de la relación que el MAS tiene con el MCU. Es la velocidad angular del MCU y es constante; pero cuando ω aparece en el MAS, le damos otro nombre: es la frecuencia angular del MAS.

Estas tres constantes no son independientes sino que están vinculadas matemáticamente; para hallar la expresión que las relaciona, partiremos de la 2° ley de Newton: $F = M \cdot a$ Ésta es una expresión general, que vale para cualquier movimiento; para particularizarla al caso específico del MAS, reemplazaremos F por la expresión de la ley de Hooke y a la aceleración, por la (3):

$$-ky = M \cdot (-\omega^2 y)$$

Simplificando: $k = M \cdot \omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (4)$

Período y frecuencia

Sabemos que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Ésta es también una expresión genérica del período; sirve en cualquier movimiento periódico. Para particularizarla para el MAS, reemplazaremos ω por la (4):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

Problemas.

1- Una partícula realiza un MAS de 1,83 m de amplitud, alcanzando una velocidad máxima de 3,05 m/s. Determinar el valor del período del movimiento.

Solución:

$$v_{max} = \omega \cdot R \qquad \rightarrow \qquad \omega = \frac{v_{máx}}{R} = \frac{3{,}05\ {}^{m}/_{s}}{1{,}83\ m} = 1{,}66\ \frac{1}{s}$$

Como $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{1{,}66} = 3{,}77\ s$

2- La jaula de un pájaro está suspendida de un resorte. Cuando el pájaro, de 0,2 kg está en su percha, la jaula baja 0,25 cm con respecto a su nivel cuando está vacía. La masa de la jaula es de 0,8 kg. Calcular los valores a) de la constante del resorte; b) del período de oscilación de la jaula vacía.

Solución:

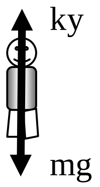
-Peso del pájaro: $m \cdot g = 0{,}2 \cdot 10 = 2$ N

a) $k = \frac{F}{y} = \frac{2\ N}{0{,}025\ m} = 800\ N/m$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8\ kg}{800\ N/m}} = 0{,}20\ s$

3- Un automóvil va por un camino cuya superficie está ondulada. Un pasajero vibra verticalmente con MAS cuya amplitud es R = 2,45 cm. ¿Cuál es la máxima frecuencia a la cual permanecerá en contacto con el asiento?

Solución:



En el límite, los módulos de la fuerza elástica y del peso del pasajero, serán iguales: ky = mg

Luego: $\frac{k}{m}$ = $\frac{g}{y}$ Reemplazando, dentro de la raíz de la fórmula de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{10}{0{,}0245}} = 3{,}18\ \frac{vibraciones}{s}$$

La ecuación diferencial del MAS

A partir de la 2° ley de Newton: F = M•a y para referirla al caso particular del MAS, reemplazamos F por la ley de Hooke y a la aceleración, por $\frac{d^2y}{dt^2}$:

$$-ky = M\bullet\frac{d^2y}{dt^2} \quad\rightarrow\quad M\bullet\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M}y = 0$$

Ésta es la ecuación diferencial del MAS; se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, incompleta y homogénea. Nótese que el coeficiente del término de la variable sin derivar ($\frac{k}{M}$) según la (4) es ω^2.

Solamente el MAS posee una ecuación diferencial con las características apuntadas arriba. Ningún otro fenómeno de la naturaleza posee una ecuación diferencial del mismo tipo. Aprovecharemos esta circunstancia para estudiar la próxima clase los diferentes tipos de péndulos, con el propósito de encontrar la expresión del período de cada uno de ellos. En cada caso buscaremos la ecuación diferencial del péndulo y mostraremos que es del mismo tipo que la ecuación diferencial del MAS. Comprobado eso, la fórmula del período del MAS, servirá para dicho péndulo y nuestro trabajo se reducirá a adaptar esta fórmula a los elementos particulares del péndulo en consideración.

17
Aplicaciones del MAS

Estamos estudiando el MAS, un movimiento que se caracteriza por ser la posición una función periódica senoidal del tiempo. Todo MAS es periódico, pero no todo movimiento periódico es un MAS.

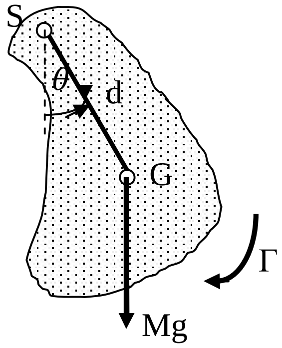
El caminar es un ejemplo de movimiento periódico, pero que no es un MAS. A propósito, todos los animales que caminan, (incluido el ser humano) tienen un ritmo natural de marcha (una frecuencia de pasos por minuto) que les es propia. ¿De qué depende la rapidez con que lo hacen? Por un lado, de la longitud de las patas (o piernas): piernas más largas permiten una longitud de paso (zancada) mayor. Sin embargo, un perro, con piernas de 20 cm nos gana en una carrera, a pesar que nuestras piernas son 4 veces más largas. Hay otro factor a tomar en cuenta. Los animales de piernas largas, como las jirafas, tienen en general una frecuencia de paso baja y viceversa. Así, pruebas fósiles demuestran que el Tyrannosaurus rex, tenía piernas de 3 m de longitud y daba pasos de 4 m de longitud; sin embargo su rapidez de marcha era comparable a la del hombre.

En esta clase estudiaremos diferentes tipos de péndulos con el propósito de obtener una fórmula que nos permita calcular el valor del período de oscilación.

El péndulo físico.

