ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una Estructura Algebraica es un objeto matemático consistente en un conjunto no vacío y una relación ó ley de composición interna definida en él.
En algunos casos más complicados puede definirse más de una ley de composición interna y también leyes de composición externa.

Operación binaria ó Ley de composición interna : definida en un conjunto no vacío A es toda regla (función) que asocia a cada par de elementos de A otro elemento de A.

Es decir:
es una ley de composición interna en A : A x A A / a,b A a * b = c ; c A

Ejemplos

- La suma ó la multiplicación es ley de composición interna en **N**, en **Z,** en **Q,** en **R** ó en **C**
- Las siguientes tablas definen leyes de composición interna en el conjunto A = {a, b, c}

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

	a	b	c
a	a	b	b
b	c	a	c
c	b	c	a

Propiedades de las operaciones binarias y elementos notables

Propiedad conmutativa

a, b A : a * b = b * a

Ejemplos

- La adición y la multiplicación son conmutativas en cada uno de los conjuntos numéricos
- La siguiente tabla define una ley de composición interna conmutativa en el conjunto A = {1, 2, 3}

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Al observar la tabla hay simetría respecto a la diagonal principal.Esto sucede siempre que la operación es conmutativa en un conjunto finito.

- La siguiente ley de composición interna definida en R dada por la expresión
  a * b = a   b   no es conmutativa ya que si a =2 y b= -3
  a * b = 2   -3   = 2 3 = 6   y   **b * a** = -3   2   = -3 2 = -6
  por lo tanto a * b es distinto de b * a

<u>Propiedad asociativa</u>:

a,b,c   A : (a ¨* b) * c = a * (b * c)

<u>Ejemplos</u>

- La adición y la multiplicación son asociativas en cada uno de los conjuntos numéricos

- En el conjunto de partes de cualquier conjunto A, la unión y la intersección son asociativas

- En el caso de que la operación binaria * este definida por una tabla es necesario considerar todos los casos posibles para demostrar que cumple con la propiedad asociativa.
  Si $|\mathbf{A}|$ = n el número total de casos es n^3 que corresponde a las variaciones con repetición de n elementos tomados de a tres.
  La siguiente ley de composición interna definida por la tabla es asociativa

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Debemos plantear 3^3 casos pero como la operación binaria * es conmutativa, tabla simétrica respecto a la diagonal principal, son suficientes diez casos.

a	b	c	(a * b)	(a * b) * c	(b * c)	a * (b * c)
1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	2	1
1	3	1	1	1	1	1
1	2	3	1	1	2	1
1	3	3	1	1	3	1
2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2
3	3	3	3	3	3	3

- La siguiente ley de composición interna definida en R dada por la expresión
  a * b = a   b   es asociativa ya que
  (a * b) * c = (a ¨* b)   c   = (a   b)   c   = **a   b   c**
  a * (b * c) = a * (b   c) = a   b   c   = **a   b   c**

  Por lo tanto   (a ¨* b) * c = a * (b * c)

<u>Propiedad idempotencia</u>

a   A : a * a = a

<u>Ejemplos</u>

- En el conjunto de partes de cualquier conjunto A, la unión y la intersección son idempotentes.

  X: X   X = X; X   X = X

- La ley de composición interna * en el conjunto A={1,2,3} definida por la tabla cumple idempotencia

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Al observar la diagonal principal de la tabla se cumple 1*1=1; 2*2 = 2; 3*3 = 3

- La siguiente ley de composición interna definida en R dada por la expresión
  a * b = a   b   no cumple idempotencia ya que si a = -2
  a * a = a   a   = -2 . 2 = -4 que es distinto de -2

Si tenemos una segunda operación binaria ***'**

<u>Propiedad distributiva</u>

a,b,c   A a ***´** (b * c) = (a ***´** b) * (a ***´**c) distribuye a izquierda respecto de *
(a ***** b) *´c = (a ***** c) *´ (a * c) distribuye a derecha respecto de *

<u>Ejemplos</u>

- La multiplicación distribuye respecto a la suma en todos los conjuntos numéricos
- La unión de conjuntos distribuye respecto de la intersección de conjuntos y la intersección de conjuntos distribuye respecto a la unión de conjuntos

