Primer parcial Matemática Discreta I. Tema 1

1. Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,x,y,\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$ y $A = \{1,2,3,4\}$

Decir V o F

$A \subseteq U$ V	$x \notin U$ F
$A \in U$ V	$\varnothing \subseteq U$ V
$\{A\} \subseteq U$ V	$\varnothing \in U$ F
$\{A\} \in U$ F	$\{1,2\} \subseteq U$ V

2. Dadas las siguientes propiedades determinar el valor de verdad de cada una. Justificar (demostrar si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa):

$a|(b+c) \Rightarrow a|b \quad \vee a|c$

$a|b \;\wedge\; a|c \;\Rightarrow\; a|(b+c)$

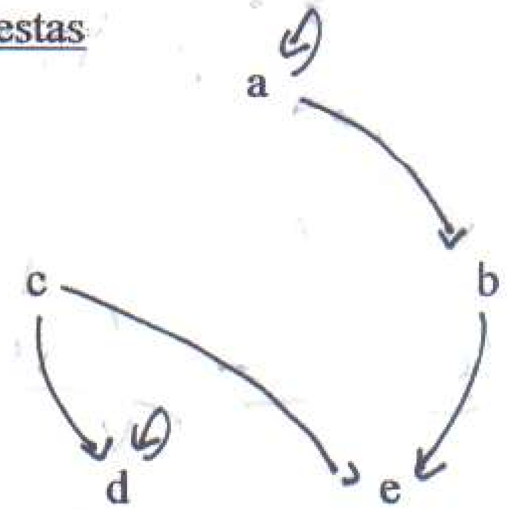
3. Demostrar usando el principio de inducción completa:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Dadas R y S relaciones binarias en A hallar: $\overline{R}, S^{-1}, R \cap S$ justificando las respuestas. Estudiar las propiedades de R justificando las respuestas

$A = \{a,b,c,d,e\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5. Sea $A = \{x \in Z / |x| \le 10\}$ Sea R relación binaria en A definida por: $(x,y) \in R \Leftrightarrow 4|(x-y)$ Demostrar que es de equivalencia. Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

② $a|(b+c) \Rightarrow a|b \vee a|c$ Falsa.

Ejemplo: $\underbrace{2|(7+5)}_{V} \Rightarrow \underbrace{2|7 \vee 2|5}_{F}$ F

$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$ Verdadero

D) $a|b \Rightarrow b = aq \quad q \in \mathbb{Z}$

$a|c \Rightarrow c = aq' \quad q' \in \mathbb{Z}$

$b+c = aq + aq'$

$b+c = a\underbrace{(q+q')}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a|(b+c)$

③ $n=1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$ $\quad =$

$n=h$ $\quad$ HI) $\sum_{i=1}^{h} i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$

$n=h+1$ $\quad$ TI) a demostrar $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$

D) $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \sum_{i=1}^{h} i^2 + (h+1)^2 \underset{HI}{=} \dfrac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 =$

$= (h+1)\dfrac{(h(2h+1)+6(h+1))}{6} = \dfrac{(h+1)(2h^2+7h+6)}{6} = \dfrac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$

↳ factor común $h+1$

↳ Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 7 & 6 \\ -2 & & -4 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

(4)

$\bar{R} = \{(x,y) \in A\times A \,/\, (x,y) \notin R\} = \{(a,c); (a,d); (b,a); (b,b); (b,c); (b,e); (c,a); (c,d); (c,e); (d,a); (d,b); (d,c); (d,e); (e,a); (e,b); (e,c); (e,d); (e,e)\}$

$S^{-1} = \{(x,y) \in A\times A \,/\, (y,x) \in S\} = \{(a,a); (b,a); (e,b), (e,c); (d,c); (d,d)\}$

$R\cap S = \{(x,y) \in A^2 \,/\, (x,y) \in R \wedge (x,y) \in S\} = \{(a,a); (a,b); (d,d)\}$

Propiedades de R
no reflexiva (0 y 1 en la diagonal principal)
no simétrica $\left[\begin{array}{l} \exists (a,a) \in R \wedge (a,a) \in R \\ \exists (a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R \end{array}\right]$

antisimétrica (hay bucles y toda flecha de ida no tiene de vuelta)
no transitiva $\underbrace{(a,b) \in R \wedge (b,e) \in R}_{V} \underset{F}{\Rightarrow} \underbrace{(a,e) \in R}_{F}$

(5) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x| \leq 10\}$ $\quad (x,y) \in R \Leftrightarrow 4 | (x-y)$

a) Reflexiva: $4|(x-x)$ porque $4|0 \Rightarrow (x,x) \in R$

Simétrica: $(x,y) \in R \Rightarrow 4|(x-y) \Rightarrow x-y = 4q \;\; q \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x = 4(\overbrace{-q}^{\in \mathbb{Z}})$

$\Rightarrow 4|(y-x) \Rightarrow (y,x) \in R$

Transitiva: $(x,y) \in R \Rightarrow 4|(x-y) \Rightarrow x-y = 4q \quad q \in \mathbb{Z}$
$(y,z) \in R \Rightarrow 4|(y-z) \Rightarrow y-z = 4q' \quad q' \in \mathbb{Z}$

$x-z = 4(\underbrace{q+q'}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 4|(x-z) \Rightarrow (x,z) \in R$

Luego es de equivalencia

$\bar{0} = \{x \in A \,/\, x = 4q\} = \{0, \pm 4, \pm 8\}$

$\bar{1} = \{x \in A \,/\, x = 4q+1\} = \{1, 5, 9, -3, -7\}$

$\bar{2} = \{x \in A \,/\, x = 4q+2\} = \{2, 6, 10, -2, -6, -10\}$

$\bar{3} = \{x \in A \,/\, x = 4q+3\} = \{3, 7, -1, -5, -9\}$

$A/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$$
\begin{array}{c|c}
M_R \odot M_R & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}
\end{array}
= M_R
$$

Antisimétrica

$$M_R \wedge (M_R)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Reflexiva $\quad x + x = 2x$ es par $\Rightarrow x \, S \, x$

Simétrica $\quad x \, S \, y \Rightarrow x+y$ es par $\Rightarrow y+x$ es par $\Rightarrow y \, S \, x$

Transitiva $\quad x \, S \, y \Rightarrow x+y$ es par $\Rightarrow x+y = 2k$

$\qquad y \, S \, z \Rightarrow y+z$ " " $\Rightarrow y+z = 2k'$

$$x + 2y + z = 2(k+k')$$

$$x + z = 2(k+k'-y)$$

$\Rightarrow x+z$ es par

$A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x| \leq 50\}$

$\bar{0} = \{x \in A \,/\, x \text{ es par}\}$

$\bar{1} = \{x \in A \,/\, x \text{ es impar}\}$

$A = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.