Recibe el nombre de péndulo físico, cualquier cuerpo rígido soportado de tal forma que pueda oscilar en un plano vertical en torno de algún eje que pase por uno de sus puntos.

De hecho todos los péndulos reales son péndulos físicos; es como el “padre” de todos los péndulos. La figura muestra un cuerpo de forma cualquiera, plano, que puede girar sin rozamiento alrededor de un eje y que en este momento se encuentra apartado de su posición de equilibrio en un ángulo θ. Nótese que θ es un ángulo que se mide a partir de la posición de equilibrio; así que es un ángulo orientado.



Lo primero que debemos ubicar son 2 puntos importantes: S (punto de suspensión) y G (centro de gravedad) La distancia entre ambos puntos es "d". La posición de equilibrio es aquella en la que G se encuentra en la vertical que pasa por S. La torca restauradora es Γ cuyo sentido siempre es opuesto al del ángulo θ. Su expresión es:

$$\Gamma = - Mgd \bullet \text{sen}\ \theta$$

Los factores M, g y d son constantes, y vamos a agruparlos bajo una "C": $C = Mgd$

Luego: $\Gamma = -C \bullet \text{sen}\ \theta$

Hemos llegado a una expresión que no es igual a la ley de Hooke para la rotación: ($\Gamma = -C\theta$). Esto nos indica que el péndulo físico, cuando oscila, NO realiza un MAS.

Vamos a imponer entonces una restricción: que el ángulo θ sea pequeño (por ejemplo, menor de 6°). Siendo así, se cumple que θ (rad) y sen θ son aproximadamente iguales. Con esto logramos que la ley de Hooke se nos cumpla y que el movimiento del péndulo pueda ser considerado un MAS. Entonces podemos seguir adelante con nuestra deducción, pero no debemos olvidar que a partir de este momento, todo lo que se deduzca sólo será válido para θ pequeños.

Nuestro próximo paso será obtener la ecuación diferencial del péndulo físico. Partimos de la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación:

$$\Gamma = J \bullet \alpha$$

Y reemplazando Γ por su expresión en la ley de Hooke y a α por $\frac{d^2\theta}{dt^2}$:

$$-C\theta = J^{(S)} \bullet \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ordenando: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J^S}\,\theta = 0$$ EC. DIF. DEL PÉNDULO FÍSICO

Esta ecuación es del mismo tipo de la del MAS. En su momento vimos que el coeficiente del término de la variable sin derivar, de la ecuación diferencial representa a ω^2. Luego en el péndulo físico,

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J^S}}$$

La expresión del período es: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J^S}{C}}$

Reemplazando C por su expresión, queda finalmente: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J^S}{Mgd}}$

El péndulo simple.

Un péndulo simple es un cuerpo idealizado, consistente en una masa puntual, unida al extremo de una cuerda sin masa e inextensible.

Para obtener la fórmula del período, haremos una analogía entre sus elementos y los correspondientes en el péndulo físico. Llamaremos *l* a la longitud de la cuerda y m a la masa suspendida. Entonces:

$J = m \cdot l^2$ $M = m$ $d = l$

Haciendo estos reemplazos en la fórmula del período del péndulo físico, obtenemos la conocida expresión del período del péndulo simple:

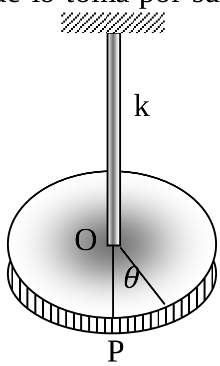
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como se ve, para un lugar determinado (g = cte) T depende únicamente de la longitud de la cuerda. No depende de la amplitud de las oscilaciones ni del valor de la masa colocada en su extremo. ¿Significa entonces que si uno variara la masa del péndulo de un reloj, éste no adelantaría ni atrasaría?

En el péndulo físico, T tampoco depende de M. Probarlo.

El péndulo de torsión.

La figura muestra un disco suspendido mediante un alambre que lo toma por su centro de masa. Estando el disco en equilibrio, marcamos sobre él el radio OP. Si ahora giramos el disco en un ángulo θ, el alambre se torsionará y ejercerá una Γ sobre el disco que tenderá a volverlo a la posición inicial; ésta es la torca restauradora. Para θ pequeños, se cumple que Γ es proporcional a θ, o sea que se cumple la ley de Hooke:



$$\Gamma = -k \cdot \theta$$

donde k es la constante de torsión, cuyo valor depende de las propiedades del alambre.

El signo menos indica que $\vec{\Gamma}$ y $\vec{\theta}$ son vectores de sentidos opuestos.

A continuación deduciremos la ecuación diferencial de este péndulo. A partir de la ley fundamental de la dinámica de la rotación:

$$\Gamma = J_{cm} \cdot \alpha$$

y reemplazando: $$-k \cdot \theta = J_{cm} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ordenando, se obtiene la ecuación diferencial del péndulo de torsión:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{J_{cm}}\,\theta = 0$$

que por sus características corresponde a un MAS. Por lo tanto, el coeficiente del término que tiene a la variable sin derivar, equivale a ω^2:

$$\frac{k}{J_{cm}} = \omega^2$$

Para obtener la fórmula del período se reemplaza esta expresión de ω en la fórmula general del período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{cm}}{k}}$$

Péndulo simple sincrónico.