Algunos elementos del conjunto A se pueden comportar de forma notable respecto a la operación * .Por lo tanto podemos encontrar

<u>Elemento neutro e:</u>

e   A /   a   A: a   e   e   a   a

Si existe el elemento neutro este es único

<u>Ejemplos</u>

- En los conjuntos numéricos el neutro para la suma es el cero y para la multiplicación es el uno
- En el conjunto de partes de cualquier conjunto A, el neutro de la unión es el conjunto vacío,   , y el neutro de la intersección es el conjunto A
- La ley de composición interna * en el conjunto A={1,2,3} definida por la tabla tiene como elemento neutro el 3

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

El elemento neutro 3 corresponde a la intersección de la fila y de la columna donde aparecen los elementos del conjunto A en el orden establecido.

- La siguiente ley de composición interna * definida en R dada por la expresión
  a * b = a b no posee neutro ya que a * e = a e = a e = 1 e =1 v e = -1 y e * a = e a = a si a 1 e =1 **;** si a < 1 e = - 1
  Como el elemento neutro es único * no tiene elemento neutro

<u>Elemento simétrico:</u>

a A a´ A / a a´ a´ a e

La operación * tiene simétrico en A si cada elemento de A tiene simétrico. El simétrico de cada elemento es único.
Si la operación * no tiene neutro en A no se puede buscar el simétrico de ningún elemento de A.

<u>Ejemplos</u>

- Como en el conjunto de los números N con la adición no hay neutro entonces ningún elemento tiene simétrico.

- Para los conjuntos numéricos Z,Q,R y C ,con la adición los simétricos son los opuestos.Es decir : a + a' = 0 a' = -a

- El conjunto de los números enteros con la multiplicación no tiene simétrico ya que a.a'=1 a' = $\frac{1}{a}$ si a=5 a'= $\frac{1}{5}$ que no es elemento de Z

- La ley de composición interna * en el conjunto A= {1, 2,3} definida por la tabla no tiene simétrico.

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Para encontrar el simétrico de cada elemento se debe buscar y marcar el neutro en cada una de las filas de la tabla de la operación binaria *.El simétrico corresponde a la columna en donde aparece el neutro.
Es decir: 3' = 3; 1 y 2 no tienen simétrico.

- La siguiente operación binaria * en el conjunto A= {0, 1,2} definida por la siguiente tabla tiene simétrico.

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

El elemento neutro es el 0.De la tabla se obtiene 0’=0; 1’=2 y 2’=1

<u>Elemento absorbente:</u>

a A / x A : x * a = a * x = a

Si existe el elemento absorbente este es único

<u>Ejemplos</u>

- En los conjuntos numéricos no hay elemento absorbente para la suma y para la multiplicación el elemento absorbente es el cero

- La ley de composición interna * en el conjunto A={1,2,3} definida por la tabla tiene como elemento absorbente el 1

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

- La siguiente ley de composición interna * definida en R dada por la expresión
a * b = a b posee elemento absorbente a=0 ya que x * 0 = x 0 = 0 y 0 *x =0 x = 0

Según las propiedades que deban satisfacer estas leyes de composición, se tienen los distintos tipos de estructuras ó sistemas axiomáticos.

<u>Monoide</u>

El par (A,) donde A es un conjunto no vacío dotado de una operación ó ley de composición interna se denomina <u>monoide.</u>

<u>Ejemplos</u>

- **(N, -)** no es un monoide porque la sustracción no es ley de composición interna en **N.**
- **(N,**) donde está definido como a b = máx{a , b} es un monoide.

<u>Semigrupo</u>

El par **(A,)** donde A es un conjunto no vacío dotado de una operación ó ley de composición interna es semigrupo si: es asociativa.

Si la ley de composición interna además es conmutativa se llama **semigrupo conmutativo.** Si existe el elemento neutro se dice que es un **semigrupo con unidad** ó **semigrupo con identidad.** El elemento neutro se llama **identidad.**

<u>Ejemplos</u>

- **(N, +)** es un semigrupo conmutativo sin elemento neutro.
- **(N_0 , +)** es un semigrupo conmutativo con elemento neutro, el 0.
- **(N,)** es un semigrupo conmutativo con elemento neutro ó identidad igual a 1.

