Primer parcial Matemática Discreta I. Tema 3

1. Dado A={(1,1)} Hallar P(P(A)). Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$(1,1) \in P(P(A))$ F $\varnothing \in P(A)$ V $\{(1,1)\} \subseteq P(A)$ F

$P(A) \subseteq P(P(A))$ F $\{\{(1,1)\}\} \in P(P(A))$ V

2. Dadas las siguientes propiedades determinar el valor de verdad de cada una. Justificar (demostrar si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa):

$a|b \;\wedge\; a|c \;\Rightarrow a|(tb+sc) \quad t,s \in Z$

$a|c \;\wedge\; b|c \;\Rightarrow (a+b)|c$

3. Demostrar usando el principio de inducción completa:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Sea A = {a,b,c,d,e} y las relaciones R y S definidas sobre A tal que:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y S de equivalencia tal que A/S={ {a,b,d} ; {c,e} }

a) Indicar R por extensión y clasificarla.

b) Dar S por extensión e indicar M_S.

c) Indicar las relaciones $R \cap S$, S^{-1}, $\overline{R}$. Justificar

5. En A=R (conjunto de números reales) se define la siguiente relación: $(x,y) \in S \Leftrightarrow |x| = |y|$

a) Probar que S es de equivalencia

b) Hallar las clases de equivalencia

c) Determinar la partición de R originada por S.

① $P(A) = \{\phi, \{(1,1)\}\}$ $P(P(A)) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{(1,1)\}\}, P(A)\}$

② $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(tb+sc)$ verdadera

D) $a|b \Rightarrow b = aq \quad q \in \mathbb{Z} \Rightarrow tb = aqt$

$a|c \Rightarrow c = aq' \quad q' \in \mathbb{Z} \Rightarrow sc = saq'$

$tb+sc = aqt + asq' = a(\overbrace{qt+sq'}^{\in \mathbb{Z}})$

$\Rightarrow a|(tb+sc)$

$a|c \wedge b|c \Rightarrow (a+b)|c$ Falsa

ej: $\underbrace{4|8 \wedge 2|8}_{V} \Rightarrow \underbrace{6|8}_{F}$ (F)

③ $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1$, $\left(\frac{1.2}{2}\right)^2 = 1$ (=)

$n=h$ $\sum_{i=1}^{h} i^3 = \left[\frac{h(h+1)}{2}\right]^2$ (HI)

TI: $n = h+1 \quad \sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \left[\frac{(h+1)(h+2)}{2}\right]^2$

D) $\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \sum_{i=1}^{h} i^3 + (h+1)^3 = \left[\frac{(h+1).h}{2}\right]^2 + (h+1)^3 = \frac{(h+1)^2 h^2 + 4(h+1)^3}{4}$

$= (h+1)^2 \left[\frac{h^2 + 4(h+1)}{4}\right] = \frac{(h+1)^2(h^2+4h+4)}{4} = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4} = \left[\frac{(h+1)(h+2)}{2}\right]^2$

factor común

(4) $R = \{(a,c);(a,d);(a,e);(b,c);(b,d);(b,e);(c,c);(c,d);(c,e);(d,a);(d,b);(e,a);(e,b)\}$

no reflexiva (0 y 1 en la diagonal principal)

no simétrica ($\exists (a,e) \in R \wedge (e,a) \in R$
$\exists (a,c) \in R \wedge (c,a) \notin R$)

no antisimétrica
$(\underbrace{\exists (a,c) \in R \wedge (c,a) \in R}_{V} \Rightarrow \underbrace{a=c}_{F})$ F

no transitiva $(a,d) \in R \wedge (d,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$ F

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S = \{(a,a);(a,b);(a,d);(b,a);(b,d);(b,b);(d,a);(d,b)(d,d);(c,e);(c,c);(e,c);(e,e)\}$

$R \cap S = \{(x,y) \in A^2 / (x,y) \in S \wedge (x,y) \in R\} = \{(a,d);(b,d);(c,c);(c,e);(d,a)(d,b)\}$

$S^{-1} = \{(x,y) \in A^2 / (y,x) \in S\} = S$

$\bar{R} = \{(x,y) \in A^2 / (x,y) \notin R\} = \{(a,a);(a,b);(b,a);(b,b);(c,a);(c,b);(d,c);(d,d);(d,e);(e,c);(e,d);(e,e)\}$

(5) Reflexiva: $|x| = |x| \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow xSx$

Simétrica: $xSy \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow ySx$

Transitiva: $\left.\begin{array}{l} xSy \Rightarrow |x| = |y| \\ ySz \Rightarrow |y| = |z| \end{array}\right\} \Rightarrow |x| = |z| \Rightarrow xSz.$

b) $a \in \mathbb{R} \quad \bar{a} = \{x \in \mathbb{R} / xSa\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| = |a|\} = \{x \in \mathbb{R} / x = a \vee x = -a\}$

$\Rightarrow \bar{a} = \{a, -a\}$

c) $\mathbb{R}/S = \{\bar{a} / a \in [0, +\infty)\}$