Se llama así, al péndulo simple hipotético, que se equivale con otro péndulo dado (físico, de torsión, etc) en el sentido de igualar con el valor de su período, al período del péndulo dado. Cuando en un problema se pide calcular el péndulo simple sincrónico, lo que se debe hallar es la longitud que ese péndulo deberá tener, para que se cumpla tal equivalencia. Por ejemplo, si se pide hallar el péndulo simple sincrónico equivalente a un péndulo físico dado, se igualan las fórmulas de período de ambos péndulos:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J^S}{Mgd}} \quad \rightarrow \quad \frac{l}{g} = \frac{J}{Mgd} \quad \rightarrow \quad l = \frac{J}{Md}$$

Problemas.

1- Una barra homogénea de 1 m de longitud, se cuelga por uno de sus extremos y cuando se la aparta de su posición de equilibrio en un ángulo θ pequeño, comienza a oscilar con un período T = 1,64 s. Determinar el valor de la aceleración de la gravedad.

DATO: J_{CM} (barra) = $\frac{1}{12} M \cdot l^2$

Solución:

Calculamos primero el $J^{(S)} = JC_M + M \cdot d^2 = \frac{1}{12} M \cdot l^2 + M \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$

Reemplazando en la fórmula del período del péndulo físico:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2Ml^2}{3Mgl}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}}$$

Despejando g: $g = \frac{8}{3}\, l \cdot \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = 9{,}79 \text{ m/s}^2$.

2- Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa M = 0,015 kg y radio R = 0,050 m se cuelga de una rama con un lazo de alambre unido a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcular su período. DATO: J_{CM} (esfera hueca) = $\frac{2}{3} M \cdot R^2$

Solución:

Por Steiner: $J^{(S)} = J_{CM} + MR^2 = \frac{2}{3} M \cdot R^2 + M \cdot R^2 = \frac{5}{3} M \cdot R^2$

Reemplazando en la fórmula del período del péndulo físico:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5 \cdot R}{3 \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}05}{3 \cdot 10}} = 0{,}57\ s$$

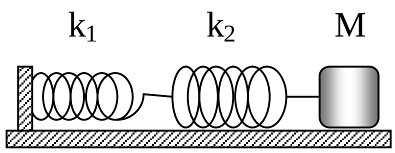
18
M.A.S. Otras consideraciones

Resortes agrupados.

Estudiaremos a continuación el caso del movimiento de una masa M que se encuentra vinculada a dos (o más) resortes, de constantes k_1 y k_2 respectivamente. En este caso se procurará determinar cuánto debería vales la constante elástica de un único resorte (k_{uiveq} que fuera capaz de producir sobre la masa, el mismo MAS que el que producen juntos los resortes originales.

Existen dos formas de combinar los resortes: en serie y en paralelo, que pasamos a considerar:

1° CASO: Resortes en serie.



En este caso, el alargamiento del conjunto es igual a la suma de los alargamientos de cada resorte:

$X = x_1 + x_2$ (1)

Las fuerzas elásticas son todas iguales:

$Fe = Fe_1 + Fe_2$

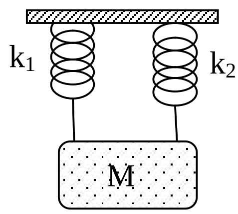
Por Hooke: $Fe_1 = k_1 \bullet x_1 \rightarrow x_1 = Fe_1/k_1$

$Fe_2 = k_2 \bullet x_2 \rightarrow x_2 = Fe_2/k_2$

Reemplazando en (1):

$$\frac{F}{k_{equ}} = \frac{Fe_1}{k_1} + \frac{Fe_2}{k_2} \qquad \frac{1}{k_{equ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

2° CASO: Resortes en paralelo.



Aquí todos los resortes se estiran igual, y el alargamiento del conjunto es igual al de un resorte cualquiera:

$X = x_1 = x_2$

En cambio la fuerza elástica total es igual a la suma de las fuerzas elásticas en cada resorte:

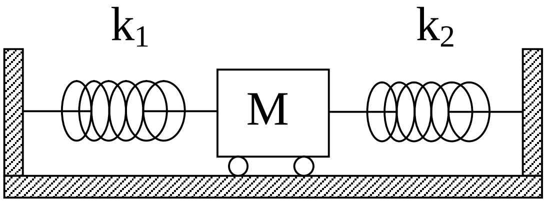
$Fe = Fe_1 + Fe_2$ (1)

Por Hooke: $Fe_1 = k_1 \bullet x_1$ $Fe_2 = k_2 \bullet x_2$

Reemplazando en la (1): $k_{eq}X = k_1 \bullet x_1 + k_2 \bullet x_2$ $K_{equ} = k_1 + k_2$

Problemas:

1- Analizar si los resortes que se muestran en el dibujo, están conectados en serie o en paralelo.



Solución: Se M se corre hacia un costado, un resorte se acorta y el otro se alarga, pero ambos en la misma medida; luego $x_1 = x_2$; eso ocurre cuando la conexión es en paralelo.

2- Un resorte de masa despreciable, de k = 7 N/m se corta en dos partes iguales. a) ¿Cuánto vale el k de cada una de las mitades? b) Ambas mitades, unidas en paralelo, con sus ejes verticales, soportan un cuerpo de masa M; si el sistema vibra con f = 3 Hz, ¿cuánto vale M?

