

Primer parcial Matemática Discreta I. Tema 2

1. Demostrar las siguientes propiedades de conjuntos: $A - A = \emptyset$
 $A \cup (B - A) = A \cup B$

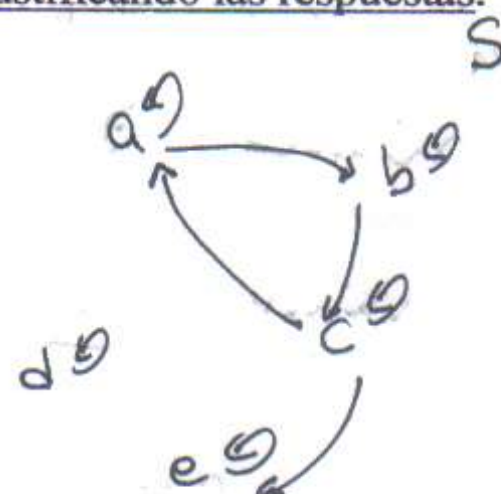
2. Calcular, aplicando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor entre 606 y 108 y expresarlo como combinación lineal de esos números.

3. Demostrar usando el principio de inducción completa:

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$$

4. Dadas R y S relaciones binarias en A hallar: $R^{-1}, \bar{S}, R \cup S$ justificando las respuestas. Estudiar las propiedades de S justificando las respuestas

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5. En el conjunto $A = \{12, 52, 16, 17, 26, 29, 47, 35, 53\}$ se define la relación: $aRb \leftrightarrow$ "la suma de las cifras de a es igual a la suma de las cifras de b" siendo a y b elementos de A.

- Probar que R es de equivalencia
- Hallar las clases de equivalencia
- ¿Con qué elementos está relacionado el 17?
- Determinar la partición de A originada por R.

① $A - A = A \cap \bar{A} = \emptyset$

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$

②
$$\begin{array}{r} 606 \overline{)108} \\ 66 \overline{)5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 108 \overline{)66} \\ 42 \overline{)1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 66 \overline{)42} \\ 24 \overline{)1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \overline{)24} \\ 18 \overline{)2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{)18} \\ 6 \overline{)1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \overline{)6} \\ 0 \overline{)3} \end{array} \rightarrow \text{mcd}$$

$$606 = 5 \cdot 108 + 66 \quad 108 = 1 \cdot 66 + 42 \quad 66 = 42 \cdot 1 + 24 \quad 42 = 24 \cdot 1 + 18 \quad 24 = 18 \cdot 1 + 6$$

De ⑤ $6 = 24 + (-1)18 = 24 + (-1)[42 + (-1)24] = (-1)42 + 2 \cdot 24 \quad \text{③}$

$= (-1) \cdot 42 + 2[66 + (-1)42] = 2 \cdot 66 + (-3) \cdot 42 = 2 \cdot 66 + (-3)[108 + (-1)66] \quad \text{②}$

$= 5 \cdot 66 + (-3)108 \quad \text{①} \quad (-3) \cdot 108 + 5[606 + (-5) \cdot 108] = \boxed{5 \cdot 606 + (-28) \cdot 108}$

③ $n=1 \quad \sum_{i=0}^1 (2i+1) = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) = 1 + 3 = 4$
 $(1+1)^2 = 2^2 = 4 \quad \text{③}$

HI: $n=h \quad \sum_{i=0}^h (2i+1) = (h+1)^2 \quad \text{TI: } n=h+1 \quad \sum_{i=0}^{h+1} (2i+1) = (h+2)^2$

$$D) \sum_{i=1}^{h+1} (2i+1) = \sum_{i=1}^h (2i+1) + [2(h+1)+1] \stackrel{HI}{=} (h+1)^2 + 2h + 2 + 1$$

$$= h^2 + 2h + 1 + 2h + 3 = h^2 + 4h + 4 = (h+2)^2$$

$$(4) R^{-1} = \{(y, x) \in A \times A / (x, y) \in R\} = \{(a, a); (b, a); (c, a); (d, b); (b, c)\} \cup \{(c, c); (d, d)\}$$

$$\bar{S} = \{(x, y) \in A^2 / (x, y) \notin S\} = \{(a, c); (a, d); (a, e); (b, a); (b, d); (b, e); (c, b); (c, d); (d, a); (d, b); (d, c); (d, e); (e, a); (e, b); (e, c); (e, d)\}$$

$$R \cup S = \{(x, y) \in A^2 / (x, y) \in R \cup (x, y) \in S\} = \{(a, a); (a, b); (a, e); (b, d); (c, b); (c, c); (c, e); (b, c); (b, b); (c, a); (c, e); (d, d)\}$$

$S \rightarrow$ reflexiva (todos los elementos tienen bucle)

no simétrica ($\exists (a, a) \in S \wedge (a, a) \in S$)

$\exists (a, b) \in S \wedge (b, a) \notin S$)

antisimétrica (toda flecha de ida no tiene de vuelta y

no transitiva: $\underbrace{(b, c) \in S \wedge (c, d) \in S}_{\vee} \not\Rightarrow \underbrace{(b, d) \in S}_{\neq}$ hay bucles)

(5) a) Reflexiva: suma de cifras de $a =$ suma de cifras de $a \Rightarrow aRa \forall a$

Simétrica: $aRb \Rightarrow$ suma de cifras de $a =$ suma de cifras de b

\Rightarrow suma de cifras de $b =$ suma de cifras de $a \Rightarrow bRa$

Transitiva: $aRb \Rightarrow$ suma de cifras de $a =$ suma de cifras de b
 $bRc \Rightarrow$ " " " " $b =$ " " " " $c \Rightarrow$

\Rightarrow suma de cifras de $a =$ suma de cifras de $c \Rightarrow aRc$

$$\overline{12} = \{12\}$$

$$\overline{52} = \{52, 16\} = \overline{16}$$

$$\overline{29} = \{29, 47\} = \overline{47}$$

$$\overline{17} = \{17, 26, 35, 53\} = \overline{26} = \overline{35} = \overline{53}$$

17 está relacionado con 26, 35 y 53

$$A/R = \{\overline{12}, \overline{16}, \overline{47}, \overline{17}\}$$