<u>Grupo</u>

El par **(A,)**, donde A es un conjunto no vacío dotado de una ley de composición interna binaria es **grupo** si:

es asociativa.
posee elemento neutro en A.
todo elemento de A tiene simétrico en A respecto de .

<u>Grupo Abeliano</u> ó **<u>Grupo conmutativo</u>** es cuando además de ser un grupo, es conmutativa.Es decir:

(A,) es un ***grupo*** abeliano sí:

es asociativa.
posee elemento neutro en A.

todo elemento de A tiene simétrico en A respecto de .
* es conmutativa

Si **(A,)** es grupo, se dice que es un **grupo finito** si el conjunto A es finito y su cardinal se llama orden del grupo.

Ejemplos

- **(Z , +) ; (Q , +) ; (R , +) y (C , +)** son grupos abelianos.
- **(N_0 , +)** No es grupo. Tiene neutro, el 0, pero no tiene inverso
- **(Q ,)** No es grupo, el 0 no tiene inverso multiplicativo.
- **(Q – { 0 } ,)** y **(R – { 0 } ,)** son grupos abelianos
- El par **(Z,)** donde **Z** es el conjunto de los números enteros y es una operación definida como a b = a + b + 2 alcanza la estructura de un grupo abeliano.

Verificación:

es ley de composición interna en Z pues la suma y el producto son leyes de composición interna en Z .Por lo tanto si a y b Z , a + b + 2 Z

es asociativa pues

a b c = (a + b +2) c = a + b +2 + c +2 = a + b + c + 4 (1)

y a b c = a (b + c + 2) = a + b + c + 2 + 2 = a + b + c + 4 (2)

Por lo tanto (1) = (2)

tiene elemento neutro e = –2, pues

a A , a e = a a + e +2 = a e = –2

y e a = a e + a + 2 = a e = –2

tiene inverso a , a / a a e , ya que

a a = –2 a + a´+ 2 = –2 a´ = – a – 4

a´ a= -2 a + a´+ 2 = –2 a´ = – a – 4

Por lo tanto <u>a´ = – a – 4</u>

es conmutativa pues a b = a + b + ´2 = b + a + 2 = b a

Subgrupo

Un subconjunto no vacío H, del conjunto A es un subgrupo de **(A,)** grupo si y solo sí **(H,)** es grupo en si mismo.

<u>Ejemplo</u>

- **(Z, +)** es un subgrupo de **(Q, +)**.grupo conmutativo.

Si en estas estructuras se introduce una nueva ley de composición interna con ciertas restricciones, se obtienen ternas ordenadas del tipo **(A , ,)** que también son estructuras algebraicas.

Estas nuevas estructuras son:

<u>Retículo Algebraico</u>

Dados, un conjunto no vacío A y dos leyes de composición interna y , la terna ordenada **(A, ,)** tiene estructura de **retículo Algebraico** si y solo si

, son asociativas
, son conmutativas
, son idempotentes
, cumplen con absorción
x, y A : x (x y) = x
x, y A : x (x y) = x

<u>Ejemplos</u>

- (P(A), ,) es un retículo algebraico ya que cumple con :

- Operaciones binarias.

  : P (A) x P(A) $\longrightarrow$ P (A)
  : P (A) x P (A) $\longrightarrow$ P (A)

- Asociatividad
  X A, Y A, Z A: (X Y) Z = X (Y Z)
  X A, Y A, Z A: (X Y) Z = X (Y Z)

- Conmutatividad
  X A, Y A: X Y = Y X
  X A, Y A: X Y = Y X
- Idempotencia
  X A: X X = X

X A: X X = X

- Absorción

  X A, Y A: X X Y X (X Y) = X;

  X Y X X (X Y) = X

- (D_8,mcm,mcd) es retículo algebraico pues:

- Operaciones binarias.