Solución:

a) Se puede considerar que cuando el resorte estaba entero, era lo mismo que si tuviera sus dos mitades puestas en serie; luego:

$$\frac{1}{k_{equ}} = \frac{1}{k\prime} + \frac{1}{k\prime} \qquad k' = 2 \cdot k_{equ} = 2 \cdot 7 = 14\ \frac{N}{m}$$

b) Ahora, con las mitades en paralelo, el nuevo k es:

$$k_{equ} = k' + k' = 14 + 14 = 28\ \text{N/m}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad M = \frac{k}{(2\pi f)^2} = 0{,}0788\ kg \cong 79\ g$$

Valores de v y de a en el MAS

Hemos visto que en el MAS, tanto v como a tienen valores variables, que dependen de la posición en que se encuentre la partícula. Nos proponemos encontrar dónde estas magnitudes valen cero y dónde son máximas.

Sean A y B los extremos de la trayectoria seguida por una masa que realiza un MAS; O (punto medio) representa la posición de equilibrio. La fuerza que el resorte aplica, tiene en todo momento su sentido dirigido hacia O y su módulo es nulo en O y crece hacia los extremos, siendo máxima justamente en ellos. A través de F = M•a vemos que a varía de la misma manera que F, por lo que es máxima en los extremos A y B y nula en la posición de equilibrio O.

A	O	B
$a_{máx}$	$a = 0$	$a_{máx}$
$V = 0$	$V_{máx}$	$V = 0$

Por el contrario, v es nula en los extremos (aquí M se detiene para cambiar el sentido del movimiento) y se hace máxima en la posición de equilibrio, a la que llega acompañada por una a que si bien tiene módulo variable, tiene el sentido del movimiento; pero cuando traspasa O, a pasa a tener sentido opuesto al movimiento, y comienza a frenar a la masa.

Los trapecistas de circo hacen sus demostraciones de acrobacia, cuando el trapecio está llegando a un extremo, porque allí la velocidad es muy baja, y tienen más tiempo para organizar sus movimientos y coordinarlos con los de sus compañeros.

La energía en el MAS

Teniendo en cuenta que en el MAS sólo intervienen fuerzas conservativas (no hay fricción), la energía mecánica debe conservarse, teniendo que cumplirse que:

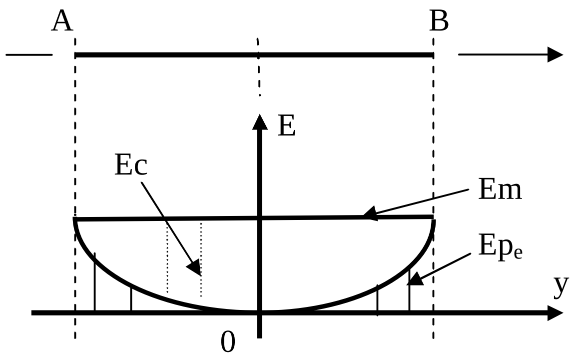
$$Em = Ep_e + Ec$$

Como el movimiento ocurre en dirección horizontal, la Ep_g es constante a lo largo de toda la trayectoria, y por eso no la tomamos en cuenta. Nos proponemos trazar un diagrama cartesiano E = f(y) que nos muestre cómo varían la Em, la Epe y la Ec a medida que la masa va recorriendo su trayectoria.

Si la Em es constante, estará representado por una línea horizontal; (ver figura). La Epe es la energía que se encuentra almacenada en el resorte y depende de "y" según la relación:

$$Ep_e = ½\, ky^2$$

Ella es nula en la posición de equilibrio, donde y = 0 y es máxima donde la deformación del resorte es máxima, o sea en los extremos A y B, donde el $|y|$ es máximo. Pero es los extremos, por ser v = 0, es Ec = 0, lo que hace que Ep_e = Em. Todo esto me permite ubicar tres puntos de la curva de la Ep_e; pero, ¿qué clase de curva es?: la ecuación escrita arriba, corresponde a una función de 2° grado en "y", por lo que es una parábola. (Trazamos entonces la parábola en el diagrama).



Las barras verticales comprendidas entre la parábola y el eje de abscisas miden Epe, mientras que las barras verticales punteadas complementarias (de la parábola hacia arriba hasta la horizontal de Em), miden la Ec.

La fórmula para calcular la Ec es la conocida: $Ec = ½\, mv^2$. De modo que conocemos fórmulas para hallar la Ep_e y para la Ec; sin embargo no conocemos ninguna para hallar en forma directa la Em. Pero ahora podemos obtenerla. En los extremos de la trayectoria, al ser $Em = Ep_e$ y teniendo en cuenta que en los extremos la "y" es máxima, o sea es la amplitud A:

$$Em = ½\, kA^2$$

La energía mecánica de una partícula en MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Problema.

Una porrista ondea su pompón en MAScon amplitud de 18 cm y frecuencia de 0,85 Hz. Calcular: a) la magnitud máxima de de la aceleración y de la velocidad; b) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es y = + 9 cm; c) el tiempo que tarda en moverse directamente dede la posición de equilibrio hasta un punto situado a 12 cm de distancia.

