UNLaM - Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

Matemática Discreta **2º Parcial**
Apellido y Nombre: ……………………………………………………………………
DNI:……………………………………………………………………………………….

<u>Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas</u>

1. Sean los siguientes grupos $(Z_2, \bar{+})$ y $(Z'_4, \bar{\ })$. Definir una operación en el producto cartesiano $Z_2 x Z'_4$ de tal manera que sea grupo. Justificar. Indicar neutro, simétricos ¿es conmutativo? Justificar.

2. En el conjunto A = { a,b,c,d,e,f } con la tabla de la operación $\vee$ parcialmente completa: **a)** completarla y definir la tabla de la operación $\wedge$ para que (A, $\vee$, $\wedge$) sea retículo algebraico, **b)** realizar el diagrama de Hasse, **c)** justificar si se trata de un álgebra de Boole. Indicar neutros y complementos, si existen.

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a		b	b	b	a	a
b			b	b	b	b
c				b	c	c
d					d	d
e						f
f						

3. Dibujar el árbol con raíz correspondiente a la siguiente expresión algebraica escrita en notación polaca. Posteriormente determinar el valor del árbol y escribir la expresión en notación polaca inversa. * + 4 + 3 $\uparrow$ 3 + 4 4 3

4. a) ¿El grafo bipartito completo $K_{3,2}$ tiene camino de Euler? Si la respuesta es afirmativa indicar uno.
b) Los trabajos de las computadoras A, B, C, D y E van a una cola de impresión que no establece prioridades entre los mismos. Calcular de cuántas formas distintas pueden imprimirse los trabajos si: **b1)** el que procede de la computadora A ha de imprimirse en primer lugar. **b2)** el que procede de la computadora A ha de imprimirse primero y el que procede de la computadora B debe imprimirse tercero.

5. Sean las producciones: A$\rightarrow$ 3 / 2 / 1B /λ , B$\rightarrow$ 1B / 3 con A símbolo inicial no terminal: **a)** indicar la gramática G y clasificarla; **b)** hallar el lenguaje L generado por G.

<u>Solución</u>

1.

$Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ Definimos la suma de clases de equivalencia como indica la tabla:

$\bar{+}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Neutro $\bar{0}$

Simétricos: $\bar{0}' = \bar{0}$ $\bar{1}' = \bar{1}$

Es conmutativo

$Z'_4 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

$\bar{\cdot}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Neutro: $\bar{1}$

Simétricos: $\bar{3}' = \bar{3}$ $\bar{1}' = \bar{1}$

Es conmutativo

$Z_2 x Z'_4 = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{1}).(\bar{1}, \bar{3})\}$

La operación definida en el conjunto anterior es la siguiente:

$(\bar{a}, \bar{b}) * (\bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a}\ \overline{+_2}\ \bar{c}, \bar{b}\ \overline{\cdot_4}\ \bar{d})$

Cumple LCI por cumplirlo los dos conjuntos, lo mismo que asociativa y conmutativa. El neutro es $(\bar{0}, \bar{1})$, los simétricos se dan en la siguiente tabla:

x	x’
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	$(\bar{0}, \bar{3})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{3})$	$(\bar{1}, \bar{3})$

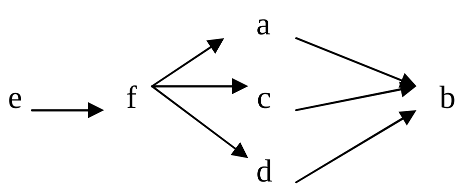
2. Los elementos en rojo los podemos agregar porque es válida idempotencia:

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	b	b	a	a
b		b	b	b	b	b
c			c	b	c	c
d				d	d	d
e					e	f
f						f

Los elementos en azul los agregamos por conmutativa:

∨	a	b	c	d	e	f
a	a	b	b	b	a	a
b	b	b	b	b	b	b
c	b	b	c	b	c	c
d	b	b	b	d	d	d
e	a	b	c	d	e	f
f	a	b	c	d	f	f

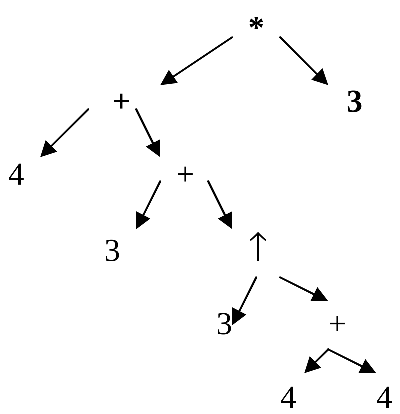
El neutro es e, por lo tanto primer elemento. Con esta tabla realizamos el diagrama de Hasse teniendo en cuenta que estamos definiendo los supremos, luego realizamos la tabla de los ínfimos:



∧	a	b	c	d	e	f
a	a	a	f	f	e	f
b	a	b	c	d	e	f
c	f	c	c	f	e	f
d	f	d	f	d	e	f
e	e	e	e	e	e	e
f	f	f	f	f	e	f

El neutro es b, último elemento. Los únicos que tienen complemento son los neutros (cada uno es complemento del otro). No es distributivo por el tipo de diagrama. No es Álgebra de Boole porque la cantidad de elementos no es potencia de dos.

3.

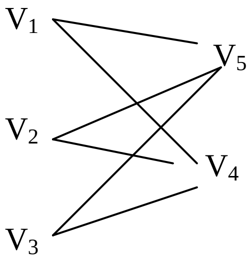


El valor del árbol es $(4+3+3^8) * 3 =$

Notación polaca inversa: 4 3 3 4 4 + ↑ + + 3 *

4. a) ¿El grafo bipartito completo $K_{3,2}$ tiene camino de Euler? Si la respuesta es afirmativa indicar uno.

El grafo bipartito es:



Tiene dos vértices de grado impar, y es conexo, por lo que tiene camino de Euler. Uno posible es $(v_4, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1, v_5)$

b) Los trabajos de las computadoras A, B, C, D y E van a una cola de impresión que no establece prioridades entre los mismos. Calcular de cuántas formas distintas pueden imprimirse los trabajos si:
b1) el que procede de la computadora A ha de imprimirse en primer lugar. Importa el orden y estamos dejando A fijo, permutando las otras cuatro computadoras, por lo que las formas distintas en que pueden imprimirse esos trabajos es $P_4 = 4! = 24$

b2) el que procede de la computadora A ha de imprimirse primero y el que procede de la computadora B debe imprimirse tercero. En este caso dejamos fijos A y B y podemos cambiar el orden de las otras tres, por lo que la cantidad de trabajos es $P_3 = 3! = 6$