  mcm: D_8 x D_8 $\longrightarrow$ D_8

  mcd D_8 x D_8 $\longrightarrow$ D_8

- Asociatividad

  a D_8 , b D_8 , c D_8 : mcm{ mcm{a,b},c} = mcm{a,mcm{b,c}}

  a D_8 , b D_8 , c D_8 : mcd{ mcd{a,b},c} = mcd{a,mcd{b,c}}

- Conmutatividad

  a D_8 , b D_8 : mcm{a,b} = mcm{b,a}

  a D_8 , b D_8 : mcd{a,b} = mcd{b,a}

- Idempotencia

  a D_8 : mcm{a,a} = a

  a D_8 : mcd{a,a} = a

- Absorción

  a D_8 , b D_8 : mcd{a,mcm{a,b}} = a mcm{a,mcd{a,b}} = a

Álgebra de Boole

Dados, un conjunto no vacío A; dos leyes de composición interna y , los elementos 0 y 1 y una operación unaria (complemento) ¯ ; la terna **(A, ,)** tiene estructura de **Álgebra de Boole** si y solo si :

, son asociativas

, son conmutativas

, tienen elemento neutro

distribuye respecto a ; distribuye respecto a

Los elementos de A tienen complemento

x A $\bar{x}$ A / x $\bar{x}$ = 1 x $\bar{x}$ = 0

Ejemplo

- (P(A), ,) es un Álgebra de Boole ya que :

  - Operaciones binarias. La operación binaria es la *unión* de conjuntos ( ) y la operación binaria es la *intersección* ( ) de conjuntos.

    : P (A) x P(A) ⟶ P (A)
    : P (A) x P (A) ⟶ P (A)

  - Asociatividad. La unión y la intersección de conjuntos son asociativas, ya que para cualesquiera tres conjuntos X, Y, Z:
    X A, Y A, Z A: (X Y) Z = X (Y Z)
    X A, Y A, Z A: (X Y) Z = X (Y Z)

  - Conmutatividad. La unión y la intersección son conmutativas, ya que para cualquier par de conjuntos X, Y :
    X A, Y A: X Y = Y X
    X A, Y A: X Y = Y X

  - Existencia de neutros. El neutro de la unión es el conjunto vacío , mientras que el neutro de la intersección es el conjunto A, ya que para cualquier conjunto arbitrario X,
    X = X y X A = X

  - Distributividad. La unión de conjuntos es distributiva sobre la intersección, y viceversa, la intersección es distributiva sobre la unión, ya que para cualesquiera tres conjuntos X, Y, Z:
    X (Y Z) = (X Y) (X Z) y X (Y Z) = (X Y) (X Y)

  - Existencia de complementos. El conjunto complemento $\overline{X}$ cumple con las condiciones deseadas:
    X $\overline{X}$ = A y X $\overline{X}$ =

- (D_8,mcm,mcd) no es un Álgebra de Boole ya que si bien cumple con :

  - Operaciones binarias.

    mcm: D_8 x D_8 ⟶ D_8
    mcd D_8 x D_8 ⟶ D_8

  - Asociatividad

a D_8 , b D_8 , c D_8 : mcm{ mcm{a,b},c} = mcm{a,mcm{b,c}}
a D_8 , b D_8 , c D_8 : mcd{ mcd{a,b},c} = mcd{a,mcd{b,c}}

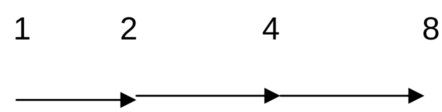
- Conmutatividad
  a D_8 , b D_8 : mcm{a,b} = mcm{b,a}
  a D_8 , b D_8 : mcd{a,b} = mcd{b,a}

- Existencia de neutros. El neutro del mcm{a,b} es 1 y el neutro del mcd{a,b} es 8

- Distributividad. El mcm{a,b} distribuye respecto al mcd{a,b}, y viceversa, el mcd{a,b} es distributivo sobre el mcm{a,b}, ya que para cualesquiera tres elementos a,b,c:
  Mcm{a,mcd{b,c}}=mcd{mcm{a,b},mcm{a,c}} y
  mcd{a,mcm{b.c}}=mcm{mcd{a,b},mcd{a,c}}

No tiene complemento: ya que el 2 y 4 no tienen complemento; $\bar{1} = \bar{8}$

Diagrama de Hasse



Bibliografía consultada
- Álgebra I
  Armando Rojo. Editorial El Ateneo - 1978
-Matemática Discreta y sus aplicaciones (quinta edición)

Kenneth Rosen. Editorial Mc Graw Hill – 2004
-Matemáticas Discretas.
Kenneth A. Ross.Charles R.B. Wright.Editorial Prentice Hall