Solución:

$$\omega = 2\pi f = 6{,}28 \bullet 0{,}85 = 5{,}34\ {}^{1}/_{s}$$

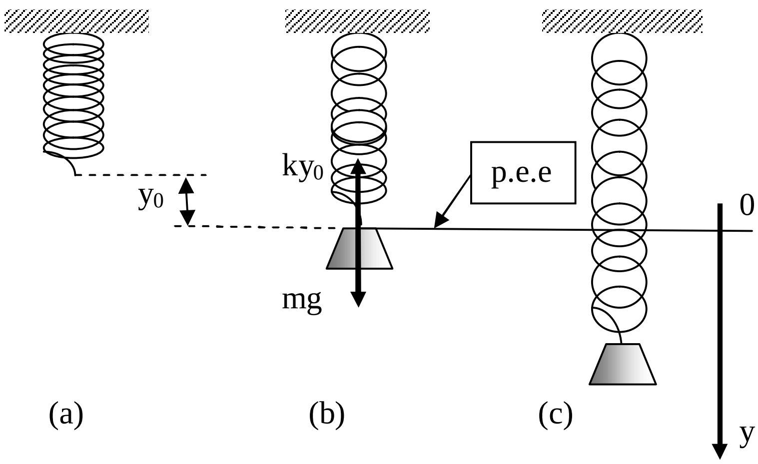
a) $v_{máx} = \omega A = 5{,}34 \cdot 0{,}18 = 0{,}96$ m/s
$a_{máx} = \omega^2 A = 5{,}34^2 \cdot 0{,}18 = 5{,}13$ m/s^2.

b) $a = -\omega^2 \cdot y = -(5{,}34)^2 \cdot 0{,}09 = -2{,}56$ m/s^2.
$y_b = A \text{ sen } \theta_b \quad \rightarrow \quad \theta_b = \text{arc sen } \frac{y_b}{A} = arc\ sen\ \frac{0{,}09}{0{,}18} = 30°$
$v = \omega A \cos \theta = 5{,}34 \cdot 0{,}18 \cdot \cos 30° = 0{,}83$ m/s

c) $y_c = A \text{ sen } \theta_c \quad \rightarrow \quad \theta_c = \text{arc sen } \frac{y_c}{A} = arc\ sen\ \frac{0{,}12}{0{,}18} = 0{,}7297\ radianes$
$\theta_c = \omega t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\theta_c}{\omega} = \frac{0{,}7297}{5{,}34} = 0{,}14\ s$

MAS vertical.

Supongamos que colgamos un resorte de constante k y suspendemos de él un cuerpo de masa m. Las oscilaciones ahora serán verticales; ¿seguirán siendo MAS? Para considerar este caso, nos remitimos a las figuras de abajo. En (a) se muestra al resorte con su longitud natural , sin ninguna masa colocada en su extremo. En (b) se muestra al mismo resorte, pero con la masa m en su extremo; su extremo libre ha descendido en una longitud y_0 hasta encontrar la *posición de equilibrio estático* (p.e.e.) En esta



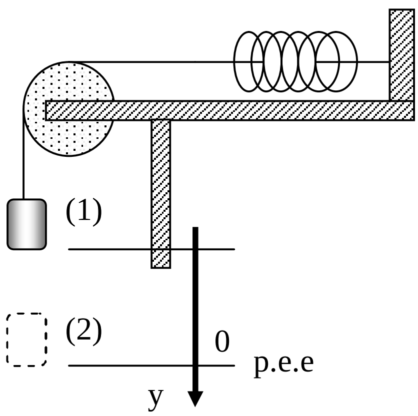
posición, la fuerza elástica del resorte se equilibra con el peso del cuerpo:

$$mg = ky_0 \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k}$$

En (c) la masa m ha sido apartada de su pee, y cuando se la suelte iniciará un MAS. Es importante saber que la masa m oscila simétricamente alrededor de su ppe, por lo que nuestro sistema de referencia (un eje vertical y) convendrá adoptarlo con su origen en la p.e.e.

Problema.

En el dispositivo de la figura, la polea tiene un $J_{cm} = 0{,}5$ kg•m^2 y un R = 30 cm; el resorte tiene un k = 2 N/m. Se ata al extremo de la cuerda, una masa de 100 g y se la suelta desde esta posición. Determinar: a) la p.e.e. b) la rapidez con que la masa pasa por la p.e.e.



<u>Solución</u>:

a) Si bajamos lentamente con la mano a la masa m, evitando que oscile hasta dejarla en su posición de reposo (pee), se cumple en ella:

$$mg = ky_0 \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k} = 0{,}5 \text{ m}$$

b) La velocidad con que la masa pasa por la pee es la máxima; para calcularla aplicamos el principio de la conservación de la Em, dado que se trata de un sistema conservativo. Podemos poner:

$$Em_1 = Em_2$$

$$Epg_1 = Ec_{tras} + Ec_{rotac} + Epe_2.$$

$$mgy_0 = ½\, mv^2 + ½\, J_{cm}\cdot\omega^2 + ½\, ky_0^2$$

Reemplazando y calculando, resulta v = 0,297 m/s

Oscilaciones compuestas.

Estudiaremos a continuación el caso de una partícula que se encuentra sometida a la acción simultánea de 2 MAS independientes. El movimiento resultante de la partícula será otro MAS cuyas características podrán conocerse aplicando el principio de superposición de efectos. Nosotros sólo consideraremos el caso en que ambos MAS originales tienen la misma dirección. Dentro de este caso, veremos dos posibilidades:

1°- Ambos MAS son de la misma frecuencia angular

2°- Ambos MAS son de diferente frecuencia angular

1° caso: Ambos MAS son de igual dirección e igual ω

Sean las ecuaciones horarias de la elongación de ambos MAS:

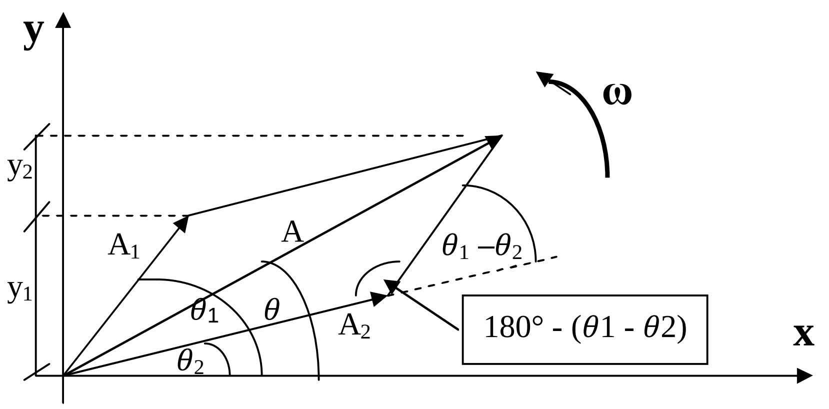
$$y_1 = A_1\cdot\text{sen}\,(\theta_1 + \omega t)$$

$$y_2 = A_2\cdot\text{sen}\,(\theta_2 + \omega t)$$

La ecuación horaria del MAS resultante será:

$$y = A\cdot\text{sen}\,(\theta + \omega t)$$

Las incógnitas son A y θ; nuestra tarea es encontrar cómo estas incógnitas están relacionadas con los datos originales. Recordaremos que todo MAS puede ser considerado como la proyección sobre un eje (elegimos el eje y) de un MCU. Mientras una partícula realiza un MCU, su vector posición está girando a ω = cte, en torno del origen; un vector giratorio, se llama fasor. La proyección de este fasor sobre el eje “y” nos da la elongación del MAS instante a instante.



Los vectores A_1 y A_2 se componen para dar el vector A, cuyo módulo, por el teorema del coseno es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\cdot A_1\cdot A_2\cdot\cos\,(\theta_1 - \theta_2)}$$

La fase inicial se calcula con:

$$\theta = arc\ tg\ \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ \theta_2}{A_1 \cdot \cos\theta_1 + A_2 \cdot \cos\theta_2}$$

Una vez obtenidas A y θ, se escribe la ecuación de la elongación del movimiento resultante como:

$$Y = A \cdot sen\ (\theta + \omega t)$$

donde ω es el mismo de los MAS originales. Consideraremos a continuación un par de casos extremos:

Interferencia constructiva:

Si $\theta_1 = \theta_2$, significa que ambos MAS originales están en fase; en ese caso A adquiere su máximo valor, siendo éste directamente:

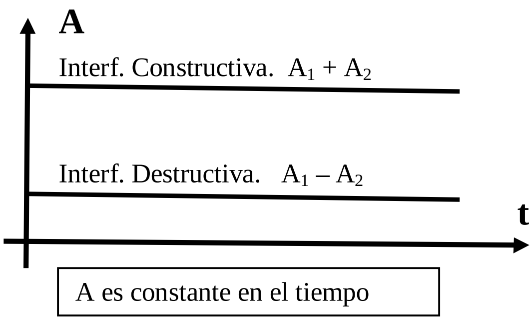
$$A = A_1 + A_2.$$

Interferencia destructiva:

Si en cambio θ_1 y θ_2 difieren en π, significa que ambos MAS están en oposición de fase; en ese caso A adquiere su mínimo valor, siendo éste directamente:

$$A = A_1 - A_2.$$

Las expresiones de la amplitud, tanto en la interferencia constructiva como en la destructiva, pueden deducirse a partir de la expresión de A de la página anterior.

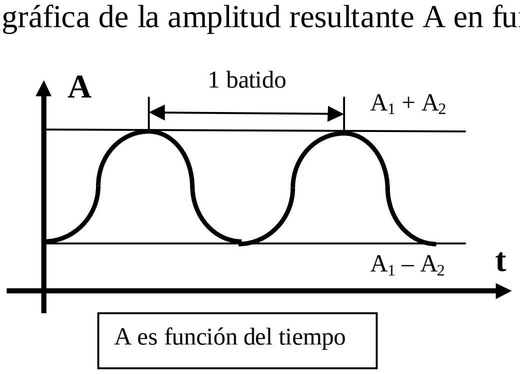


Haciendo un resumen de este 1° caso, lo importante es que la amplitud resultante NO ES función del tiempo

Las líneas horizontales en el gráfico de la figura, corresponden a los casos de interferencia. Para cualquier otro caso, la amplitud estará representada por una línea horizontal que estará comprendida dentro de la franja determinada por las líneas de la figura.

2° caso: Ambos MAS son de igual dirección pero distinta ω

Si los fasores A_1 y A_2 giran con distintas frecuencias angulares (como ocurre con las agujas del reloj) pasarán periódicamente por un momento de interferencia constructiva (cuando sus direcciones y sentidos coincidan) y por otro momento de interferencia destructiva (cuando sus sentidos se opongan). Por lo tanto, la amplitud resultante ES función del tiempo y varía periódicamente con él. La representación gráfica de la amplitud resultante A en función del tiempo es ahora:



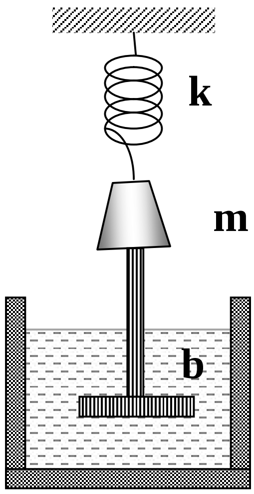
Si se trata de 2 ondas sonoras emitidas por sendas fuentes (por ej: 2 diapasones) con ω ligeramente diferentes, la interferencia de ellas en el oído alterna entre la interferencia constructiva y la destructiva. La intensidad del sonido alterna entre alto y bajo. Cada pulsación se denomina batido. El batido tiene una frecuencia calculable como la diferencia entre las frecuencias de los dos focos sonoros.

El fenómeno de las pulsaciones o batidos se aplica para comparar una frecuencia desconocida con otra conocida, como sucede cuando se afina un instrumento musical con un diapasón. El oído puede detectar pulsaciones hasta aproximadamente 10 por segundo; por encima de este valor las fluctuaciones resultan demasiado rápidas para ser percibidas.

El ciudad de Viena posee la mayor densidad de músicos del mundo; en el servicio de telefonía local, cuando uno llama al número *1640 no es atendido por ningún contestador automático ni escucha la voz de ninguna telefonista; sólo escucha un silbido continuo que corresponde a la frecuencia de la nota “la” (440 Hz). Con ella, afinan sus instrumentos los músicos de Viena.

También se utilizan los batidos para detectar pequeñas variaciones de frecuencia como las producidas en un haz de radar reflejado desde un auto en movimiento. La velocidad del auto se halla midiendo la variación de frecuencia, determinada midiendo los batidos producidos por el haz reflejado y la fuente de radar original. Para comprender mejor esto, supongamos que un muchacho tiene un canasto lleno de pequeñas pelotitas, y se encuentra ubicado frente a una pared móvil. En un momento dado comienza a arrojar las pelotitas sucesivamente contra la pared, con una frecuencia de 1 por segundo. Si la pared no se mueve, las pelotitas que regresan después de haber rebotado, tendrán también la misma frecuencia de 1 por segundo. Pero si la pared se mueve, acercándose o alejándose, la frecuencia de las pelotitas que regresan variará, aumentando o disminuyendo respectivamente en cada caso.

Oscilaciones amortiguadas



Hasta ahora hemos estudiado el caso del oscilador armónico simple, en el cual no intervienen las fuerzas de rozamiento; pero éste no es un caso real, ya que sinó un péndulo o un cuerpo suspendido de un resorte oscilarían eternamente; pero sabemos que la amplitud de la oscilación disminuye poco a poco hasta extinguirse, como resultado de la fricción. Este movimiento real se llama *movimiento armónico amortiguado*. La fricción proviene a menudo de la resistencia del aire o de las fuerzas internas (fricción entre moléculas dentro del resorte). Se ha encontrado que el módulo de la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo, y su sentido es opuesto al de ésta. Si nombramos con F_R a la fuerza de amortiguamiento, será:

$$F_R = -b \bullet v$$

siendo b la constante de amortiguamiento, siempre positiva.

La figura muestra muestra el dispositivo generador de oscilaciones amortiguadas.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL OSCILADOR AMORTIGUADO.

Partiendo de la 2° ley de Newton: $F_{neta} = m \bullet a$

Desarrollando para este caso: $-ky - bv = m \bullet a$

$$-ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Ordenando:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad (1)$$

Si b es pequeña, la solución de la ecuación diferencial (1) es:

$$y = A \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2m}} \cdot \cos(\omega' \cdot t + \theta_0) \qquad (2)$$

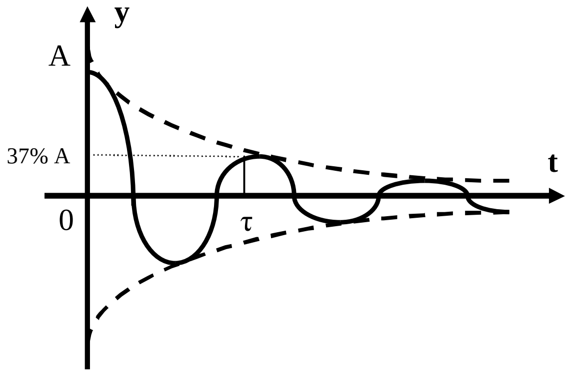
donde $A \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2m}}$ recibe el nombre de factor de amplitud. La frecuencia angular ω' está dada por:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (3)$$

Si no hubiera fricción, sería b = 0; en este caso vemos en la (3) que ω' se hace igual a ω. Pero habiendo fricción resulta:

$$\omega' < \omega$$

Esto nos indica que el período de la oscilación amortiguada es mayor que el de la oscilación sin amortiguar.



La figura muestra la representación gráfica de la ecuación (2) para el caso en que b es pequeña, o sea que haya baja amortiguación, y para $\theta_0 = 0$.

En la (2) vemos cómo la amplitud tiende a cero al crecer t. Se define al tiempo de vida medio de la oscilación (o constante de tiempo) (τ) como el tiempo que debe transcurrir para que la amplitud de la oscilación se reduzca a $\frac{1}{e} = 0{,}37$ de su valor inicial.

Las líneas asintóticas en guiones de la figura responden a la ecuación que define al factor de amplitud. Para obtener una expresión que permita calcular el valor de τ, tomamos la expresión del factor de amplitud: $A \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2m}}$ donde τ representa el valor de t que hace que el exponente valga -1:

$$-\frac{bt}{2m} = -1 \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{2 \cdot m}{b}$$

Si no hubiera fricción (b = 0) la (2) muestra que sería A = constante, y τ = ∞.

La constante b puede adoptar valores dentro de un rango amplio; para decidir si el valor de b es pequeño o grande, se lo compara con el valor del producto 2•m•ω. De dicha comparación surgen 3 posibilidades:

a) Si b < 2mω se dice que b es pequeño y que el sistema es subamortiguado. Este es el único caso en que el movimiento es periódico, y por lo tanto la ecuación (2) únicamente es válida para este caso. Como que también, la gráfica de arriba ilustra únicamente este caso.

b) Si b = 2mω se dice que hay amortiguamiento crítico; el movimiento no es periódico (no hay oscilaciones) y el sistema se dirige hacia la posición de equilibrio en un tiempo mínimo.

c) Si b > 2mω se dice que b es grande y que el sistema está sobreamortiguado. Como en el caso anterior, el movimiento no es periódico y el sistema se dirige hacia la posición de equilibrio sin oscilar. Sólo que el tiempo que emplea para llegar al equilibrio es mayor al del caso de amortiguamiento crítico.

Los amortiguadores de un automóvil procuran que el vehículo vuelva al equilibrio rápidamente, evitando las oscilaciones. Sin embargo no se los diseña para que respondan con amortiguamiento crítico, sino que se procura que sean ligeramente subamortiguados, por una cuestión de confort. Esto puede comprobarse empujando verticalmente encima de las ruedas del vehículo y observando que se producen una o dos oscilaciones antes de quedar en reposo.

Oscilaciones forzadas.

Hasta ahora hemos estudiado las oscilaciones naturales de un cuerpo, sin o con fricción. Pero una situación diferente se presenta cuando el cuerpo se halla sometido a la acción de una fuerza oscilatoria externa, a la que llamaremos *fuerza impulsora*. Las oscilaciones resultantes reciben el nombre de *oscilaciones forzadas*. Estas oscilaciones tienen la frecuencia de la fuerza impulsora y **no** la frecuencia natural del cuerpo.

En este fenómeno que vamos a estudiar, se da el hecho de que una sucesión de pequeños impulsos periódicos (fuerza impulsora) aplicados con la frecuencia apropiada, es capaz de producir oscilaciones de gran amplitud. Es el caso del niño que, empujando un columpio a intervalos apropiados de tiempo, logra que el columpio se mueva con una amplitud grande. Cuando un cuerpo o sistema es sometido a una amplitud muy grande, ya no es válida la ley de Hooke y se sobrepasa el límite elástico; en tales casos el sistema puede sufrir una ruptura. Un conocido ejemplo de esto lo tenemos en lo que sucedió con el puente de Tacoma sobre el río Potomac. El 1 de julio de 1940 se terminó su construcción en Washington, y se lo abrió al tránsito. Tan solo 4 meses después, un ventarrón moderado puso al puente en oscilación, hasta romper el tramo principal, que se desprendió de los cables y cayó al agua. El viento había producido una fuerza resultante periódica que entró en resonancia con la frecuencia natural de la estructura. Esto provocó un aumento continuo en la amplitud, hasta destruir al puente.

Una formación de soldados que marchan sobre un puente puede hacer que éste vibre en forma creciente hasta alcanzar una amplitud destructiva, si se diera que la frecuencia de sus pasos coincidiera con alguna frecuencia natural del puente; esta es l razón por la que los soldados rompen la marcha al pasar por un puente.

La fuerza impulsora obedece a una expresión del tipo: $F_{impuls.} = F_{máx} \cdot \cos \omega t$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LAS OSCILACIONES FORZADAS.

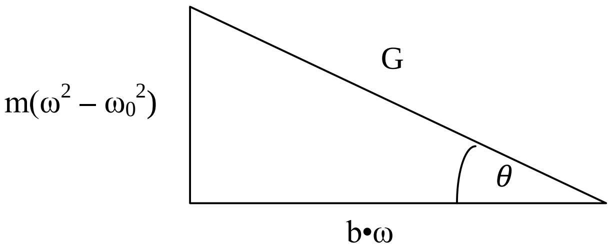
Aplicando la 2° ley de Newton: $F_{neta} = m \cdot a$

$$-ky - b \cdot \frac{dy}{dt} + F_{máx} \cdot \cos \omega t = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (1)$$

donde los términos del 1° miembro, representan respectivamente a la fuerza restauradora, a la fuerza de amortiguamiento y a la fuerza impulsora. En lo que sigue emplearemos la siguiente nomenclatura:

- ω frecuencia de la fuerza impulsora.
- ω_0 frecuencia natural del cuerpo
- b constante de amortiguamiento
- θ ángulo de fase inicial.

La solución de la ecuación diferencial (1) que damos a continuación, contiene elementos y relaciones que, se recordarán más fácilmente usando como ayuda el triángulo rectángulo siguiente:



La solución de la (1) es:

$y = A \bullet \text{sen}\ (\omega t - \theta)$ (2)

donde $A = \frac{F_{máx}}{G}$ (3)

siendo $G = \sqrt{m^2 \cdot (\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2}$ (4)

y la fase θ puede calcularse como:

$\theta = \text{arc cos}\ \frac{b \cdot \omega}{G}$ o bien como $\theta = arc\ tg\ \frac{m \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)}{b \cdot \omega}$

La ecuación (2) nos permite ver que el sistema vibra con ω y no con ω_0; que el movimiento es armónico y que la amplitud no disminuye (A = cte).

Si un sistema carece de amortiguamiento (en realidad siempre lo hay), sería b = 0; en esas condiciones, si además $\omega \rightarrow \omega_0$, la ecuación (4) dará G = 0 y en la ecuación (3) la amplitud tenderá a infinito. En los sistemas amortiguados reales, con $b \neq 0$, existe un cierto valor de ω para el cual la amplitud A es máxima; ese valor de ω se llama *frecuencia de resonancia*.

RESONANCIA es el fenómeno que tiene lugar cuando la frecuencia de la fuerza impulsora (ω) posee un valor tal que hace que las oscilaciones forzadas alcancen su máxima amplitud.